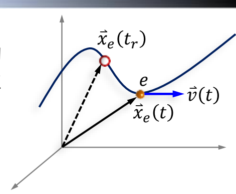
CH8. 点电荷的辐射

§ 1 运动点电荷的势与场

一、运动点电荷的电磁势

按照经典力学原理，若质点受到了外力的作用，则其将沿某个确定的轨道作加速运动。现在把某带电粒子 e 看成质点，设其沿某特定轨道运动，位矢与速度分别为

$$\vec{x}_e = \vec{x}_e(t), \quad \vec{v}(t) = d\vec{x}_e(t)/dt$$



运动电荷将在周围空间激发电磁场。

- 由于电磁相互作用传播速度的有限性，位于场点 $\vec{x}$ 处的观测者在时刻 t 测量的电磁势应是带电粒子在较早时刻激发的。
- 本节的目的是**计算以任意给定方式运动的带电粒子在任一时空点所激发的电磁势和电磁场。**

运动点电荷的电荷密度与电流体密度为

$$\rho(t,\vec{x}) = e\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_e(t)), \quad \vec{J}(t,\vec{x}) = e\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_e(t))$$

将其代入推迟势的表达式，即可给出洛伦茨规范下，该点电荷所激发的电磁势：

$$\begin{cases} \varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int d^3x' \, \dfrac{\rho(t-\mathbb{R}/c,\vec{x}')}{\mathbb{R}} \\ \vec{A}(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int d^3x' \, \dfrac{\vec{J}(t-\mathbb{R}/c,\vec{x}')}{\mathbb{R}} \end{cases}$$

其中

$$t_r \triangleq t - \frac{\mathbb{R}}{c} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} = t_r(t,|\vec{x}-\vec{x}'|)$$

运动点电荷电磁势的推导

为简化推导，将标量势表达式重新写为：

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \int_{-\infty}^{+\infty} ds \, \frac{\overbrace{\boxed{\rho(s,\vec{x}')}}^{e\delta^3(\vec{x}'-\vec{x}_e(s))}}{\mathbb{R}} \delta\left(s - t + \frac{\boxed{\mathbb{R}}}{c}\right) \qquad \vec{\mathbb{R}} = \vec{x} - \vec{x}'$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int ds \, \frac{1}{\mathbb{R}} \delta\left(s - t + \frac{\boxed{\mathbb{R}}}{c}\right) \quad \vec{\mathbb{R}} = \vec{x} - \vec{x}_e(s) = \vec{\mathbb{R}}(s,\vec{x})$$

其中，δ 函数的宗量随 s 的变化率为

$$g \triangleq \frac{\partial}{\partial s}\left(s - t + \frac{\mathbb{R}}{c}\right) = 1 + \frac{1}{c}\underbrace{\boxed{\frac{\partial\vec{\mathbb{R}}}{\partial s}}}_{-\vec{v}(s)} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial\mathbb{R}}{\partial\vec{\mathbb{R}}}}}_{\hat{\mathbb{R}}} = 1 - \hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{\beta}(s) \boxed{> 0}$$

带电粒子 $m \neq 0$

$$\delta(f(s)) = \sum\nolimits_n \frac{\delta(s-x_n)}{|f'(s_n)|}$$

- $g = 1 - \hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{\beta}(s) > 0$ 意味着 δ 函数的宗量随着 s 单调增加，因而宗量至多只有一个（简单）零点。
  - **若 δ 函数的宗量无零点，则时空点 $(t,\vec{x})$ 处的势为零。**
  - **若 δ 函数的宗量有零点 $s = t^*$，则该零点由下式所定义：**

$$t^* = t - \frac{\mathbb{R}^*}{c} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_e(t^*)|}{c}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(t,\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int ds \, \frac{1}{g\mathbb{R}}\delta(s-t^*) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 g^* \mathbb{R}^*}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\varphi(t,\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mathbb{R}^* - \vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{\beta}^*}}$$

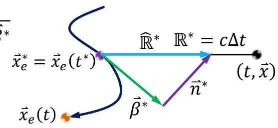
带“*”诸量均在推迟时刻 t^* 取值。

- 类似有 $\vec{A}(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0 e \vec{v}^*}{4\pi}\dfrac{1}{\mathbb{R}^* - \vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{\beta}^*} \Longrightarrow \boxed{\vec{A}(t,\vec{x}) = \dfrac{\vec{v}^*}{c^2}\varphi(t,\vec{x})}$

1. 李纳-维谢尔势

运动带电粒子所激发的电磁势称为**李纳–维谢尔势**：

$$\begin{cases}\varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\mathbb{R}^* - \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*} \\ \vec{A}(t,\vec{x}) = \dfrac{\vec{v}^*}{c^2}\varphi(t,\vec{x})\end{cases}$$



- 带"$*$"诸量均是在推迟时刻 t^* 的数值，而 t^* 的定义则为：

$$t^* \triangleq t - \frac{\mathbb{R}^*}{c} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_e^*|}{c} \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{R}^* = c\Delta t = c(t-t^*)$$

- 若定义 $\vec{n}^* \triangleq \hat{\mathbb{R}}^* - \vec{\beta}^*$，则可将李纳–维谢尔势写为：

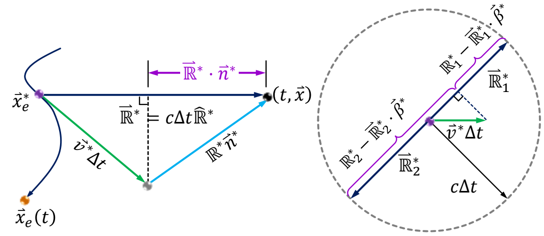
$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*},\qquad \vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\vec{v}^*}{c^2}\varphi(t,\vec{x})$$

7

几何因子的含义

时空点 $(t,\vec{x})$ 处的李纳–维谢尔势与如下距离成反比：

$$\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^* = \mathbb{R}^* - \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^* = \hat{\mathbb{R}}^*\cdot\boxed{\mathbb{R}^*\vec{n}^*}\qquad c\Delta t\vec{n}^* = c\Delta t\hat{\mathbb{R}}^* - \vec{v}^*\Delta t$$



8

低速极限

对于缓慢运动电荷（$\beta \ll 1$），由于

$$\vec{n}^* \triangleq \hat{\mathbb{R}}^* - \vec{\beta}^* \approx \hat{\mathbb{R}}^*$$

因而

$$\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^* \approx \mathbb{R}^*$$

而李纳–维谢尔势则表示为了

$$\varphi(t,\vec{x}) \approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}^*},\qquad \vec{A}(t,\vec{x}) \approx \frac{\mu_0 e\vec{v}^*}{4\pi\mathbb{R}^*}$$

其形式上分别与静止点电荷 e 激发的静电势、电流元 $Id\vec{l} = e\vec{v}^*$ 激发的矢量势相似，但却保留了推迟效应。

9

2. 推迟时间

- 推迟时间 t^* 的定义为（其中 $\Delta t \triangleq t - t^* > 0$）：

$$\mathbb{R}^* = c(t-t^*) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{|\vec{x}-\vec{x}_e^*| = c\Delta t}$$

  - 求解此代数方程，可将 t^* 表示为时空坐标 $(t,\vec{x})$ 的函数

$$t^* = t - \mathbb{R}^*/c = t^*(t,\vec{x})$$

  - 若此方程无解，则 $(t,\vec{x})$ 处的李纳–维谢尔势为零。
- 一旦确定了 t^*，t^* 时刻粒子的速度、加速度以及该时刻粒子与场点的相对距离和相对位矢也就确定了：

$$\begin{cases}\vec{v}^* = \vec{v}(t^*) = \vec{v}(t,\vec{x}), & \mathbb{R}^* = c(t-t^*) = \mathbb{R}^*(t,\vec{x}) \\ \vec{a}^* = \vec{a}(t^*) = \vec{a}(t,\vec{x}), & \vec{\mathbb{R}}^* = \vec{x} - \vec{x}_e(t^*) = \vec{\mathbb{R}}^*(t,\vec{x})\end{cases}$$

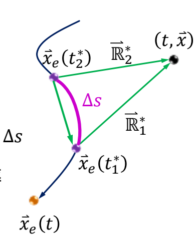
  - 上述诸量均是 $(t,\vec{x})$ 的函数。

10

与特定时空点对应的推迟时间至多只有一个

反证法：假设对于时空点 $(t,\vec{x})$，t_1^* 和 t_2^* 均为与之相联系的推迟时间，即有

$$c(t-t_1^*) = \mathbb{R}_1^*,\quad c(t-t_2^*) = \mathbb{R}_2^*$$



由此可得

$$c|t_2^*-t_1^*| = |\mathbb{R}_2^*-\mathbb{R}_1^*| \le \left|\vec{\mathbb{R}}_2^*-\vec{\mathbb{R}}_1^*\right| \le \Delta s$$

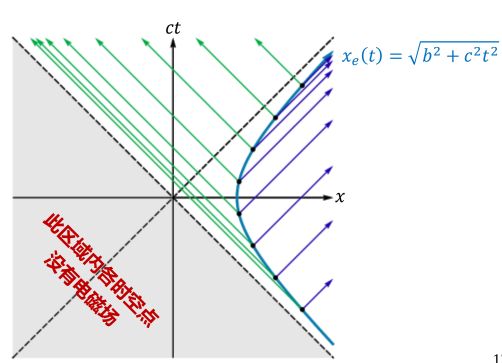
故在两推迟时间之间，粒子的平均速率

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta s}{|t_2^*-t_1^*|} \ge c$$

与带电粒子的速度小于真空中光速这一实验事实不符。

11

不存在推迟时间的一个例子



12

二、运动点电荷的电磁场

将李纳–维谢尔势代入电磁势定义，可得点电荷激发的电磁场

$$\begin{cases}\varphi(t,\vec{x})=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}\\[2ex] \vec{A}(t,\vec{x})=\dfrac{\vec{\beta}^*}{c}\varphi(t,\vec{x})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{E}=-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$$

- 此处难点在于：时空坐标 $(t,\vec{x})$ 以隐变量的形式出现在推迟时间的表达式中，因而对时空坐标求导的函数具有如下形式
  $$f=f(t^*(t,\vec{x}),\vec{x})$$
  - 数学方法：莱布尼兹法则、链式法则。
- 数学上的关键在于求出 t^* 对 t 和 $\vec{x}$ 的导数。
  - 求解方法：关系 $\left|\vec{\mathbb{R}}^*\right|=\mathbb{R}^*$ 亦即 $|\vec{x}-\vec{x}_e^*|=c(t-t^*)$。

13

推迟时间及其他中间变量的导数

$$\vec{x}_e^*=\vec{x}_e(t^*)\quad\Rightarrow\quad\partial_t\vec{x}_e^*=\vec{\beta}^*c\partial_t t^*,\qquad\nabla\vec{x}_e^*=(\nabla t^*)\vec{\beta}^*c$$

$$\vec{\beta}^*=\vec{\beta}(t^*)\quad\Rightarrow\quad\partial_t\vec{\beta}^*=\dot{\vec{\beta}}^*\partial_t t^*,\qquad\nabla\vec{\beta}^*=(\nabla t^*)\dot{\vec{\beta}}^*$$

$$\mathbb{R}^*=c(t-t^*)\Rightarrow\quad\partial_t\mathbb{R}^*=c(1-\partial_t t^*),\qquad\nabla\mathbb{R}^*=-c\nabla t^*$$

$$\vec{\mathbb{R}}^*=\vec{x}-\vec{x}_e^*\quad\Rightarrow\quad\partial_t\vec{\mathbb{R}}^*=-\vec{\beta}^*c\partial_t t^*,\qquad\nabla\vec{\mathbb{R}}^*=\overleftrightarrow{I}-(\nabla t^*)\vec{\beta}^*c$$

$$\mathbb{R}^{*2}=\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\mathbb{R}}^*\Rightarrow\quad\partial_t t^*=\frac{\mathbb{R}^*}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*},\quad c\nabla t^*=-\frac{\vec{\mathbb{R}}^*}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}=-\hat{\mathbb{R}}^*\partial_t t^*$$

$$\frac{1}{2}\partial_t\mathbb{R}^{*2}=\mathbb{R}^*\partial_t\mathbb{R}^*=\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\partial_t\vec{\mathbb{R}}^*\quad\Rightarrow\quad\mathbb{R}^*c(1-\partial_t t^*)=-\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*\right)c\partial_t t^*$$

$$\frac{1}{2}\nabla\mathbb{R}^{*2}=\mathbb{R}^*\nabla\mathbb{R}^*=\left(\nabla\vec{\mathbb{R}}^*\right)\cdot\vec{\mathbb{R}}^*\quad\Rightarrow\quad-\mathbb{R}^*c\nabla t^*=\vec{\mathbb{R}}^*-\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*\right)c\nabla t^*$$

14

$\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*=\mathbb{R}^*-\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*$ 的导数

$$\begin{cases}\partial_t t^*=\dfrac{\mathbb{R}^*}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}\\ c\nabla t^*=-\hat{\mathbb{R}}^*\partial_t t^*\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\nabla\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)&=\nabla\mathbb{R}^*-\left(\nabla\vec{\mathbb{R}}^*\right)\cdot\vec{\beta}^*-\left(\nabla\vec{\beta}^*\right)\cdot\vec{\mathbb{R}}^*\\&=-c\nabla t^*-\left[\overleftrightarrow{I}-(\nabla t^*)\vec{\beta}^*c\right]\cdot\vec{\beta}^*-\left[(\nabla t^*)\dot{\vec{\beta}}^*\right]\cdot\vec{\mathbb{R}}^*\\&=-\vec{\beta}^*-c\nabla t^*\left(1-\beta^{*2}+\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\dot{\vec{\beta}}^*/c\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)&=\partial_t\mathbb{R}^*-\left(\partial_t\vec{\mathbb{R}}^*\right)\cdot\vec{\beta}^*-\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\partial_t\vec{\beta}^*\\&=c(1-\partial_t t^*)-\left(-\vec{\beta}^*c\partial_t t^*\right)\cdot\vec{\beta}^*-\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\left(\dot{\vec{\beta}}^*\partial_t t^*\right)\\&=c-c\partial_t t^*\left(1-\beta^{*2}+\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\dot{\vec{\beta}}^*/c\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad\left(\nabla+\frac{\vec{\beta}^*}{c}\partial_t\right)\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)=\underbrace{\boxed{\left(1-\beta^{*2}+\frac{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{a}^*}{c^2}\right)}}_{\xi}\frac{\mathbb{R}^*\vec{n}^*}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}$$

15

由电磁势求电磁场

$$\begin{cases}\varphi=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}\\ \vec{A}=\dfrac{\vec{\beta}^*}{c}\varphi\end{cases}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}=-\nabla\varphi-\frac{\vec{\beta}^*}{c}\partial_t\varphi-\frac{\varphi}{c}\partial_t\vec{\beta}^*$$

$$=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^2}\boxed{\left(\nabla+\frac{\vec{\beta}^*}{c}\partial_t\right)\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)}-\frac{\dot{\vec{\beta}}^*\boxed{\partial_t t^*}}{c\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}\right]\quad\frac{\mathbb{R}^*}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}$$

$$=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\xi\frac{\mathbb{R}^*\vec{n}^*}{\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}-\frac{\mathbb{R}^*\vec{a}^*}{c^2\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^2}\right]\quad\xi\frac{\mathbb{R}^*\boxed{\vec{n}^*}}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{c}\left[\nabla\varphi\times\vec{\beta}^*+\varphi\nabla\times\vec{\beta}^*\right]$$

$$\boxed{\vec{n}^*}-\hat{\mathbb{R}}^*\qquad-\frac{\hat{\mathbb{R}}^*}{c}\partial_t t^*$$

$$=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{1}{\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^2}\boxed{\nabla\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)}\times\boxed{\left(-\vec{\beta}^*\right)}+\frac{\boxed{\nabla t^*}\times\dot{\vec{\beta}}^*}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}\right]=\frac{\hat{\mathbb{R}}^*\times\vec{E}}{c}$$

$$\rightarrow\left(\nabla+\frac{\vec{\beta}^*}{c}\partial_t\right)\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)$$

16

$$\vec{E}=\frac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\left[\xi\vec{n}^*-\frac{\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)\vec{a}^*}{c^2}\right]$$

$$=\frac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\left[\left(1-\beta^{*2}+\frac{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{a}^*}{c^2}\right)\vec{n}^*-\frac{\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)\vec{a}^*}{c^2}\right]$$

$$=\frac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\left[(1-\beta^{*2})\vec{n}^*+\frac{\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{a}^*\right)\vec{n}^*-\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)\vec{a}^*}{c^2}\right]$$

$$=\frac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\left[(1-\beta^{*2})\vec{n}^*+\frac{\vec{\mathbb{R}}^*\times(\vec{n}^*\times\vec{a}^*)}{c^2}\right]$$

17

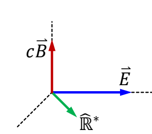
李纳–维谢尔场

综上，点电荷激发的电磁场、亦即**李纳–维谢尔场**为

$$\begin{cases}\vec{E}(t,\vec{x})=\dfrac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\left[(1-\beta^{*2})\vec{n}^*+\dfrac{\vec{\mathbb{R}}^*\times(\vec{n}^*\times\vec{a}^*)}{c^2}\right]\\[3ex] c\vec{B}(t,\vec{x})=\hat{\mathbb{R}}^*\times\vec{E}(t,\vec{x})\end{cases}$$

- 在任一时空点 $(t,\vec{x})$ 电磁场都满足

  $\vec{E}\cdot\vec{B}=0,\quad\hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{B}=0,\qquad\hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{E}\neq 0$



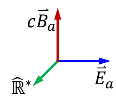
- 点电荷在每个时空点所激发的电磁场总是类电场（$E>cB$）

18

- 可将电磁场分解为速度场 $\left(\vec{E}_v,\vec{B}_v\right)$ 和加速度场 $\left(\vec{E}_a,\vec{B}_a\right)$:

$$\vec{E}=\vec{E}_v+\vec{E}_a,\quad \vec{B}=\vec{B}_v+\vec{B}_a=\frac{\mathbb{R}^*\times\vec{E}_v}{c}+\frac{\mathbb{R}^*\times\vec{E}_a}{c}$$

其中
$$\begin{cases}\vec{E}_v=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}^{*2}}\dfrac{(1-\beta^{*2})\vec{n}^*}{\left(\mathbb{R}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\\[2ex] \vec{E}_a=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2\mathbb{R}^*}\dfrac{\mathbb{R}^*\times(\vec{n}^*\times\vec{a}^*)}{\left(\mathbb{R}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\end{cases}$$



- 速度场（自场）$\sim 1/\mathbb{R}^{*2}$，而加速度场（辐射场）$\sim 1/\mathbb{R}^*$。
- 加速度场：$\left(\vec{E}_a,\vec{B}_a,\mathbb{R}^*\right)$ 构成右手正交系，且 $E_a=cB_a$。

19

【例】求以速度 $\vec{v}$ 匀速运动的点电荷激发的电磁势与电磁场。

【方法一】设点电荷初始时位于原点，轨道为 $\vec{x}_e(t)=\vec{v}t$。

设 $\vec{R}\triangleq\vec{x}-\vec{\beta}ct$ 是场点相对于粒子目前位置的位矢，则

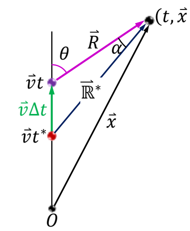
$$\boxed{\mathbb{R}^*\vec{n}^*=\vec{R}}\quad\Rightarrow\quad \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*=R\cos\alpha$$

考察场点、粒子推迟位置和目前位置所围三角形，利用正弦定理得到

$$\beta=\frac{v}{c}=\frac{v\Delta t}{c\Delta t}=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow\quad \sin\alpha=\beta\sin\theta$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*=R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}$$



20

由此得到，匀速运动点电荷的李纳-维谢尔势为

$$\begin{cases}\varphi(t,\vec{x})=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\mathbb{R}^*\cdot\vec{n}^*}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0R}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}\\[2ex] \vec{A}(t,\vec{x})=\dfrac{\vec{v}^*}{c^2}\varphi(t,\vec{x})=\dfrac{\mu_0e\vec{v}}{4\pi R}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}\end{cases}$$

匀速运动点电荷激发的电磁场只有速度场，为

$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(1-\beta^{*2})\mathbb{R}^*\boxed{\vec{n}^*}}{(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*)^3}=\dfrac{e\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0R^2}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\\[2ex] \vec{B}=\dfrac{1}{c}\overset{\boxed{\vec{n}^*}+\vec{\beta}^*}{\boxed{\mathbb{R}^*}}\times\vec{E}=\dfrac{1}{c}\vec{\beta}^*\times\vec{E}=\dfrac{\mu_0e\vec{v}\times\hat{R}}{4\pi R^2}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\end{cases}$$

$$\mathbb{R}^*\vec{n}^*=\vec{R},\quad \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*=R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}$$

21

【方法二】（更为正规、适合于一般情形的求解）

- 首先，由如下代数方程求推迟时间 t^*:

$$\mathbb{R}^*=c(t-t^*)\quad\Leftrightarrow\quad |\vec{x}-\vec{x}_e(\overset{t-\Delta t}{\boxed{t^*}})|=c\Delta t>0$$

➢ 对于匀速运动点电荷，其中 $\vec{\mathbb{R}}^*=\vec{x}-\vec{x}_e(t^*)$ 可写为

$$\vec{\mathbb{R}}^*=\vec{x}-\vec{\beta}ct^*=\underbrace{\boxed{(\vec{x}-\vec{\beta}ct)}}_{\vec{R}}+\vec{\beta}c(t-t^*)=\vec{R}+\vec{\beta}c\Delta t$$

$$\left|\vec{R}+\vec{\beta}c\Delta t\right|=c\Delta t$$

$$\Rightarrow\quad (1-\beta^2)(c\Delta t)^2-2\left(\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right)c\Delta t-R^2=0$$

$$\Rightarrow\quad c\Delta t=\frac{\vec{R}\cdot\vec{\beta}+\overset{R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}{\boxed{\sqrt{\left(\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right)^2+(1-\beta^2)R^2}}}}{1-\beta^2}$$

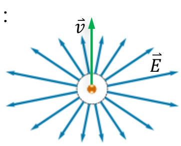
（另一解不符合条件 $c\Delta t>0$）

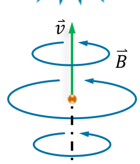
22

- 其次，求两个中间变量 $\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*$ 和 $\mathbb{R}^*\vec{n}^*$:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*&=\overset{c\Delta t}{\boxed{\mathbb{R}^*}}-\overset{\vec{R}+\vec{\beta}c\Delta t}{\boxed{\vec{\mathbb{R}}^*}}\cdot\vec{\beta}^*\\&=(1-\beta^2)c\Delta t-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\\&=R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}\end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^*\vec{n}^*=\overset{\vec{R}+\vec{\beta}c\Delta t}{\boxed{\vec{\mathbb{R}}^*}}-\overset{c\Delta t}{\boxed{\mathbb{R}^*}}\vec{\beta}^*=\vec{R}$$





- 最后，将所得结果代入李纳维谢尔势与场中，即得匀速运动点电荷激发的电磁势和电磁场，结果与第一种方法相同。

$$c\Delta t=\frac{\vec{R}\cdot\vec{\beta}+R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}{1-\beta^2}$$

23

【思考】点电荷 e 被限制在 x 轴上运动。证明:

（1）场点位于点电荷右侧　目前还是推迟时刻点电荷的右侧?

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}^{*2}}\frac{1+\beta^*}{1-\beta^*}\hat{x},\quad \vec{B}=0$$

（2）场点位于点电荷左侧　目前还是推迟时刻点电荷的右侧?

$$\vec{E}=\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}^{*2}}\frac{1-\beta^*}{1+\beta^*}\hat{x},\quad \vec{B}=0$$

【思考】在 x 轴上运动的点电荷 e，其位置与时间满足

$$x(t)=\sqrt{b^2+c^2t^2}$$

试确定该点电荷在 x 轴上激发的电磁场。

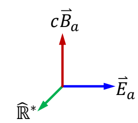
24

§ 2 点电荷的辐射功率

一、辐射场

加速运动伴随着辐射，即存在可以脱离粒子的电磁场

$$
\begin{cases}
\vec{E}_a = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \mathbb{R}^*}\dfrac{\mathbb{R}^* \times \left(\overbrace{\boxed{\vec{n}^*}}^{\mathbb{R}^* - \vec{\beta}^*} \times \vec{a}^*\right)}{\Big(\underbrace{\boxed{\mathbb{R}^* \cdot \vec{n}^*}}_{1 - \mathbb{R}^* \cdot \vec{\beta}^*}\Big)^3} \\
c\vec{B}_a = \mathbb{R}^* \times \vec{E}_a
\end{cases}
$$



- 辐射场的 $\vec{E}_a$、$\vec{B}_a$ 和 $\mathbb{R}^*$ 构成右手正交系，且 $E_a = cB_a$。
- 辐射场的能量密度 $w = \varepsilon_0 E_a^2$ 和能流密度 $\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E}_a \times \vec{B}_a$ 为

$$
w = \frac{e_s^2}{4\pi c^4 \mathbb{R}^{*2}} \frac{\left|\mathbb{R}^* \times (\vec{n}^* \times \vec{a}^*)\right|^2}{(\mathbb{R}^* \cdot \vec{n}^*)^6}, \quad \vec{S} = wc\mathbb{R}^* \quad \left(e_s^2 \triangleq \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)
$$

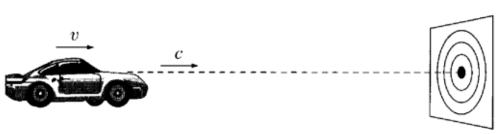
二、辐射功率

- 有两个不同的角度定义加速运动点电荷的辐射功率。

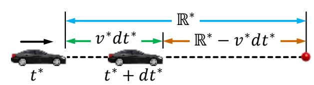
  接收功率： 远处的观测者在单位时间接收到的电磁场能量。

  发射功率： 由点电荷附近的观测者所测得的、点电荷由于辐射而在单位时间所损失的能量。

  ➢ 此处“单位时间”都是在实验室系中测量的。



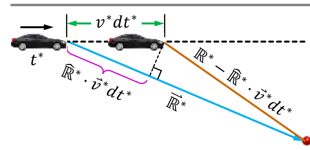
- N_g：单位时间发射的光子数，
  N_t：单位时间接受（打到靶上）的光子数。



$t = t^* + \mathbb{R}^*/c$

$t + dt = t^* + dt^* + (\mathbb{R}^* - v^*dt^*)/c$

$N_g dt^* = N_t dt \;\Rightarrow\; N_g = N_t(1 - \beta^*) \;\Rightarrow\; dt = (1 - \beta^*)dt^*$



$t = t^* + \mathbb{R}^*/c$

$t + dt = t^* + dt^* + (\mathbb{R}^* - \mathbb{R}^* \cdot \vec{v}^* dt^*)/c$

$N_g dt^* = N_t dt \;\Rightarrow\; N_g = N_t(\mathbb{R}^* \cdot \vec{n}^*) \;\Rightarrow\; dt = \left(1 - \mathbb{R}^* \cdot \vec{\beta}^*\right) dt^*$

接收功率

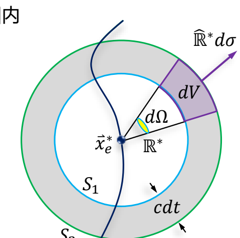
粒子在 t^* 时刻发出的信号在 $t = t^* + \mathbb{R}^*/c$ 时刻传播至球面 S_1。

接下来 dt 时间内，立体角 $d\Omega$ 范围内通过球面流出去的能量为

$$
dW = \left(\vec{S} \cdot d\vec{\sigma}\right) dt = \left(\vec{S} \cdot \mathbb{R}^*\right) \mathbb{R}^{*2} dt d\Omega
$$

因而，接收功率角分布为

$$
\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\text{接受}} = \frac{dW}{dt d\Omega} = S\mathbb{R}^{*2}
$$



注： 由 $\vec{S} = wc\mathbb{R}^*$ 知：**dW = t 时刻 S_1 和 S_2 之间的电磁能量。**

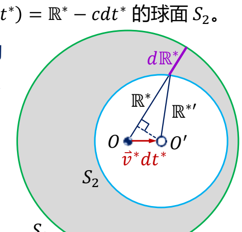
发射功率

设粒子在 t^* 时刻位于 O 点，瞬时速度为 $\vec{v}^*$；该时刻激发的电磁场在 t 时刻影响至半径为 $\mathbb{R}^* = c(t - t^*)$ 的球面 S_1。

在 $t^* + dt^*$ 时刻，粒子到达 O' 点；该时刻激发的电磁场在 t 时刻影响至半径为 $\mathbb{R}^{*\prime} = c(t - t^* - dt^*) = \mathbb{R}^* - cdt^*$ 的球面 S_2。

在 dt^* 时间间隔内，粒子所辐射的能量，就是在 t 时刻位于球面 S_1 和 S_2 之间的电磁场能量。

$$
\begin{aligned}
d\mathbb{R}^* &= \mathbb{R}^* - \mathbb{R}^{*\prime} - \mathbb{R}^* \cdot (\vec{v}^* dt^*) \\
&= \left(1 - \mathbb{R}^* \cdot \vec{\beta}^*\right) cdt^* \\
&= (\mathbb{R}^* \cdot \vec{n}^*) cdt^*
\end{aligned}
$$



在 dt^* 时间间隔内，粒子在立体角 $d\Omega$ 范围内所辐射的能量为

$$dW = w \cdot \mathbb{R}^{*2} d\Omega \cdot d\mathbb{R}^* = S\mathbb{R}^{*2}(\hat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*)dt^* d\Omega$$

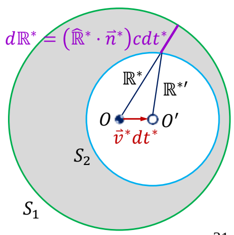
单位时间内粒子发射功率的角分布为

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{发射} = \frac{dW}{dt^* d\Omega} = S\mathbb{R}^{*2}(\hat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*)$$

● 事实上，由于

$$\frac{dW}{dt^* d\Omega} = \overbrace{\boxed{\frac{\partial t}{\partial t^*}}}^{\hat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*} \frac{dW}{dt d\Omega}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{发射} = \left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{接受} (\hat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*)$$



31

本课程中辐射功率指的是发射功率

● 粒子在任一时刻的**辐射功率角分布**为

$$\frac{dP}{d\Omega} = S\mathbb{R}^2(\hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{n}) = \frac{e_s^2}{4\pi c^3} \frac{\left|\hat{\mathbb{R}} \times (\vec{n} \times \vec{a})\right|^2}{(\hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{n})^5}$$

➢ 此处及之后均略去表示推迟时间的“$*$”。

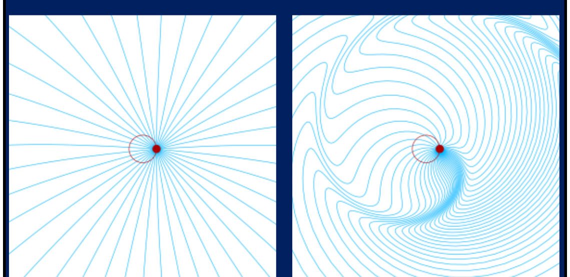
➢ 任一时刻粒子的辐射功率是由该时刻的 v 和 a 决定的，这里没有推迟的关系。

● **辐射总功率**为

$$P = \oint \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$$

32

§ 3 非相对论点电荷的辐射



$\beta = 0.1$ $\beta = 0.6$

33

● 本节讨论非相对论的带电粒子（$\beta \ll 1$）的辐射。

➢ 金属导体中的自由电子、原子中的电子、原子核中的质子都满足这个条件。

➢ 等离子体中的带电粒子通常也满足这个条件。

● 先考察带电粒子做简谐振动的情况。粒子坐标为

$$\vec{x} = \vec{A}\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -\omega\vec{A}\sin\omega t$$

➢ 非相对论条件

$$\beta = v/c \ll 1 \quad \Rightarrow \quad A \ll \overbrace{\boxed{c/\omega}}^{\lambda/2\pi} \quad \Rightarrow \quad A \ll \overbrace{\boxed{\lambda}}^{辐射波的波长}$$

● 可见，**非相对论带电粒子的辐射场应该就是前面小场源近似下的电偶极辐射。**

➢ 这一结论也可从点电荷的辐射场直接证明。

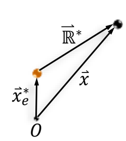
34

一、非相对论点电荷的辐射

对于非相对论的带电粒子，由于 $\beta \ll 1$，因而

$$\vec{n}^* \triangleq \hat{\mathbb{R}}^* - \vec{\beta}^* \approx \hat{\mathbb{R}}^*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^* \approx 1 \\ \hat{\mathbb{R}}^* \times (\vec{n}^* \times \vec{a}^*) \approx \overbrace{\boxed{\hat{\mathbb{R}}^* \times (\hat{\mathbb{R}}^* \times \vec{a}^*)}}^{(\vec{a}^* \times \hat{\mathbb{R}}^*) \times \hat{\mathbb{R}}^*} \end{cases}$$



因此辐射场为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{(e\vec{a}^* \times \hat{\mathbb{R}}^*) \times \hat{\mathbb{R}}^*}{\mathbb{R}^*} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{(\ddot{\vec{p}}^* \times \hat{\mathbb{R}}^*) \times \hat{\mathbb{R}}^*}{\mathbb{R}^*}$$

这里 $\vec{p}^*$ 是粒子在 $t^* = t - \mathbb{R}^*/c$ 时刻相对于原点 O 的电偶极矩，而 $\ddot{\vec{p}}^*$ 则是 $\vec{p}^*$ 在 t^* 时刻的二阶导数

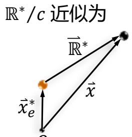
$$\vec{p}^* = e\vec{x}_e^* = e\vec{x}_e(t^*), \qquad \ddot{\vec{p}}^* = e\vec{a}^*$$

35

● 在任一特定时刻，$r^* = |\vec{x}_e^*|$ 是确定的有限数值，$r = |\vec{x}|$ 最终是要趋于无穷的，故 $\vec{\mathbb{R}}^* = \vec{x} - \vec{x}_e^*$ 和 $t^* = t - \mathbb{R}^*/c$ 近似为

$$\vec{\mathbb{R}}^* \approx \vec{x}, \qquad t^* \approx t - \frac{r}{c} \triangleq t_r$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{(\ddot{\vec{p}}_r \times \hat{r}) \times \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}, \qquad c\vec{B} = \frac{\ddot{\vec{p}}_r \times \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$



这里 $\vec{p}_r$ 和 $\ddot{\vec{p}}_r$ 分别是 t_r 时刻的电矩及其二阶导数。

➢ **对于非相对论的点电荷，其辐射场的主要贡献就是小场源近似下的电偶极辐射。**

➢ t_r 时刻非相对论点电荷的瞬时辐射功率的角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\left|\ddot{\vec{p}}_r \times \hat{r}\right|^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\left|\ddot{\vec{p}}_r\right|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{2e_s^2 a^2}{3c^3}$$

此处**瞬时**辐射功率是之前所得谐振电流下电偶极**平均**辐射功率的两倍

36

非相对论点电荷系统的辐射场

对于非相对论带电粒子构成的孤立体系，总的电偶极矩为

$$\vec{p}(t)=\sum e_n\vec{x}_n(t)=\sum\frac{e_n}{m_n}m_n\vec{x}_n(t)$$

系统在 t 时刻激发的辐射场、辐射功率角分布和总辐射功率为

$$\vec{E}=\frac{\left(\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right)\times\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0c^2r},\quad \frac{dP}{d\Omega}=\frac{\left|\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right|^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3},\quad P=\frac{\left|\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right|^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}$$

- 若所有粒子都具有相同的荷质比（设为 e/m），那么

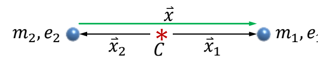
$$\vec{p}(t)=\frac{e}{m}\cdot M\vec{X}_C(t)\qquad\begin{cases}M=\sum m_n\\ \vec{X}_C=\sum m_n\vec{x}_n/M\end{cases}\ \text{质心匀速运动}$$

由荷质比相同的非相对论带电粒子构成的孤立体系，不会有辐射（电偶极辐射）。

37

二、两个点电荷构成的体系

考察两个带电粒子构成的体系，设粒子的速度远小于光速。整体匀速运动并不引起辐射，故只需研究粒子的相对运动。



约化质量 $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

以质心作为原点 $\quad\vec{x}_1-\vec{x}_2\triangleq\vec{x},\qquad m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2=0$

$$\Rightarrow\quad \vec{x}_1\triangleq+\frac{\mu}{m_1}\vec{x},\qquad \vec{x}_2\triangleq-\frac{\mu}{m_2}\vec{x}$$

体系的电偶极矩 $\quad\vec{p}=e_1\vec{x}_1+e_2\vec{x}_2=\mu\left(\dfrac{e_1}{m_1}-\dfrac{e_2}{m_2}\right)\vec{x}$

$$\Rightarrow\quad P=\frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}=\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{\mu^2\left|\ddot{\vec{x}}\right|^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}$$

38

相对运动

质心系中，粒子 e_1 的运动方程为（其中 $\vec{x}_1=\mu\vec{x}/m_1$）

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_0r^3}\vec{x}=\mp\frac{\alpha}{r^2}\hat{r},\quad \text{where}\ \ \alpha=\frac{|e_1e_2|}{4\pi\varepsilon_0}\qquad \begin{matrix}\text{吸引力：负号}\\ \text{排斥力：正号}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow\quad \mu\ddot{\vec{x}}=\mp\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}\quad\Rightarrow\quad P=\frac{\alpha^2}{6\pi\varepsilon_0c^3r^4}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2$$

- 采用平面极坐标，相对运动的轨道方程为

$$r(\theta)=\frac{r_0}{\epsilon\cos\theta\pm1},\quad \text{where}\ \ r_0=\frac{L^2}{\mu\alpha},\ \ \epsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathcal{E}L^2}{\mu\alpha^2}}$$

➢ 其中相对运动的能量和角动量分别为

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\mu v^2\mp\frac{\alpha}{r},\qquad L=\mu r^2\dot{\theta}$$

39

辐射损失

在时间 $t_1\le t\le t_2$ 内，体系由于辐射损失的能量为

$$W=\int_{t_1}^{t_2}Pdt=\frac{\alpha^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\int_{t_1}^{t_2}\frac{\boxed{dt}}{r^4}\qquad \frac{d\theta}{\dot{\theta}}=\frac{\mu r^2d\theta}{L}$$

$$\Rightarrow\quad W=\frac{\mu\alpha^2}{6\pi\varepsilon_0c^3L}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow\quad W=\frac{\mu^3\alpha^4}{6\pi\varepsilon_0c^3L^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\boxed{g}\qquad \int_{\theta_1}^{\theta_2}(\epsilon\cos\theta\pm1)^2d\theta$$

其中 $\quad g=\left[\theta\pm2\epsilon\sin\theta+\dfrac{1}{2}\epsilon^2(\theta+\sin\theta\cos\theta)\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$

$$r(\theta)=\frac{r_0}{\epsilon\cos\theta\pm1},\quad \text{where}\ \ r_0=\frac{L^2}{\mu\alpha},\ \ \epsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathcal{E}L^2}{\mu\alpha^2}}$$

40

椭圆运动（$\mathcal{E}<0$）时的辐射损失

两粒子在库仑吸引力下相对作椭圆运动时，运动一周的时间内

$$g=\left[\theta+2\epsilon\sin\theta+\frac{1}{2}\epsilon^2(\theta+\sin\theta\cos\theta)\right]_0^{2\pi}=\pi\left(2+\overset{1-b^2/a^2}{\boxed{\epsilon^2}}\right)$$

椭圆运动的半通径 $L^2/\mu\alpha=b^2/a$、周期 $T=2\pi\sqrt{\mu a^3/\alpha}$，故

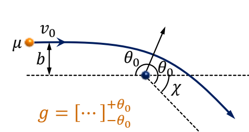
$$\begin{cases}W=\overset{\frac{\mu^3\alpha^4}{6\varepsilon_0c^3L^5}}{\boxed{\dfrac{\sqrt{\mu\alpha^3a^5}}{6\varepsilon_0c^3b^5}}}\left(\dfrac{e_1}{m_1}-\dfrac{e_2}{m_2}\right)^2\boxed{\left(3-\dfrac{b^2}{a^2}\right)}\qquad \left(3-\dfrac{2|\mathcal{E}|L^2}{\mu\alpha^2}\right)\\[2ex] \langle W\rangle=\dfrac{W}{T}=\underset{\frac{\sqrt{2}\mu^{5/2}\alpha^3|\mathcal{E}|^{3/2}}{6\pi\varepsilon_0c^3L^5}}{\boxed{\dfrac{\alpha^2a}{12\pi\varepsilon_0c^3b^5}}}\left(\dfrac{e_1}{m_1}-\dfrac{e_2}{m_2}\right)^2\boxed{\left(3-\dfrac{b^2}{a^2}\right)}\end{cases}$$

41

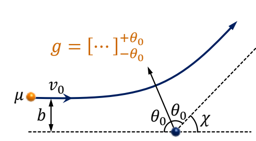
双曲运动（$\mathcal{E}>0$）时的辐射损失

$$\begin{cases}\epsilon^2=1+\dfrac{2\mathcal{E}L^2}{\mu\alpha^2}=1+\left(\dfrac{b\mu v_0^2}{\alpha}\right)^2\\[2ex] \epsilon^2=1+\tan^2\theta_0=1+\cot^2\dfrac{\chi}{2}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\cot\dfrac{\chi}{2}=\dfrac{b\mu v_0^2}{\alpha}=\dfrac{v_0L}{\alpha}\\[2ex] \epsilon\sin\dfrac{\chi}{2}=1\end{cases}$$

$$W=\frac{\mu^3v_0^5}{12\pi\varepsilon_0c^3\alpha}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\tan^3\frac{\chi}{2}\left[(\pi\pm\chi)\left(1+3\tan^2\frac{\chi}{2}\right)\pm6\tan\frac{\chi}{2}\right]$$



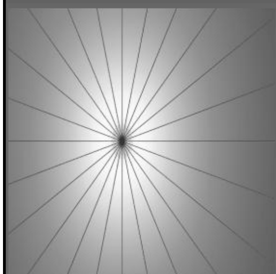
$\cos\theta_0=-1/\epsilon,\quad \chi=2\theta_0-\pi$

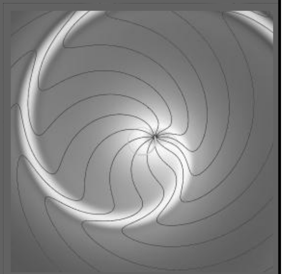


$\cos\theta_0=1/\epsilon,\quad \chi=\pi-2\theta_0$

42

§ 4 相对论点电荷的辐射





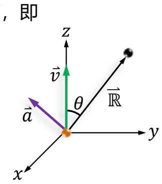
43

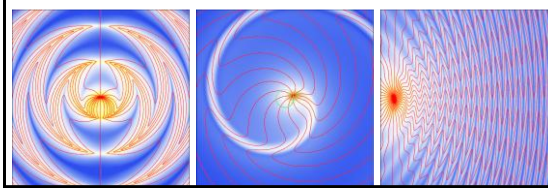
讨论相对论粒子的辐射时，将 $\vec{\beta}$ 方向定义为极轴方向是方便的，并不妨将 $\vec{\beta}$ 和 $\vec{a}$ 所张平面定义为是 xz 平面，即

$$\vec{\beta}=\beta\hat{z},\qquad \vec{a}=a_\perp\hat{x}+a_\parallel\hat{z}$$

$$\Rightarrow\quad \hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{n}=1-\hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{\beta}=1-\beta\cos\theta$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dP}{d\Omega}=\frac{e_s^2}{4\pi c^3}\frac{\left|\hat{\mathbb{R}}\times(\vec{n}\times\vec{a})\right|^2}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$





一、加速度与速度平行

设粒子加速度与速度（反）平行，即

$$\vec{a}=\vec{a}_\parallel=a_\parallel\hat{z}$$

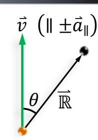
$$\Rightarrow\quad \hat{\mathbb{R}}\times(\underbrace{\boxed{\vec{n}}}_{\hat{\mathbb{R}}-\vec{\beta}}\times\vec{a}_\parallel)=\hat{\mathbb{R}}\times\underbrace{\boxed{(\hat{\mathbb{R}}\times\vec{a}_\parallel)}}_{-a_\parallel\sin\theta\,\hat{\phi}}$$

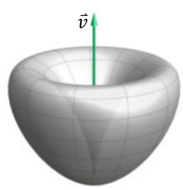
$$\Rightarrow\quad \hat{\mathbb{R}}\times(\vec{n}\times\vec{a}_\parallel)=(a_\parallel\sin\theta)\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dP_\parallel}{d\Omega}=\frac{e_s^2a_\parallel^2}{4\pi c^3}g_\parallel(\theta)$$

这里定义了角度因子

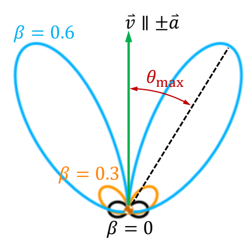
$$g_\parallel(\theta)=\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

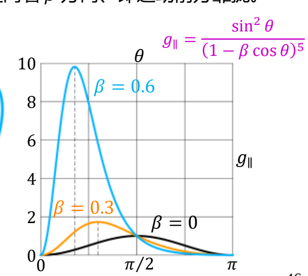




45

- $dP_\parallel/d\Omega\propto a_\parallel^2$，与 $a_\parallel$ 的符号、即与粒子加速或减速无关。
- 运动的正前方（$\theta=0$）和正后方（$\theta=\pi$）没有辐射。
- β 越大，辐射最强方向越向着 $\vec{\beta}$ 方向、即运动前方靠拢。





46

极大辐射方向

辐射最强方向的极角 $\theta_{\max}$ 为 $g_\parallel(\theta)$ 的极值点，满足

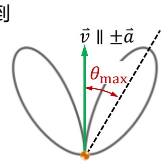
$$\left.\frac{dg_\parallel(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{\max}}=\left.\frac{3\beta\cos^2\theta+2\cos\theta-5\beta}{(1-\beta\cos\theta)^6}\sin\theta\right|_{\theta=\theta_{\max}}=0$$

$$\Rightarrow\quad \cos\theta_{\max}=\frac{\sqrt{1+15\overbrace{\boxed{\beta^2}}^{1-\gamma^{-2}}}-1}{3\beta}=\frac{4\sqrt{1-(15/16)\gamma^{-2}}-1}{3\sqrt{1-\gamma^{-2}}}$$

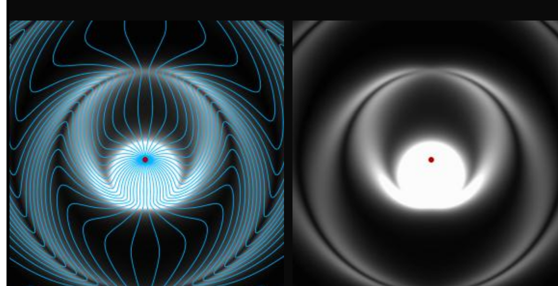
在极端相对论情形，$\gamma\gg1$，保留至 γ^{-2} 得到

$$\cos\theta_{\max}\approx\frac{1}{3}\left[4\left(1-\frac{15}{32\gamma^2}\right)-1\right]\left(1+\frac{1}{2\gamma^2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{\boxed{\cos\theta_{\max}}}_{\approx 1-\theta_{\max}^2/2}\approx1-\frac{1}{8\gamma^2}\quad\Rightarrow\quad \theta_{\max}=\frac{1}{2\gamma}$$



47



48

辐射总功率

$$\boxed{\int_0^\pi g_\parallel(\theta)\sin\theta\, d\theta=\frac{4}{3}\gamma^6,\qquad \oint g_\parallel(\theta)d\Omega=\frac{8\pi}{3}\gamma^6}$$

$$\Rightarrow\quad P_\parallel=\oint\frac{dP_\parallel}{d\Omega}d\Omega=\frac{e_s^2a_\parallel^2}{4\pi c^3}\oint g_\parallel(\theta)d\Omega=\frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2a_\parallel^2}{c^3}\gamma^6$$

- 在直线加速器中（设带电粒子沿着 x 轴运动），由于

$$F\dot{x}=\frac{d\mathcal{E}}{dt}=\frac{d\mathcal{E}}{dx}\dot{x}\quad\Rightarrow\quad F=\frac{dp}{dt}=\gamma^3ma_\parallel=\frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

$$\Rightarrow\quad P_\parallel=\frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2a_\parallel^2}{c^3}\gamma^6=\frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2F^2}{m^2c^3}=\frac{2}{3}\cdot e_s^2c\left(\frac{d}{dx}\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2$$

$$\int_0^\pi g_\parallel(\theta)\sin\theta\, d\theta=\int_0^\pi\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\underbrace{\boxed{\cos\theta}}_{u})^5}\sin\theta\, d\theta=\int_{-1}^{1}\frac{1-u^2}{\underbrace{\boxed{(1-\beta u)}}_{\xi}{}^5}du$$

49

直线加速器中的辐射损失

- 速度一定时，$P_\parallel\propto a_\parallel^2$；加速度一定时，$P_\parallel\propto\gamma^6$。
  - ➢ $P_\parallel$ 是 β 的增函数：当 $\beta\longrightarrow1$ 时，$P_\parallel\longrightarrow\infty$。
- 当 F 一定时，$P_\parallel$ 与粒子的能量（或速度）无关。
- 当 F 一定时，对于不同的带电粒子，$P_\parallel\propto m^{-2}$，因此

$$\frac{P_\parallel(\text{electron})}{P_\parallel(\text{proton})}=\left(\frac{m_p}{m_e}\right)^2\approx3.4\times10^6$$

在同样加速电场作用下，电子的辐射损失比质子要严重得多。

$$P_\parallel=\frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2a_\parallel^2}{c^3}\gamma^6=\frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2F^2}{m^2c^3}=\frac{2}{3}\cdot e_s^2c\left(\frac{d}{dx}\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2$$

50

- 考察直线加速器中的电子。单位时间由于辐射损失的能量与从加速电场获得的能量之比为

$$\xi\triangleq\frac{P_\parallel}{Fv}=\frac{2}{3}\frac{e_s^2F}{m_e^2c^4\beta}=\frac{2}{3}\frac{r_eF}{\beta m_ec^2}$$

其中，r_e 是电子的经典半径

$$r_e\triangleq\frac{e_s^2}{m_ec^2}\approx2.8\text{ fm}$$

所以，在相对论情形（$\beta\approx1$）下，如果 $\xi\sim10^{-10}$，则要求

$$F=eE\sim10^{-11}\ \text{MeV/fm}$$

即要求加速电场

$$E\sim10^{10}\ \text{V/m}$$

对于直线加速器中的带电粒子，即便是电子，辐射损失仍是不重要的，在设计直线加速器时完全可以不考虑辐射损失。

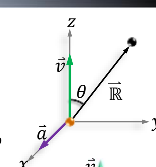
51

二、加速度与速度垂直

如果粒子加速度与速度垂直，则

$$\vec{a}=\vec{a}_\perp=a_\perp\hat{x}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbb{R}\times(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)=\hat{\theta}a_\perp(\beta-\cos\theta)\cos\phi$$
$$+\hat{\phi}a_\perp(1-\beta\cos\theta)\sin\phi$$

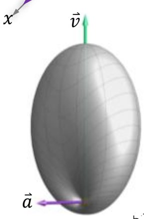


因而

$$\frac{dP_\perp}{d\Omega}=\frac{e_s^2a_\perp^2}{4\pi c^3}g_\perp(\theta,\phi)$$

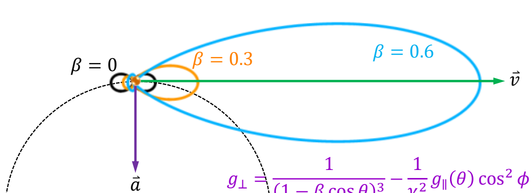
这里定义了角度因子

$$g_\perp(\theta,\phi)=\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}-\frac{1}{\gamma^2}g_\parallel(\theta)\cos^2\phi$$



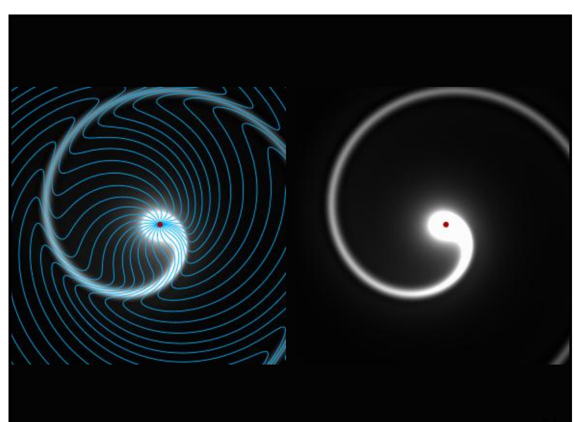
52

- $dP_\perp/d\Omega$ 与 $a_\perp$ 的平方成正比。
- 粒子运动的正前方（$\theta=0$）辐射最强。
- β 越大，辐射越集中于运动正前方。



$$g_\perp=\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}-\frac{1}{\gamma^2}g_\parallel(\theta)\cos^2\phi$$

53



辐射总功率

$$\boxed{\int_0^{\pi} g_{\parallel}(\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\gamma^6, \qquad \oint g_{\perp}(\theta,\phi)d\Omega = \frac{8\pi}{3}\gamma^4}$$

$$\Rightarrow \quad P_{\perp} = \oint \frac{dP_{\perp}}{d\Omega}d\Omega = \frac{e_s^2 a_{\perp}^2}{4\pi c^3}\oint g_{\perp}(\theta,\phi)d\Omega = \frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2 a_{\perp}^2}{c^3}\gamma^4$$

- 在半径为 R 的圆形储存环中匀速圆周运动的带电粒子，由于

$$F = \gamma m a, \qquad a = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2\beta^2}{R}, \qquad \gamma = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_{\perp} = \frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2 a_{\perp}^2}{c^3}\gamma^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2 F^2}{m^2c^3}\gamma^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{e_s^2 c}{R^2}\beta^4\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^3} = \int_{-1}^{1}\frac{du}{(1-\beta u)^3} = 2\gamma^4$$

55

圆形加速器中的辐射损失

- 当 F 一定时，$P_{\perp}$ 随着粒子能量（或速度）的增大而增加。
- 对于确定大小的加速度，$P_{\parallel}/P_{\perp} = \gamma^2$
- 对于确定大小的力，$P_{\parallel}/P_{\perp} = \gamma^{-2}$
- 当 $\mathcal{E}$ 一定时，对于不同的极端相对论粒子，$P_{\perp} \propto m^{-4}$，因此

$$\frac{P_{\perp}(\text{electron})}{P_{\perp}(\text{proton})} = \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1.1\times 10^{13}$$

与质子相比，电子的辐射损失要严重得多。

$$\begin{cases} P_{\parallel} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{e_s^2 a_{\parallel}^2}{c^3}\gamma^6 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{e_s^2F^2}{m^2c^3} = \dfrac{2}{3}\cdot e_s^2 c\left(\dfrac{d}{dx}\dfrac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 \\ P_{\perp} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{e_s^2 a_{\perp}^2}{c^3}\gamma^4 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{e_s^2F^2}{m^2c^3}\gamma^2 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{e_s^2 c}{R^2}\beta^4\left(\dfrac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 \end{cases}$$

56

- 对于做圆周运动的带电粒子，为了维持其速度或能量不变，每周（$T = 2\pi R/v$）外界需要提供的能量就等于辐射损失。
  - 运动一周由于辐射损失的能量与粒子能量之比为

$$\xi \triangleq \frac{P_{\perp}T}{\mathcal{E}} = \frac{4\pi}{3}\frac{e_s^2}{R\cdot mc^2}\beta^3\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$$

  - 在极端相对论情形（$\beta\approx 1$），对于电子和质子分别有

$$\begin{cases} \xi(\text{electron}) \approx 8.85\times 10^{-5}\dfrac{(\mathcal{E}/\text{GeV})^3}{R/\text{m}} \\ \xi(\text{proton}) \approx 7.79\times 10^{-18}\dfrac{(\mathcal{E}/\text{GeV})^3}{R/\text{m}} \end{cases}$$

57

- 若带电粒子圆周运动的半径为 $R = 4.5\times 10^3$ m。由此可得
  - 对于质子，当 $\mathcal{E} = 7$ TeV $= 7000$ GeV 时，

$$\xi(\text{proton}) \approx 5.9\times 10^{-10} \quad \Rightarrow \quad P_{\perp}T \approx 4.2\times 10^3\ \text{eV}$$

  - 对于电子，当 $\mathcal{E} = 7$ TeV $= 7000$ GeV 时

$$\xi(\text{electron}) \approx 6.7\times 10^3$$

此结果当然是荒谬的。当 $\mathcal{E} = 60$ GeV 时

$$\xi(\text{electron}) \approx 0.42\% \quad \Rightarrow \quad P_{\perp}T \approx 250\ \text{MeV}$$

58

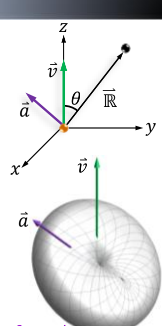
三、一般情形

一般情形下，粒子的加速度为

$$\vec{a} = a_{\perp}\hat{x} + a_{\parallel}\hat{z}$$

由于

$$\hat{\mathbb{R}}\times(\vec{n}\times\vec{a}) = (a_{\parallel}\sin\theta)\hat{\theta}$$
$$+a_{\perp}(\beta-\cos\theta)\cos\phi\,\hat{\theta}$$
$$+a_{\perp}(1-\beta\cos\theta)\sin\phi\,\hat{\phi}$$



因而辐射功率角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP_{\parallel}}{d\Omega} + \frac{dP_{\perp}}{d\Omega} + \frac{e_s^2 a_{\parallel}a_{\perp}}{2\pi c^3}\frac{(\beta-\cos\theta)\sin\theta\cos\phi}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

59

辐射总功率

辐射总功率为：

$$P = \int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega = P_{\parallel} + P_{\perp} = \frac{2e_s^2}{3c^3}\gamma^6\boxed{\left(a_{\parallel}^2 + \frac{a_{\perp}^2}{\gamma^2}\right)}$$

$$a_{\parallel}^2 + (1-\beta^2)a_{\perp}^2 = a^2 - \beta^2 a_{\perp}^2$$

所以，辐射总功率又可以写为

$$P = \frac{2e_s^2}{3c^3}\gamma^6\left(a^2 - \left|\vec{\beta}\times\vec{a}\right|^2\right) = \frac{2e_s^2a^2}{3c^3}\gamma^6\left(1 - \left|\vec{\beta}\times\hat{a}\right|^2\right)$$

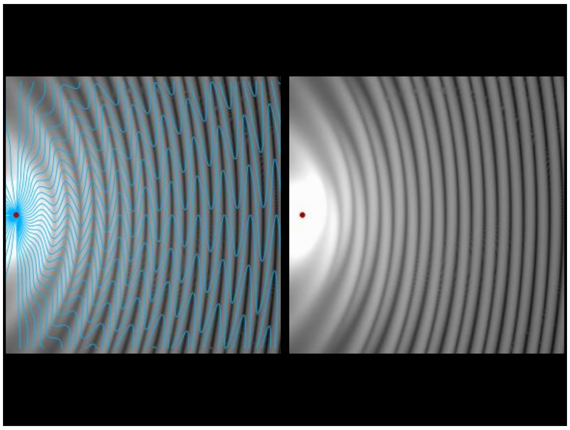
这就是**李纳公式**。

- 对于非相对论粒子，$\beta \ll 1$，$\gamma \approx 1$，因而有

$$P = \frac{2e_s^2a^2}{3c^3}$$

这就是**拉莫尔公式**。

60



辐射总功率的一般推导

设 n_k 和 β_k 分别是 $\hat{\mathbb{R}}$ 和 $\vec{\beta}$ 的笛卡尔分量，并定义

$$g \triangleq 1-\hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{\beta} = 1-\beta_k n_k$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega}=\frac{e_s^2}{4\pi c^3}\frac{\left|\overbrace{\boxed{\hat{\mathbb{R}}\times\left[\left(\hat{\mathbb{R}}-\vec{\beta}\right)\times\vec{a}\right]}}^{\left(\hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{a}\right)\left(\hat{\mathbb{R}}-\vec{\beta}\right)-g\vec{a}}\right|^2}{g^5}$$

因而，加速运动点电荷的辐射总功率可以写为:

$$P=\frac{e_s^2}{4\pi c^3}\oint\frac{g^2a^2+2g\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)\overbrace{\boxed{\left(\hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{a}\right)}}^{a_in_i}-\left(1-\beta^2\right)\overbrace{\boxed{\left(\hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{a}\right)^2}}^{a_ia_jn_in_j}}{g^5}d\Omega$$

$$=\frac{e_s^2}{4\pi c^3}\left[a^2I+2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)a_iJ_i-\left(1-\beta^2\right)a_ia_jK_{ij}\right]$$

62

这里定义了积分

$$I=\oint\frac{d\Omega}{g^3},\quad J_i=\oint\frac{n_i}{g^4}d\Omega,\quad K_{ij}=\oint\frac{n_in_j}{g^5}d\Omega$$

由于 $g\triangleq 1-\hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{\beta}=1-\beta_kn_k$，因而

$$J_i=\frac{1}{3}\frac{\partial I}{\partial\beta_i},\quad K_{ij}=\frac{1}{4}\frac{\partial J_i}{\partial\beta_j}$$

将极轴定义为沿着速度的方向，$g=1-\beta\cos\theta$，因而

$$I=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{du}{(1-\beta u)^3}=\frac{4\pi}{(1-\beta^2)^2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{I=4\pi\gamma^4}$$

利用 $\partial\gamma/\partial\beta_i=\gamma^3\beta_i$，由此即可得到

$$\boxed{J_i=\frac{16\pi}{3}\gamma^6\beta_i,\quad K_{ij}=\frac{4\pi}{3}\gamma^6\left(\delta_{ij}+6\gamma^2\beta_i\beta_j\right)}$$

63

$$\boxed{I=4\pi\gamma^4,\quad J_i=\frac{16\pi}{3}\gamma^6\beta_i,\quad K_{ij}=\frac{4\pi}{3}\gamma^6\left(\delta_{ij}+6\gamma^2\beta_i\beta_j\right)}$$

将得到的积分代入辐射总功率的表达式，给出

$$P=\frac{e_s^2}{4\pi c^3}\left[a^2I+2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)a_iJ_i-\left(1-\beta^2\right)a_ia_jK_{ij}\right]$$

$$=\frac{e_s^2}{4\pi c^3}\cdot\frac{4\pi}{3}\gamma^4\left\{\boxed{3a^2}+\boxed{8\gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)^2}-\left[\boxed{a^2}+\boxed{6\gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)^2}\right]\right\}$$

$$=\gamma^4\frac{2e_s^2}{3c^3}\left[a^2+\gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)^2\right]=\gamma^6\frac{2e_s^2}{3c^3}\left[\left(1-\beta^2\right)a^2+\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)^2\right]$$

由此就给出了点电荷辐射的李纳公式:

$$P=\gamma^6\frac{2e_s^2}{3c^3}\left[a^2-\left|\vec{\beta}\times\vec{a}\right|^2\right]$$

64

65

66