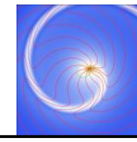
§5 带电粒子的电磁质量和辐射阻尼

1

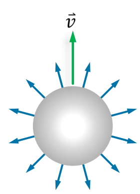
一、带电粒子的电磁质量

- 带电粒子的运动状态改变时，由此会造成两方面的影响：
  - **粒子对场的影响：** 带电粒子运动状态的改变导致其周围的电磁场也随之变化，并有一部分电磁场辐射出去。
  - **场对粒子的影响：** 电磁场本身具有能量和动量；带电粒子产生的场变化时，场的能量和动量就会变化；守恒定律意味着粒子自身的能量和动量也要改变。即带电粒子粒子产生的场会对粒子自己有作用力。
- 粒子产生的电磁场，对粒子的作用将带来两个后果：
  - 使粒子附加了一个质量（电磁质量）。
    - ✓ 这一效应即是质量重整化。QED中，场还能产生正负粒子对，故还会使粒子的有效电荷分布发生改变。
  - 辐射阻尼力效应。



问题的简化

为了简化讨论，我们做如下假设：



- 假设粒子的电荷分布在半径为 r_0 的球内，且是球对称的。
  - 粒子激发的静电场具有球对称性

$$\vec E_0 = E_0(r)\hat r, \qquad (\hat r \triangleq n_i\hat x_i)$$

  - 粒子的静电能记为

$$W_0 = \int\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\right)dV = \boxed{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int dV\int dV'\frac{\rho(\vec x)\rho(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}}\ \frac{1}{2}\int\rho\varphi dV$$

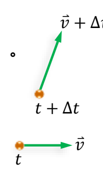
- 假设粒子匀速运动，且 $v \ll c$。因此电磁场只有自场，且

$$\vec E = \vec E_0, \qquad \vec B = \vec v\times\vec E_0/c^2$$

3

电磁质量的由来

- 质量为 m_0 的粒子以速度 $\vec v$ 运动时，其动量为 $\vec p = m_0\vec v$，动能为 $T = m_0v^2/2$。由于 $\vec F = m_0\dot{\vec v}$，因而粒子速度改变时，外界需要提供的冲量和做的功分别为 $\Delta\vec p$ 和 ΔT。
- 匀速运动的带电粒子携带着自场（辐射场为零）。速度不同，自场及其动量 $\vec G$ 和能量 W 也不同。
  - 根据动量守恒定律，外界冲量应等于 $\Delta\left(\vec p+\vec G\right)$。
  - 根据能量守恒定律，外界做功应等于 $\Delta(T+W)$。
  - 比起同样质量的电中性粒子来说，在同样的力作用下，带电粒子的动量改变来的要小，或者说其惯性看起来更大。



由于携带自场，带电粒子表现的惯性要比原来的大；相当于在裸质量 m_0 上附加了一个质量，此附加质量称为其电磁质量。

4

自场的动量

$$\vec G = \varepsilon_0\int dV\,\vec E\times\underbrace{\boxed{\vec B}}_{\vec v\times\vec E_0/c^2} \qquad = \frac{\varepsilon_0}{c^2}\int dV\,\underbrace{\boxed{\vec E_0\times\left(\vec v\times\vec E_0\right)}}_{E_0^2\vec v-\left(\vec E_0\cdot\vec v\right)\vec E_0}$$

$$\Rightarrow\quad \vec G = \frac{2\vec v}{3c^2}\cdot\boxed{\int dV\,\varepsilon_0 E_0^2(r)}\ 2W_0$$

$$\Rightarrow\quad \vec G = \alpha\vec v, \qquad \left(\alpha \triangleq \frac{4W_0}{3c^2}\right)$$

$$\int dV\,\left(\vec E_0\cdot\vec v\right)\vec E_0 = \hat x_i v_j\int\boxed{dV}\,E_0^2(r)n_in_j \quad r^2drd\Omega$$

$$= \hat x_i v_j\int E_0^2(r)r^2dr\cdot\boxed{\int n_in_j\,d\Omega}\ \frac{4\pi}{3}\delta_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\int d\Omega$$

$$= \frac{1}{3}\vec v\int dV\,E_0^2(r)$$

5

自场的能量

$$W = \int dV\,\frac{1}{2}\varepsilon_0\Big(E^2+\underbrace{\boxed{c^2B^2}}_{\left(\vec v\times\vec E_0/c\right)^2}\Big) = W_0+\frac{1}{c^2}\int dV\,\frac{1}{2}\varepsilon_0\underbrace{\boxed{\left(\vec v\times\vec E_0\right)^2}}_{v^2E_0^2-\left(\vec v\cdot\vec E_0\right)^2}$$

$$\Rightarrow\quad W = W_0+\boxed{\frac{2W_0}{3c^2}}\,v^2 \quad \alpha/2$$

$$\Rightarrow\quad W = W_0+\frac{1}{2}\alpha v^2, \qquad \left(\alpha \triangleq \frac{4W_0}{3c^2}\right)$$

$$\int dV\,\left(\vec v\cdot\vec E_0\right)^2 = v_iv_j\int\boxed{dV}\,E_0^2(r)n_in_j \quad r^2drd\Omega$$

$$= v_iv_j\int E_0^2(r)r^2dr\cdot\boxed{\int n_in_j\,d\Omega}\ \frac{4\pi}{3}\delta_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\int d\Omega$$

$$= \frac{1}{3}v^2\int dV\,E_0^2(r)$$

6

粒子的电磁质量

- 粒子速度改变时，所需施加的冲量和做的功分别是

$$\Delta(m_0\vec{v}+\alpha\vec{v}),\qquad \Delta\left(\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{1}{2}\alpha v^2\right)$$

  - 由于带电粒子携带着自场，它所表现的惯性要比原来的大。
  - 相对于原有质量 m_0 之上再附加一个质量 $\alpha=4W_0/3c^2$。
  - 这个附加质量 α 就称为粒子的**电磁质量**。
- 带电粒子的运动方程不再是 $\vec{F}=m_0\dot{\vec{v}}$，而应将其改写为

$$\vec{F}=m\dot{\vec{v}},\qquad (m\triangleq m_0+\alpha)$$

- 实验上测量的带电粒子质量，实为 $m=m_0+\alpha$，而非 m_0。
  - 不可能通过质量的直接测量确定 m_0 和 α 各自的大小。
  - 若不只停留在直接观测上，知道了电荷分布即可计算 α。

7

电子的电磁质量

- 若知道电子内部的电荷分布，则可由静电能计算得到 α。
  - 当电荷均匀分布在半径为 r_0 的球面上时，不难给出

$$W_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}=\frac{e_s^2}{2r_0}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{4W_0}{3c^2}=\frac{2e_s^2}{3c^2r_0}$$

  - 当电荷均匀分布在半径为 r_0 的球体内时，不难给出

$$W_0=\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}=\frac{3e_s^2}{5r_0}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{4W_0}{3c^2}=\frac{4e_s^2}{5c^2r_0}$$

- 若电子是一个严格的点，即 $r_0=0$，则电子质量将为无穷大，而电子的运动状态将不可能被改变。这就是著名的**发散困难**。
  - 有人假设电子为点粒子前提下，并假设电子裸质量 $m_0=-\infty$，从而保证 $m=m_0+\alpha=m_e=0.911\times10^{-30}$ kg 有限。

8

电子的经典半径

洛伦兹（Lorentz）和阿伯拉罕（Abraham）曾经假设：

电子的质量可能完全是电磁的，即 $m_0=0$。

- 在此假设下，电子的总质量为 $m_e=\alpha=4W_0/3c^2$。
  - 对均匀球面或球体电荷分布，由此给出的电子半径分别为

$$r_0=\frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2}{m_ec^2},\qquad r_0=\frac{4}{5}\cdot\frac{\boxed{e_s^2}}{m_ec^2}\qquad \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}=1.44\ \text{MeV}\cdot\text{fm}$$

  - 可以想象，若电子电荷以其他形式分布在半径为 r_0 的球内时，也将具有 $e_s^2/(m_ec^2)$ 的量级。因此通常把

$$r_e\triangleq\frac{e_s^2}{m_ec^2}=2.82\ \text{fm}$$

  称为**电子的经典半径**。

9

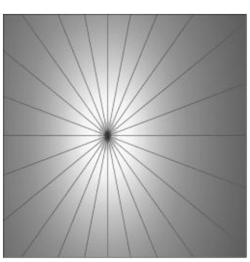
- r_e 不代表电子真正大小（电子半径至少比 r_e 小 3 个量级）。
  - 即使电子的电磁质量 α 在量级上与总质量 m 相同，由于电子和电磁场服从量子规律性，就使得经典理论不能给出正确结果。
  - r_e 有用：以特征长度的形式出现在许多公式中。
  - r_e 有物理意义：表征电子发生电磁作用的有效尺度。
- 洛伦兹-阿伯拉罕模型的困难
  - 若只有电磁作用，电子本身将是不稳定的。
  - $m_ec^2=(4/3)W_0$ 不符合相对论的要求。
- 从基本粒子实验情况来考察，电磁质量效应是存在的。
  - 一些粒子在强作用方面完全相同，但电荷不同，而它们之间确实表现出有小的质量差（约为电子质量的几倍）。

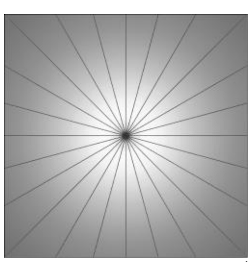
$$m_p=938.272\ \text{MeV},\qquad m_n=939.566\ \text{MeV}$$
$$m_{\pi^\pm}=139.569\ \text{MeV},\qquad m_{\pi^0}=134.965\ \text{MeV}$$

10

二、辐射阻尼

当粒子辐射电磁场时，其自身的能量将逐渐衰减，这种现象称为**辐射阻尼**（radiation damping）。可见，辐射场必然会对粒子产生反作用，这个作用力 $\vec{F}_R$ 称为**辐射阻尼力**。





11

能量平衡

- 简单起见，此处只考虑非相对论粒子。
  - 此情形下粒子单位时间辐射出去的能量由拉莫公式给出。
- 根据能量守恒定律，我们似乎应该有关系

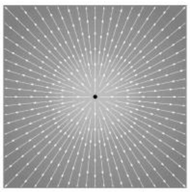
$$\vec{F}_R\cdot\vec{v}=-P=-\frac{2e_s^2a^2}{3c^3}$$

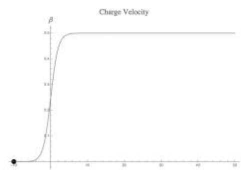
- 由于忽略了粒子自场能量的变化，此公式不可能是正确的。
  - 前面讨论电磁质量时，自场是按匀速粒子的电磁场计算的。而由于推迟效应，一般情形下的自场并不与匀速时相同。
  - 在速度不断变化情况下，前面电磁质量的讨论中，自场能量变化并未完全包含在粒子动能的改变中。
  - 自场与辐射场之间存在干涉效应。

12

两类重要的辐射过程

- 以下过程中，辐射总能量等于粒子克服辐射阻尼力所做的功：
  - 粒子从某匀速运动的初态变到另一个匀速运动的末态。
  - 在周期过程中，粒子附近的场恢复了原状时。





微观物理中，通常过程有两类：散射过程和束缚态粒子的运动。
前者初、末态都是匀速运动，后者大多是周期性或准周期性运动。

能量平衡对辐射阻尼力的限制

- 尽管前面的方程并非瞬时成立的，但如果我们在一个合适的范围内对时间积分，所得结果却是正确的：

$$\vec{a}\cdot\dot{\vec{v}} = d(\vec{a}\cdot\vec{v})/dt - \dot{\vec{a}}\cdot\vec{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_R\cdot\vec{v}dt = -\frac{2e_s^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2}\boxed{a^2}dt = -\frac{2e_s^2}{3c^3}\left(\boxed{\vec{a}\cdot\vec{v}\Big|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2}\dot{\vec{a}}\cdot\vec{v}dt\right)$$

- 在以下场合，上式右侧第一项均为零。故能量守恒成立要求

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_R - \frac{2e_s^2}{3c^3}\dot{\vec{a}}\right)\cdot\vec{v}dt = 0$$

  - 初、末态均为匀速直线运动状态。
  - 粒子作周期运动、且 t_1 和 t_2 相差一个周期。
  - 匀速圆周运动（t_1、t_2 任意）。

1. 阿伯拉罕-洛伦兹公式

- 如果 $\vec{F}_R$ 由下式给出，则前面的关系就可以得到满足：

$$\vec{F}_R = \frac{2e_s^2}{3c^3}\dot{\vec{a}}$$

这一表达式称为辐射阻尼力的**阿伯拉罕-洛伦兹公式**。
  - 阿伯拉罕-洛伦兹公式是一种时间平均的辐射阻尼力。
  - 在不改变能量守恒要求的前提下，辐射阻尼力公式中可以加上任一与 $\vec{v}$ 垂直的项。
  - 阿伯拉罕-洛伦兹公式是目前已知的最简表达式。
- 辐射阻尼力可表示为

$$\vec{F}_R = m\tau\dot{\vec{a}},\quad \text{where}\ \ \tau = \frac{2e_s^2}{3mc^3} = \frac{2}{3}\frac{e_s^2/mc^2}{c}$$

  - 对于电子 $r_e = e_s^2/m_ec^2$，故 $\tau = 2r_e/3c \approx 6\times10^{-24}$ s。

阿伯拉罕-洛伦兹方程

- 对于质量为 m、带电量为 e 的粒子，考虑辐射阻尼力后，其在外力 $\vec{F}_0$ 作用下的运动由如下**阿伯拉罕-洛伦兹方程**确定：

$$m\vec{a} = \vec{F}_0 + m\tau\dot{\vec{a}}$$

  - $\vec{F}_R = m\tau\dot{\vec{a}}$ 要达到 $m\vec{a}$ 的量级，即与外力可比拟的量级，则要求 a 满足

$$\tau\dot{a}\sim a$$

  - 只有当加速度如此剧烈地变化，以至于在极短的时间 τ 内，加速度的改变达到与其自身相同的量级时，辐射阻尼力才可与外力相比拟，而这种条件是很少能满足的。

辐射阻尼的效应一般很微弱，它对粒子运动的修正非常微小。

自加速问题

- 设粒子从 $t=0$ 开始受到恒定外力 $\vec{f}$ 作用，$\vec{F}_0(t) = \vec{f}\Theta(t)$。

$$\vec{a} = \tau\dot{\vec{a}} + \frac{\vec{f}}{m}\Theta(t) \ \ \Rightarrow\ \ \begin{cases}\vec{a}_1(t) = \vec{b}_1e^{t/\tau}, & (t<0)\\ \vec{a}_2(t) = \vec{b}_2e^{t/\tau} + \vec{f}/m, & (t>0)\end{cases}$$

- 将运动方程从 $t-\epsilon$ 到 $t+\epsilon$ 积分

$$\boxed{\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon}\vec{a}dt} = \tau\boxed{\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon}\dot{\vec{a}}dt} + \frac{\vec{f}}{m}\boxed{\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon}\Theta(t)dt}$$

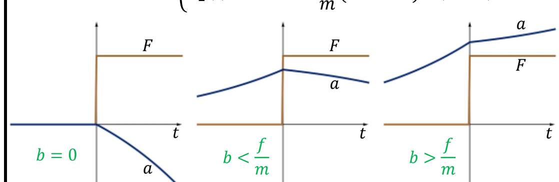
$$\vec{v}(t+\epsilon) - \vec{v}(t-\epsilon)\quad \vec{a}(t+\epsilon) - \vec{a}(t-\epsilon)\quad 0\ \text{or}\ \epsilon\ \text{or}\ 2\epsilon$$

$$\Rightarrow\quad 0 = \vec{a}(t+\epsilon) - \vec{a}(t-\epsilon),\quad \left(\text{when}\ \ \epsilon\longrightarrow 0\right)$$

因此，$\vec{a}(t)$ 是时间 t 的连续函数。$\Rightarrow\quad \vec{b}_1 = \vec{b}_2 + \vec{f}/m \triangleq \vec{b}$

- 方程的解为

$$\begin{cases}\vec{a}_1(t) = \vec{b}e^{t/\tau}, & (t<0)\\ \vec{a}_2(t) = \vec{b}e^{t/\tau} + \dfrac{\vec{f}}{m}\left(1-e^{t/\tau}\right), & (t>0)\end{cases}$$



  - 除非 $\vec{b}=0$，否则外力作用之前粒子就会对外力作出响应（预加速），且 $\vec{a}$ 将随时间 $t(>0)$ 指数增加（自加速）。

【思考】在有其他外力 F_0 作用下，带电粒子的运动方程写为

$$a = \tau\dot{a} + F_0/m$$

- 证明：与电中性粒子（$a = F_0/m$）不同，即便力存在间断点，带电粒子的加速度（如同位置和速度一样）总是 t 的连续函数。
- 如果粒子只在 $0 < t < T$ 时间范围内受外力 F_0 作用，且 F_0 为常数。试分别写出 $a(t)$ 在 $t < 0$、 $0 < t < T$ 和 $t > T$ 范围内的一般解。
- 利用连续性条件证明：我们确实有可能避免 $t > T$ 内的自加速解，或者避免 $t < 0$ 内的预加速解，但无法同时做到这两点。
- 选择可以避免自加速问题的解，写出 $a(t)$ 和 $v(t)$，对其作图示意，并将其与同样力作用下电中性粒子的 $a(t)$ 和 $v(t)$ 进行比较。

经典理论的困难

- 在一定条件下（非相对论，且速度变化比较平缓），我们可以从洛伦兹公式直接计算粒子的场（自场+辐射场）对粒子自身的作用力 $\vec{F}_S$，其结果是一个无穷级数

$$\vec{F}_S = -\alpha\vec{a} + \frac{2}{3}\frac{e_s^2\dot{\vec{a}}}{c^3} + \cdots$$

  - ➢ 虽然粒子半径 $r_0 \to 0$ 时，后面的各项趋于零，但第一项的系数 α 却要趋于无穷，这就出现了前面所说的发散困难。
  - ➢ 如果 r_0 不等于零，则上述 $\vec{F}_S$ 代入带电粒子的运动方程

$$m_0\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_S$$

    得到的电子的运动方程将是一个无穷阶方程，这又在理论上发生了问题。

【例】对于均匀磁场中的带电粒子，设初始时粒子具有与磁场垂直、远小于光速 c 的速度，试描述粒子接下来的运动，计算粒子速率衰减快慢。

大多数辐射反应问题用能量方法处理非常简单，图像也较清晰。

【解】假设粒子几乎是在做圆周运动，且 $\beta \ll 1$ 。因此

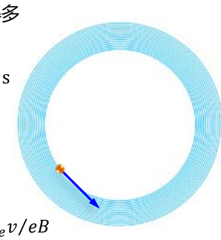
$$\begin{cases} P = \dfrac{2e_s^2a^2}{3c^3} = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\dfrac{evB}{m}\right)^2 = \dfrac{e^4B^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2c^3}v^2 \\ P = -\dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = -mv\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\underbrace{\boxed{\frac{e^4B^2}{6\pi\varepsilon_0 m^3c^3}}}_{1/\tau}v \quad \Rightarrow \quad v = v_0e^{-t/\tau}, \quad \left(\tau = \frac{6\pi\varepsilon_0 m^3c^3}{e^4B^2}\right)$$

- 若带电粒子为电子，而 $B = 1\,\mathrm{T}$，则 $\tau \approx 5.16\,\mathrm{s}$
  - ➢ 与之相比，电子轨道周期要短得多

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB} \approx 3.57 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}$$

  - ➢ 在速度减小为初值的 $1/e$ 之前，电子要转过 1.4×10^{11} 圈。
  - ➢ 此过程中，电子轨道半径 $r = m_e v/eB$ 随着速度减小而减小。



$$v = v_0e^{-t/\tau}, \quad \left(\tau = \frac{6\pi\varepsilon_0 m^3c^3}{e^4B^2}\right)$$

【思考】作匀加速直线运动的电子，经过距离 $d = 3\,\mathrm{nm}$ 后，其速度由 $v_0 = 10^5\ \mathrm{m/s}$ 变为零。试估算此过程中电子由于辐射所损失的能量与初动能之比。

【思考】作为一个经典模型，氢原子可视为由静止质子和绕质子作圆周运动的电子所构成。由于电子会辐射电磁场，因而其半径必然会逐渐减小，并最终落到质子上。试估算：电子轨道半径从 $r_0 = 0.529$ 埃减小为 $(1\%)r_0$ 所需要的时间。设此过程中电子半径缓慢减小，辐射功率采用拉莫公式（有道理吗？）。

2. 朗道-栗弗席兹（Landau-Lifshitz）方程

- 阿伯拉罕-洛伦兹方程也不具有普遍性（即便对非相对论粒子）。

$$m\vec{a} = \vec{F}_0 + m\tau\dot{\vec{a}}, \quad \text{where} \quad \begin{cases} m = m_0 + \alpha \\ \tau = 2e_s^2/3mc^3 \end{cases}$$

  - ➢ 隐含某个空间尺度：粒子尺度或到点粒子的距离 $r_0 \to 0$。
  - ➢ 只要裸质量 $m_0 > 0$，则质量重整化引入的电磁能量

$$\frac{e_s^2}{r_0} < mc^2 \quad \Rightarrow \quad r_0 > \frac{e_s^2}{mc^2} \sim c\tau$$

  - ➢ **$r_0 > c\tau$ 是理论有效的最短尺度，**

    且方程将产生如下 $m\tau\ddot{\vec{a}}(r_0/c) \sim m\tau^2\ddot{\vec{a}}$ 的截止修正。

- 设 $T = a/\dot{a}$ 是加速度变化的典型时间，则阿伯拉罕-洛伦兹方程在物理上更有意义的写法是

$$m\vec{a} = \vec{F}_0 + m\tau\dot{\vec{a}} + O(\tau^2/T^2)$$

  - 只有在辐射阻尼力 $\vec{F}_R = m\tau\dot{\vec{a}} \ll \vec{F}_0$ 始终满足的情形下，阿伯拉罕-洛伦兹方程才是有意义的。
  - 加速度的主要贡献为

$$\vec{a} = \vec{F}_0/m + O(\tau/T) \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{a}} = \dot{\vec{F}}_0/m + O(\tau/T)$$

- 将得到的 $\dot{\vec{a}}$ 代回到原方程，给出

$$m\vec{a} = \vec{F}_0 + \tau\dot{\vec{F}}_0 + O(\tau^2/T^2)$$

  - 此方程与原方程具有同样的精确度。
  - 由于其中没有 $\dot{\vec{a}}$ 项，此方程不会有自加速或其他病态解。

25

- 非相对论点电荷的轨迹，可以用如下包含辐射阻尼力的**朗道-栗弗席兹方程**进行最佳描述

$$m\vec{a} = \vec{F}_0 + \tau\dot{\vec{F}}_0 = \vec{F}_0 + \tau\partial_t\vec{F}_0 + \tau(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{F}_0$$

  - 若粒子从 $t = 0$ 时刻开始受到恒定外力 $\vec{f}$ 作用，从而

$$\begin{cases} \vec{F}_0(t) = \vec{f}\,\Theta(t) \\ \dot{\vec{F}}_0(t) = \vec{f}\,\delta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}(t) = 0, & (t<0) \\ \vec{a}(t) = \vec{f}/m, & (t>0) \end{cases}$$

  - 如果将原子中处于激发态的电子设想为是固有频率 ω_0 的简谐振子，同时受到辐射阻尼力的作用，即

$$\vec{F}_0 = -m\omega_0^2\vec{x} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}_R = \tau\dot{\vec{F}}_0(t) = -m\overset{\gamma}{\boxed{\omega_0^2\tau}}\dot{\vec{x}}$$

从而电子的运动方程为（其中 $\gamma = \omega_0^2\tau$）

$$m\ddot{\vec{x}} = -m\omega_0^2\vec{x} - \gamma m\dot{\vec{x}} \quad\Rightarrow\quad \ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = 0$$

26

§6 介质对电磁波的散射

27

一、散射截面

- 当电磁波入射到样品上时，若样品产生的场无法用平坦界面上的菲涅尔反射、折射理论描述时，就发生了电磁波的**散射**。
  - 入射单色波的波长并不远小于样品边界的曲率半径。
- 与散射相关的物理和导出菲涅耳方程的物理完全一致。
  - 微观：入射电磁波⇒介质中带电粒子运动⇒产生推迟场

  介质中所有粒子产生的场的总和称为“散射场”。
  - 宏观：介质中带电粒子运动 ⇒ 电流（散射场的源）

  实际电流密度应保证总场满足介质表面的边值关系。
- 在透明介质中，电子吸收入射电磁波的能量，向各个方向发出次波，也称为散射。例如地球大气对阳光的散射。

28

微分散射截面

- **微分散射截面**定义为

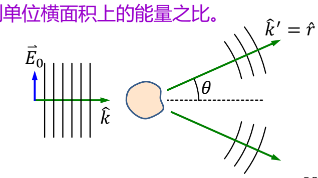
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \triangleq \frac{r^2\hat{r}\cdot\langle\vec{S}'\rangle}{|\langle\vec{S}\rangle|} = \frac{\text{单位立体角散射的辐射功率}}{\text{单位面积入射功率}}$$

其中 $\vec{S}$ 和 $\vec{S}'$ 分别是入射平面波与散射波的能流密度。

- 物理含义：单位时间内在给定方向 $\hat{r}$ 的单位立体角出射的能量与单位时间入射到单位横面积上的能量之比。
- 定义入射波强度

$$I = \left|\langle\vec{S}\rangle\right|$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\langle P\rangle/d\Omega}{I}$$



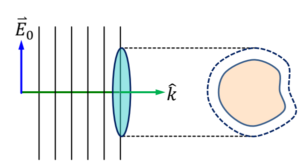
29

总散射截面

- 微分散射截面对立体角积分，就给出了**总散射截面**

$$\sigma = \iint \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

- 物理含义：单位时间入射到横截面积 σ 上的能量，等于单位时间所出射的能量。
- 总截面反应的是物体或带电粒子电磁相互作用的有效尺度。



30

二、自由电子对电磁波的散射

- 下面考察非相对论自由电子（$v \ll c$）对电磁波的散射。
  - 设入射波是线偏振的单色平面波：

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)} \\ c\vec{B} = \hat{k}\times\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \quad I = \langle S\rangle = \varepsilon_0 c^2 \left|\left\langle \vec{E}\times\vec{B}\right\rangle\right| = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$

  - 忽略磁场对电子的作用

    电磁波作用在电子上的电力 ≫ 磁力： $\frac{F_m}{F_e}\sim\frac{vB}{E}\sim\frac{v}{c}\ll 1$
  - 视电磁波的电场为均匀场

    电子运动尺度 ≪ 波长： $l \sim vT \ll cT = \lambda$
  - 电子的辐射功率可采用电偶极辐射公式或拉莫公式计算。

31

自由电子的运动方程

- 在前面的假设基础上，自由电子的运动方程可近似写为

$$m_e\ddot{\vec{x}} = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \boxed{\frac{2e_s^2}{3c^3}\dot{\vec{a}}}$$ 辐射阻尼力 $\vec{F}_R$

- 对于受迫振动解 $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{a}} = \dddot{\vec{x}} = -\omega^2\dot{\vec{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_R = -\overbrace{\boxed{\frac{2e_s^2\omega^2}{3c^3}}}^{\gamma m_e}\dot{\vec{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_R = -\gamma m_e\dot{\vec{x}}$$

$$\Rightarrow \quad m_e\ddot{\vec{x}} + \gamma m_e\dot{\vec{x}} = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\gamma \triangleq \frac{2e_s^2\omega^2}{3m_e c^3} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{e_s^2}{m_e c^2}\cdot\frac{\omega}{2\pi c}\omega \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{r_e}{\lambda}\cdot\omega$$

32

受迫振动解

- 将形如 $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ 的受迫振动解代入方程，即得

$$(-\omega^2 - i\omega\gamma)m_e\vec{x}_0 = -e\vec{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m_e\omega(\omega+i\gamma)}$$

  - 一直到X射线波段（$10^{-8}\sim10^{-11}$ m）都有

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{r_e}{\lambda} \ll 1$$

    分母中的 $i\gamma$ 项（即辐射阻尼效应）常可忽略。
  - 因此，自由电子的受迫振动解可近似写为

$$\vec{x} = \frac{e\vec{E}_0}{m_e\omega^2}e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{p}} = -e\ddot{\vec{x}} = \frac{e^2\vec{E}_0}{m_e}e^{-i\omega t}$$

$$m_e\ddot{\vec{x}} + \gamma m_e\dot{\vec{x}} = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \qquad \gamma = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{r_e}{\lambda}\cdot\omega$$

33

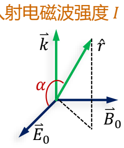
汤姆逊散射截面

- 非相对论情形振荡电子的辐射主要来自电偶极辐射。
- 平均辐射功率为（α 为辐射方向与 $\vec{E}_0$ 的夹角）

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 m_e^2c^3}\sin^2\alpha = \Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}}}_{\text{电子经典半径 } r_e}\Bigg)^2\underbrace{\boxed{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\right)}}_{\text{入射电磁波强度 } I}\sin^2\alpha$$

- 故非相对论自由电子对于线偏振光的微分散射截面和总散射截面分别为

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = r_e^2\sin^2\alpha\,, \qquad \boxed{\sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_e^2}$$ 汤姆逊散射截面



电子经典半径是电子发生电磁相互作用的有效尺度。

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\alpha\,, \qquad \ddot{\vec{p}} = \frac{e^2\vec{E}_0}{m_e}e^{-i\omega t}, \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} \triangleq \frac{d\langle P\rangle/d\Omega}{I}$$

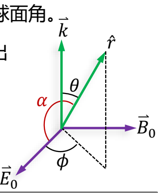
34

对自然光的散射

- 通常，入射波（如自然光）是非偏振的，即 $\vec{E}_0$ 在垂直于 $\vec{k}$ 的平面内无规取向，因而 ϕ 在 $[0,2\pi]$ 范围内等概率取值。
  - θ 和 ϕ 是以入射波传播方向作为极轴的球面角。
- 对自然光，计算时应对 ϕ 取平均。由此给出

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2\left(1+\cos^2\theta\right), \qquad \sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_e^2$$

  - θ 称为散射角。
  - $\sigma_T \approx 0.666$ barn，1 barn $= 10^{-28}$ m^2。



$$\cos\alpha = \hat{r}\cdot\hat{E}_0 = \sin\theta\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\theta\cos^2\phi$$

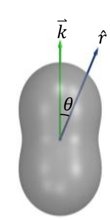
$$\Rightarrow \quad \langle\sin^2\alpha\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\, d\phi = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

35

汤姆逊散射的特点

- 散射波频率与入射波相同。
- **散射波强度（或散射截面）与入射频率无关。**
- **散射波强度（或散射截面）角分布前后对称。**
  - 平行方向（$\theta = 0,\pi$）最强，

    垂直方向（$\theta = \pi/2$）最弱。



- 对硬 X 射线或 γ 射线，汤姆逊散射 ⟹ 康普顿散射（量子）
  - 散射波频率或波长与方向有关

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1-\cos\theta), \qquad \lambda_C \triangleq \frac{h}{m_e c} \approx 2.43\times10^{-12}\ \text{m}$$

  - 散射波强度失去前后对称性（后方强度变弱）
  - 当 $\hbar\omega \ll m_e c^2$、即 $\lambda \gg \lambda_C$ 时，经典理论适用。

36

三、束缚电子对电磁波的散射

基本假定

- 中性气体，**只考虑原子或分子内束缚电子的运动。**
- **电子受到原子或分子内部的约束力用简谐力模拟。**
- 不同电子的空间位置和周期运动的初始相位随机分布，可在处理单个电子运动的基础上，将它们发出的散射波的功率进行简单叠加。
- 设入射波是线偏振的单色平面波。
- **非相对论近似**
  - 电磁波作用在电子上的电力 ≫ 磁力，磁场的作用可忽略。
  - 电子运动长度 ≪ 波长，可视电磁波的电场为均匀场。
  - 电子的辐射功率可采用电偶极辐射公式计算。

37

束缚电子的运动方程及受迫振动解

- 电子的运动方程为（ω_0 为振子的固有频率，或称本征频率 ）

$$m_e\ddot{\vec{x}}+\gamma m_e\dot{\vec{x}}+m_e\omega_0^2\vec{x}=-e\vec{E}_0e^{-i\omega t}$$

- 受迫振动解为

$$\vec{x}=-\frac{e}{m_e}\frac{\vec{E}_0e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\gamma}=\frac{e}{m_e}\frac{\vec{E}_0e^{-i(\omega t-\delta)}}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \ddot{\vec{p}}=-e\ddot{\vec{x}}=-\frac{e^2\vec{E}_0}{m_e}\frac{\omega^2e^{-i(\omega t-\delta)}}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}}$$

对自由电子为 1

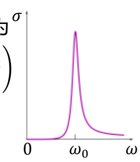
$$\Rightarrow\quad \frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3}\sin^2\alpha=Ir_e^2\sin^2\alpha\boxed{\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}}$$

38

束缚电子的散射截面

- 非相对论谐振电子对线偏振光的总散射截面为

$$\sigma=\sigma_T\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2},\qquad \left(\sigma_T=\frac{8\pi}{3}r_e^2\right)$$



  - 散射波频率与入射波一致，散射截面与入射频率有关。
- 当 $\omega\gg\omega_0$ 时，$\sigma\approx\sigma_T$（自由电子的汤姆逊散射截面）
  - 束缚电子对高频电磁波的散射行为如同自由电子一样。
- 当 $\omega\ll\omega_0$ 时，近似有

$$\sigma\approx\sigma_T(\omega/\omega_0)^4$$

  - 频率越低，散射越弱。
  - 当 $\omega\longrightarrow 0$ 时，σ 以 ω^4 趋于零，称此关系为**瑞利散射定律**。

39

四、经典电动力学的适用范围

- 经典电动力学中的典型困难例举
  - 发散困难、自加速和预加速困难
  - 原子模型与辐射矛盾
  - 康普顿散射光频率变化、光电效应、黑体辐射
- 经典电动力学的适用范围
  - 光的粒子性与带电粒子的波动性均不显著的电磁过程
  - 光子能量远小于带电粒子的能量，带电粒子的德布罗意波长远小于粒子运动的尺度

$$\hbar\omega\ll mc^2,\qquad \lambda=\frac{h}{p}\ll l$$

40

《电动力学》课程结束

感谢尹荣洋助教的大力协助！

感谢同学们的积极参与和配合！

祝诸君好运！