

§ 2 谐振电流及其辐射场

1

一、辐射的基本概念

1. 电磁波的产生

- 产生电磁波的关键是产生随时间变化的电场和磁场：
时变的电场、磁场相互激发，在空间中就形成了电磁波。
- 微观：产生电磁波的前提条件是**带电粒子做加速运动**。
 > 这样的粒子所产生的电场与磁场通常均是随时间变化的。
- 宏观：产生电磁波的前提条件是**存在随时间变化的电流分布**。
 > 例如频率为 ω 的交变电流密度矢量：

$$\vec{J}(t, \vec{x}) = \vec{J}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$
 > 电磁波由载有交变电流的天线辐射出来。

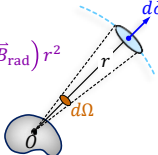
2

2. 辐射的定义

- 若坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} / \mu_0$ 使得下述极限非零：

$$dP(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \lim_{r \rightarrow \infty} (\hat{r} \cdot \vec{S}) r^2 d\Omega$$
 则称源向着立体角 $d\Omega$ 内**辐射**电磁波。
单位时间由球面上的面元 $d\sigma = r^2 d\Omega$ 流出的电磁场能量
 > 这意味着：当 $r \rightarrow \infty$ 时， $\vec{S} \propto \hat{r} / r^2$ 。
 > 当 $r \rightarrow \infty$ 时，相应的辐射电场 \vec{E}_{rad} 和磁场 \vec{B}_{rad} 均按 $1/r$ 变化。
- (瞬时) **辐射功率的角分布**

$$\frac{dP}{d\Omega} \triangleq \lim_{r \rightarrow \infty} [(\hat{r} \cdot \vec{S}) r^2] = \frac{1}{\mu_0} \hat{r} \cdot (\vec{E}_{\text{rad}} \times \vec{B}_{\text{rad}}) r^2$$
 > (瞬时) **总辐射功率**

$$P(t) = \oint \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{S}$$


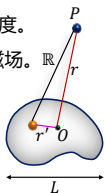
3

1. 辐射电磁势

- 假设源是局域的，源尺度设为 L 。
 - 即电荷电流分布在以原点 O 为球心、直径为 L 的球内。
- 辐射问题中涉及到的另一空间尺度是场点到原点的距离 r 。
 - **远场近似**: $r \rightarrow \infty$, 即 $r \gg$ 所有有限空间尺度。
- 目的: 提取辐射场, 即随距离按 $1/r$ 衰减的电磁场。
 - 辐射电磁势同样随距离按 $1/r$ 衰减。
- 在此近似下, 被积函数中的 $1/\mathbb{R} \approx 1/r$, 从而

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}\left(t - \frac{\mathbb{R}}{c}, \vec{x}'\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(t_r, \vec{x}')}{\mathbb{R}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(t - \mathbb{R}/c, \vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

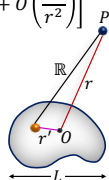


7

- 由于源尺度 $L \ll r$, 从而也有 $r' \ll r$ 。将 \mathbb{R} 按照 r'/r 展开

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= |\vec{x} - \vec{x}'| = r \left| \hat{r} - \frac{\vec{x}'}{r} \right| = r \left[1 - \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{r} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \right] \\ \Rightarrow \mathbb{R} &= r - \vec{x}' \cdot \hat{r} + r \cdot O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \\ \Rightarrow t - \frac{\mathbb{R}}{c} &= t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c} - r \cdot O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \end{aligned}$$

宏观推迟时间 微观推迟时间 远场近似下为零



8

- 微观推迟时间 $\sim L/c$: 电磁波渡越场源区域的传播时延
- 忽略微观推迟时间将导致辐射场无角度依赖性。
- 对于大尺度场源或迅变场源, 微观推迟时间不可忽略。

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}\left(t - \frac{\mathbb{R}}{c}, \vec{x}'\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

- 由此在远场近似下, 得到了对辐射场有贡献的**辐射电磁势**:

$$\begin{cases} \varphi_{\text{rad}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3x' \rho\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}, \vec{x}'\right) \\ \vec{A}_{\text{rad}}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}, \vec{x}'\right) \end{cases}$$

- 为方便计算辐射电磁场, 引入如下记号:

$$t_r \triangleq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}$$

$$\Rightarrow \nabla t_r = -\frac{\hat{r}}{c} + \frac{1}{c} \left((\nabla \hat{r}) \cdot \vec{x}' \right) (\hat{r} - \hat{r}) \cdot \frac{\vec{x}'}{r} = \hat{r} \times \left(\frac{\vec{x}'}{r} \times \hat{r} \right)$$

- 在远场近似下

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1, \quad \nabla t_r = -\frac{\hat{r}}{c}$$

9

2. 辐射电磁场

- 将辐射电磁势代入下式，即可得相应的辐射电磁场：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- 此处感兴趣的是辐射场，即电磁场中 $\sim 1/r$ 的项。

$$\left| \nabla \frac{1}{r} \right| = \left| -\frac{\hat{r}}{r^2} \right| = \frac{1}{r^2} \quad \text{对辐射场没有贡献}$$

$\triangleright \varphi$ 和 \vec{A} 的空间导数只需作用于源项 $\rho(t_r, \vec{x}')$ 和 $\vec{j}(t_r, \vec{x}')$ 。

$$\begin{cases} \varphi_{\text{rad}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(t_r, \vec{x}') \\ \vec{A}_{\text{rad}}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{j}(t_r, \vec{x}') \end{cases} \begin{cases} t_r \triangleq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c} \\ \partial_t t_r = 1, \quad \nabla t_r = -\frac{\hat{r}}{c} \end{cases}$$

10

磁场： $\vec{B}(t, \vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(t, \vec{x})$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{rad}}(t, \vec{x}) &= \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(t_r, \vec{x}') \right] \quad \text{此项的导数对辐射场无贡献} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \left[\nabla \times \vec{j}(t_r, \vec{x}') \right] \nabla t_r \times \frac{\partial}{\partial t_r} \vec{j}(t_r, \vec{x}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \left(-\frac{1}{c} \hat{r} \right) \times \partial_t \vec{j}(t_r, \vec{x}') \\ &= -\frac{1}{c} \hat{r} \times \partial_t \left[\frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(t_r, \vec{x}') \right] \vec{A}_{\text{rad}}(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{rad}}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c} \hat{r} \times \partial_t \vec{A}_{\text{rad}}(t, \vec{x})$$

由辐射电磁势提炼出辐射电磁场，只需将空间导数转化为时间导数。 $\nabla \leftrightarrow -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t$

$$\vec{A}_{\text{rad}}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(t_r, \vec{x}'), \quad \partial_t t_r = 1, \quad \nabla t_r = -\frac{\hat{r}}{c}$$

11

电场： $\vec{E}(t, \vec{x}) = -\nabla\varphi(t, \vec{x}) - \partial_t \vec{A}(t, \vec{x})$

$$-\nabla\varphi = \frac{\hat{r}}{c} \partial_t \varphi = \frac{\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 c r} \int d^3x' \left[\partial_t \rho(t_r, \vec{x}') \right] \frac{\hat{r}}{c} \cdot \partial_t \vec{j}(t_r, \vec{x}') \\ \frac{\partial}{\partial t_r} \rho(t_r, \vec{x}') = -\left[\nabla' \cdot \vec{j}(t_r, \vec{x}') \right]_{t_r} = -\nabla' \cdot \vec{j}(t_r, \vec{x}') + \nabla' t_r \cdot \frac{\partial}{\partial t_r} \vec{j}(t_r, \vec{x}')$$

$$\Rightarrow -\nabla\varphi = \frac{\mu_0 c}{4\pi r} \left[-\int d^3x' \nabla' \cdot \vec{j}(t_r, \vec{x}') + \frac{\hat{r}}{c} \cdot \partial_t \int d^3x' \vec{j}(t_r, \vec{x}') \right]$$

$$\text{高斯定理、局域电流} \\ = \hat{r} \cdot \partial_t \left[\frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(t_r, \vec{x}') \right] \vec{A}_{\text{rad}}(t, \vec{x})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}} = \left(\hat{r} \cdot \partial_t \vec{A}_{\text{rad}} \right) \hat{r} - \partial_t \vec{A}_{\text{rad}} = -\left(\hat{r} \times \partial_t \vec{A}_{\text{rad}} \right) \times \hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}} = c \vec{B}_{\text{rad}} \times \hat{r}$$

$$\vec{B}_{\text{rad}}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c} \hat{r} \times \partial_t \vec{A}_{\text{rad}}(t, \vec{x}), \quad \nabla \leftrightarrow -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t, \quad t_r \triangleq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}$$

12

- 利用洛伦茨规范条件更方便得到辐射电场 (推荐)

$$0 = \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi_{\text{rad}} - \frac{\hat{r}}{c} \cdot \partial_t \vec{A}_{\text{rad}} \quad \text{远场近似}$$

$$\Rightarrow \partial_t \varphi_{\text{rad}} = c \hat{r} \cdot \partial_t \vec{A}_{\text{rad}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}} = -\nabla \varphi_{\text{rad}} - \partial_t \vec{A}_{\text{rad}} = -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t \varphi_{\text{rad}} - \partial_t \vec{A}_{\text{rad}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}} = (\hat{r} \cdot \partial_t \vec{A}_{\text{rad}}) \hat{r} - \partial_t \vec{A}_{\text{rad}} = -(\hat{r} \times \partial_t \vec{A}_{\text{rad}}) \times \hat{r}$$

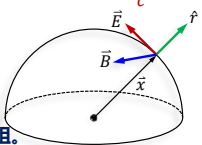
$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}} = c \vec{B}_{\text{rad}} \times \hat{r}$$
- 还可利用安培-麦克斯韦定律由辐射磁场计算辐射电场

$$\partial_t \vec{E}_{\text{rad}} = c^2 \nabla \times \vec{B}_{\text{rad}} = -c \hat{r} \times \partial_t \vec{B}_{\text{rad}} \Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}} = c \vec{B}_{\text{rad}} \times \hat{r}$$

$$\vec{B}_{\text{rad}}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c} \hat{r} \times \partial_t \vec{A}_{\text{rad}}(t, \vec{x}), \quad \nabla \leftrightarrow -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t, \quad t_r \triangleq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}$$

- 后面辐射场将略去下标 "rad", 并记 $\dot{f} = \partial_t f(t, \vec{x})$.
- 任意局域电流 $\vec{j}(t, \vec{x})$ 的辐射场均可由辐射矢量势完整表征

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(t - r/c + \vec{x}' \cdot \hat{r}/c, \vec{x}') d^3x'$$
 - 远场近似下, 空间导数等价于时间导数: $\nabla \leftrightarrow -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t$
- 任意局域电流 $\vec{j}(t, \vec{x})$ 的辐射场为

$$c \vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c \vec{B} \times \hat{r}$$
 - 电场与磁场大小满足: $E = cB$.
 - 矢量 \hat{r} 、 \vec{E} 和 \vec{B} 构成右手正交三元组。
- 利用辐射电磁场公式, 可得辐射功率角分布的一般表达式:

$$\frac{dP}{d\Omega} = S r^2 = \frac{c}{\mu_0} B^2 r^2 = \frac{1}{\mu_0 c} \left| \dot{\vec{A}} \times \vec{x} \right|^2$$

三、拉莫尔 (Larmor) 公式

- 电量为 e 、速度为 $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}_e(t)$ 的运动点电荷, 其电流密度为

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = e \vec{v}(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_e(t))$$
 - 带电粒子产生电磁辐射的充要条件是粒子有加速度。
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} \left[\dot{\vec{A}} \times \hat{r} \right]^2$$
- 多粒子系统中, 各加速粒子的辐射场相干、相消干涉, 可能使系统整体无净辐射。如周期性振荡的均匀带电球壳
 - 由于 $\vec{j} \propto \hat{r}$, 对称性意味着 $\vec{A} \propto \hat{r}$ 。
 - 由 $c \vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}$ 、 $\vec{E} = c \vec{B} \times \hat{r}$ 知, 此情形下辐射场恒为零。

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(t_r, \vec{x}'), \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} \left| \dot{\vec{A}} \times \vec{x} \right|^2, \quad t_r = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}$$

非相对论近似: $v \ll c$

- 如果粒子的速度 $v \ll c$, 则

$$\begin{aligned} \vec{J}(t_r, \vec{x}') &= \vec{J}(t - r/c + \underbrace{\vec{x}' \cdot \hat{r}/c}_{\sim L/c}, \vec{x}') \approx \vec{J}(t - r/c, \vec{x}') \\ \Rightarrow \vec{J}(t_r, \vec{x}') &\approx e\vec{v}(t - r/c)\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_e(t - r/c)) \quad 1 \\ \Rightarrow \vec{A}(t, \vec{x}) &\approx \frac{\mu_0 e}{4\pi r} \vec{v}(t - r/c) \int d^3x' \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_e(t - r/c)) \end{aligned}$$

- 下面记 $t_r \triangleq t - r/c$, 并令 $\vec{v}_r = \vec{v}(t_r)$ 、 $\vec{a}_r = \vec{a}(t_r)$, 从而将低速运动点电荷的辐射矢量势写为

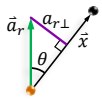
$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e}{4\pi r} \vec{v}_r$$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{J}(t_r, \vec{x}'), \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} |\dot{\vec{A}} \times \vec{x}'|^2, \quad t_r = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}$$

非相对论点电荷的辐射场和辐射功率角分布

- 非相对论点电荷的辐射场

$$\begin{cases} c\vec{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r} \vec{a}_r \times \hat{r} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r} (a_r \sin \theta) \hat{\phi} \\ \vec{E} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r} (\vec{a}_r \times \hat{r}) \times \hat{r} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r} (a_r \sin \theta) \hat{\theta} \end{cases}$$

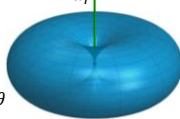


➢ 电经磁纬 (以瞬时加速度方向为极轴)。

➢ 辐射场由横向加速度决定。

- 非相对论点电荷的辐射功率角分布

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} |\vec{a}_r \times \hat{r}|^2 = \frac{\mu_0 e^2 a_r^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta$$



➢ 辐射方向性: 两极无辐射, 赤道面上辐射最强。

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r} \vec{v}_r, \quad c\vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}, \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{\mu_0} B^2 r^2, \quad t_r = t - \frac{r}{c}$$

非相对论点电荷的总辐射功率

- 将辐射功率角分布对立体角积分

$$\begin{aligned} P &= \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^2 a_r^2}{16\pi^2 c} \int \sin^2 \theta d\Omega \quad \frac{8\pi}{3} \\ \Rightarrow P &= \frac{\mu_0 e^2 a_r^2}{6\pi c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a_r^2}{3c^3} \\ \Rightarrow P &= \frac{2e_s^2 a_r^2}{3c^3} \quad \text{拉莫尔公式} \end{aligned}$$

➢ 若 e 为质子电量, 则 $e_s^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \text{ Mev} \cdot \text{fm}$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^2 a_r^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta \quad \int \sin^2 \theta d\Omega = \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi$$

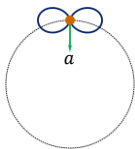
- 拉莫尔公式是非相对论点电荷的总辐射功率的极好近似。
- 拉莫尔公式具有相当的普适性。
 - 金属导体中的自由电子、原子中的电子、核中的质子。
 - 等离子体中的带电粒子通常也满足这个条件。
- 考察均匀恒定磁场 \vec{B} 中运动的质量为 m 、电量为 e 的粒子。

➢ 设粒子做非相对论回旋运动，此时粒子将产生回旋辐射。

➢ 回旋半径和加速度分别为

$$R = \frac{mv}{eB}, \quad a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a = \frac{eBv}{m}$$

$$\Rightarrow P = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3c^3} \frac{e^2 v^2 B^2}{m^2} = \frac{e^4 v^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}$$



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta, \quad P = \frac{2e_s^2 a^2}{3c^3}, \quad e_s^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

19

三、谐振电流及其辐射场

- 下面考察谐振电流：

$$\vec{J}(t, \vec{x}) = \vec{J}_0(\vec{x})e^{-i\omega t} \Rightarrow \vec{J}(t_r, \vec{x}') = \vec{J}_0(\vec{x}')e^{-i\omega t_r}$$

➢ 定义波矢量

$$\vec{k} \triangleq \frac{\omega}{c} \hat{r} \Rightarrow \vec{J}(t_r, \vec{x}') = \vec{J}_0(\vec{x}')e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} e^{i(kr - \omega t)}$$

- 当讨论谐振电流的辐射场时，

$$\partial_t \leftrightarrow -i\omega, \quad \nabla \leftrightarrow -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t \Rightarrow \nabla \leftrightarrow \frac{i\omega}{c} \hat{r} = i\vec{k}$$

➢ 相关场量对时间和空间的导数都转化为代数乘法运算

$$\partial_t \leftrightarrow -i\omega, \quad \nabla \leftrightarrow i\vec{k}$$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 x' \vec{J}(t_r, \vec{x}'), \quad t_r = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}$$

20

- 谐振电流的辐射矢量势

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{4\pi r} \int d^3 x' \vec{J}(t, \vec{x}') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'}$$

- 谐振电流的辐射场

$$\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A} = \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}$$

- 谐振电流的平均能流密度

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{c}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{r}$$

- 谐振电流的平均辐射功率角分布

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = |\langle \vec{s} \rangle| r^2 = \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 r^2$$

21

§ 3 天线辐射

22

一、天线电流

● 几乎任意构型的细导体均可作为天线接收与辐射电磁波。

● 中心对称馈电的直细天线（通常可近似看作理想导体），天线电流由电磁场与电荷电流的相互作用决定。

➢ 边界条件：天线表面 $\vec{E}_t = 0$ ，两端 $I = 0$ 。

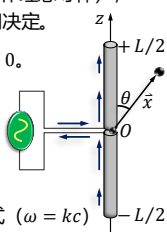
● 本节假设激励电压为时谐形式 $e^{-i\omega t}$ 。

➢ 设天线长为 L ，半径为 a 。

➢ 细天线近似： $a \ll L$ ， $a \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$

➢ 细导线近似下，天线电流具有驻波形式 ($\omega = kc$)

$$I(t, z) = I_0 \sin k \left(\frac{L}{2} - |z| \right) e^{-i\omega t}, \quad \left(|z| \leq \frac{L}{2} \right)$$



23

● 定义波长 $\lambda = 2\pi/k$ 以及无量纲量 m : $m \triangleq \frac{L}{\lambda} = \frac{kL}{2\pi}$

$$\Rightarrow I = I_0 \sin(m\pi - k|z|) e^{-i\omega t}, \quad (k|z| \leq m\pi)$$

➢ 半波天线 ($m = 1/2$):

$$I = I_0 \cos kz e^{-i\omega t}, \quad \left(k|z| \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

短天线 ($m \ll 1$)

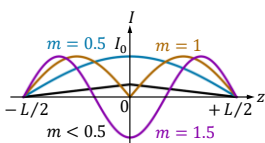
$$I_m \approx m\pi I_0$$

$$\Rightarrow I(z) = I_m(1 - 2|z|/L)$$

● 峰值电流 I_m 为

$$I_m = \begin{cases} I_0, & (m \geq 1/2) \\ I_0 \sin m\pi, & (m < 1/2) \end{cases}$$

$$I(t, z) = I_0 \sin k \left(\frac{L}{2} - |z| \right) e^{-i\omega t}$$



24

二、天线辐射

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &= \hat{z} \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int_{-L/2}^{L/2} dz' I(t, z') e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} = ikz' \cos\theta \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r} \int_{-L/2}^{L/2} \sin(m\pi - k|z'|) e^{-i(kz') \cos\theta} dz' \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi kr} \int_0^{m\pi} 2 \sin(m\pi - \xi) \cos(\xi \cos\theta) d\xi \\ &\quad \frac{\sin[m\pi - (1 - \cos\theta)\xi]}{+ \sin[m\pi - (1 + \cos\theta)\xi]} \end{aligned}$$

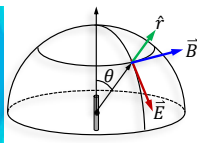
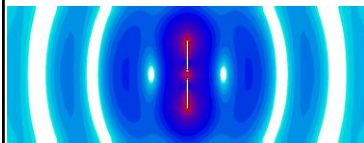
$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}, \quad I(t, z) = I_0 \sin(m\pi - k|z|) e^{-i\omega t}$$

25

细天线的辐射矢量势和辐射电磁场

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr-\omega t)}}{2\pi} \frac{g(\theta)}{kr} \sin\theta \hat{z}, \quad g(\theta) \triangleq \frac{\cos(m\pi \cos\theta) - \cos(m\pi)}{\sin\theta} \\ \Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = -i \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr-\omega t)}}{2\pi} \frac{g(\theta)}{r} \hat{\phi} \\ \vec{E} = -i \frac{\mu_0 c I_0 e^{i(kr-\omega t)}}{2\pi} \frac{g(\theta)}{r} \hat{\theta} \end{cases} \end{aligned}$$

辐射场是线偏振的TEM
(电经磁纬)



$$c\vec{B} = \hat{z} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}, \quad \omega = kc$$

26

平均的辐射功率角分布

- 细天线的平均辐射功率角分布为:

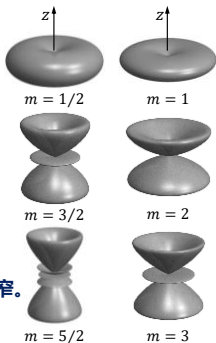
$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} &= \frac{cr^2}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{r}^* \cdot \vec{B} \\ \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} &= \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} g^2(\theta) \end{aligned}$$

- m 取整数或半整数均有:

$$m = L/\lambda \text{ 越大}$$

> 辐射波瓣越多, 主辐射瓣逐渐收窄。

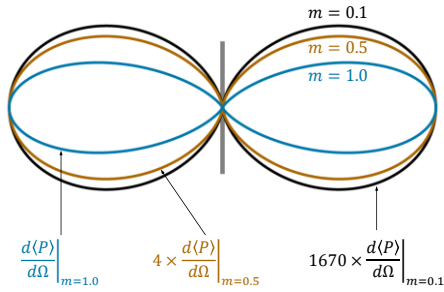
> 辐射能量逐步向天线轴聚拢。



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{\mu_0} B^2 r^2, \quad \vec{B} = -i \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr-\omega t)}}{2\pi} \frac{g(\theta)}{r} \hat{\phi}, \quad g(\theta) \triangleq \frac{\cos(m\pi \cos\theta) - \cos(m\pi)}{\sin\theta}$$

27

短天线、半波天线、全波天线辐射角分布比较



$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} g^2(\theta), \quad g(\theta) \triangleq \frac{\cos(m\pi \cos \theta) - \cos(m\pi)}{\sin \theta}$$

28

平均辐射功率

- 天线的平均辐射总功率为：

$$\langle P \rangle = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi g^2(\theta) \sin \theta d\theta$$

- 根据 $\langle P \rangle = |I|^2 [R]$ ，可将其写为 ≈ 60

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R_0, \quad \text{where } R_0 \triangleq \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int_0^\pi g^2(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow R_0 \approx 60 \int_{-1}^1 \frac{[\cos(m\pi u) - \cos(m\pi)]^2}{1 - u^2} du$$

- 对于短天线 ($m \ll 1$): $\cos(m\pi u) - \cos(m\pi) \approx \frac{1}{2} m^2 \pi^2 (1 - u^2)$

$$\Rightarrow R_0 \approx 15 m^4 \pi^4 \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \approx 20 m^4 \pi^4$$

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} g^2(\theta), \quad g(\theta) \triangleq \frac{\cos(m\pi \cos \theta) - \cos(m\pi)}{\sin \theta}$$

29

天线的辐射电阻

- 为表征天线的辐射能力，定义辐射电阻 R_r ：

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m^2 R_r$$

$$\Rightarrow R_r = \left(\frac{I_0}{I_m} \right)^2 R_0$$

- 辐射电阻越大，天线辐射能力越强。

- 可将辐射电阻，视为天线电流驱动电路的负载电阻。

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R_0, \quad R_0 = 60 \int_{-1}^1 \frac{[\cos(m\pi u) - \cos(m\pi)]^2}{1 - u^2} du$$

30

- 当 $m \geq 1/2$ 时, $I_m = I_0 \Rightarrow R_r = R_0$
- 当 $m < 1/2$ 时, $I_m = I_0 \sin m\pi \Rightarrow R_r = R_0 / \sin^2 m\pi$

对于短天线, $I_m = m\pi I_0$, $R_0 \approx 20m^4\pi^4$, 因而

$$R_r \approx 20m^2\pi^2 \approx 197m^2 (\Omega)$$

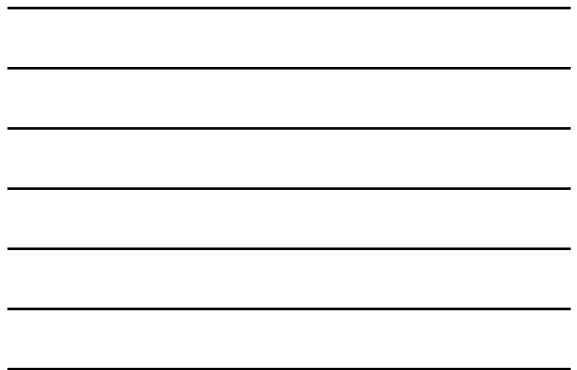
$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m^2 R_r$, $R_r = \frac{I_0^2}{I_m^2} R_0$, $R_0 = 60 \int_{-1}^1 \frac{[\cos(m\pi u) - \cos(m\pi)]^2}{1-u^2} du$



天线阵列

- 多个辐射单元按特定空间排布组成的系统称为**天线阵**。

干涉效应使得天线阵的辐射角分布对单元的空间排列敏感。



- N 根间距为 a 的半波天线构成的横向天线阵, 在 xy 平面内

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\phi} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} |\mathcal{F}(\phi)|^2$$

阵列因子 $\mathcal{F}(\phi) \triangleq \frac{\sin(Nka \cos \phi/2)}{\sin(ka \cos \phi/2)}$

- 主瓣位于 $\cos \phi = 0$ 方位。
- $N \gg 1$ 时, 绝大多数辐射能量被约束在沿 $\pm y$ 轴的窄波束内。

- 若相邻天线的馈电电流间引入固定相位差 δ , 阵列因子改为

$$\mathcal{F}(\phi) \triangleq \frac{\sin[N(ka \cos \phi + \delta)/2]}{\sin[(ka \cos \phi + \delta)/2]}$$

- 主瓣偏移至 $ka \cos \phi + \delta = 0$ 处。
- 改变相位即可调节主波束指向, 这类天线统称为**相控阵天线**。



● 考察横向排列的两根半波天线:

$$\begin{cases} I_A(t, z) = I_0 \cos kz e^{-i\omega t} \\ I_B(t, z) = I_0 \cos kz e^{-i(\omega t + \pi/2)} \end{cases}$$

相比于 I_A , I_B 的相位超前 $\pi/2$ 。

合适的天线阵列可提高辐射功率并增强辐射的方向性

34

§ 4 小场源辐射

35

一、小场源近似

● 前面给出了谐振电流 $\vec{j}(t, \vec{x}) = \vec{j}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$ 的辐射场矢量势为

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}, \quad (\vec{k} = \frac{\omega}{c} \hat{r})$$

● 除了场源尺度 L 和场、源距离 r 外, 此处还涉及到第三个尺度, 即电磁波的波长 λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

➢ 由于研究的是辐射场, 自然要求

$$L \ll r, \quad \lambda \ll r$$

● 下面讨论小场源的辐射场特性。所谓小场源指的是

$$L \ll r, \quad L \ll \lambda \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{x}' \sim L/\lambda \ll 1$$

36

小场源近似下的辐射矢量势

- 在小场源近似下，辐射矢量势为

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3 x' \vec{j}(t, \vec{x}') \left[1 - \frac{\sim L/\lambda}{i\vec{k} \cdot \vec{x}'} + O\left(\frac{L^2}{\lambda^2}\right) \right]$$

- 在静电学与静磁学中

- 单极矩（静磁学无单极矩）贡献随距离 r 增大以 $1/r$ 衰减。
- 偶极矩贡献项以 $1/r^2$ 衰减，更高阶多极矩贡献项更快衰减。

- 电动力学推迟解与静场公式形式高度相似

- 核心区别：时变场的场源需要在推迟时间处取值。
- 时变场源的所有多极矩均可贡献 $1/r$ 的辐射场。

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3 x' \vec{j}(t, \vec{x}') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \left(\vec{k} = \frac{\omega}{c} \hat{r} \right)$$

$$1 - i\vec{k} \cdot \vec{x}' + \dots$$

37

- 保留至 L/λ 项，谐振小场源的辐射矢量势可近似写为

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &\approx \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3 x' \vec{j}(t, \vec{x}') \left(1 - i\vec{k} \cdot \vec{x}' \right) \left(1 - \frac{i\omega}{c} \vec{x}' \cdot \hat{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left\{ \int d^3 x' \vec{j}(t, \vec{x}') + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int d^3 x' \vec{j}(t, \vec{x}') \vec{x}' \right] \cdot \hat{r} \right\} \\ &\quad \dot{\vec{p}} \quad \left(\dot{\vec{m}} \times \vec{T} + \frac{1}{6} \ddot{\vec{D}} + \frac{1}{6} \dot{g} \vec{T} \right) \cdot \hat{r} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left[\dot{\vec{p}}(t) + \frac{1}{c} \dot{\vec{m}}(t) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}(t) + \frac{1}{6c} \dot{g}(t) \hat{r} \right] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int d^3 x \vec{j}(t, \vec{x}) &= \dot{\vec{p}}(t), \quad \int d^3 x \vec{j}(t, \vec{x}) \vec{x} = \dot{\vec{m}}(t) \times \vec{T} + \frac{1}{6} \ddot{\vec{D}}(t) + \frac{1}{6} \dot{g}(t) \vec{T} \\ \vec{p} &\triangleq \int \vec{x} dq, \quad \vec{m} \triangleq \frac{1}{2} \int \vec{x} \times d\vec{l}, \quad \vec{D} \triangleq \int (3\vec{x}\vec{x} - r^2 \vec{T}) dq, \quad g \triangleq \int r^2 dq \end{aligned} \right.$$

38

- 辐射矢量势中 g 项是无关紧要的。

- 洛伦茨规范下矢势仍具不确定性。

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi, \quad \left(\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \right)$$

$$\text{取 } \psi = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{24\pi r} \dot{g}(t) \Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + [i\vec{k}] \psi \quad \frac{i\omega}{c} \hat{r} \leftrightarrow -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t$$

$$\square\psi = 0 \text{ 的球面波解} \quad = \vec{A} - \frac{\mu_0 e^{ikr}}{24\pi cr} \dot{g}(t) \hat{r}$$

- 或者， g 项沿着 \hat{r} 方向，它显然对辐射磁场 $\vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}/c$ 没有贡献。

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left[\dot{\vec{p}}(t) + \frac{1}{c} \dot{\vec{m}}(t) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}(t) + \frac{1}{6c} \dot{g}(t) \hat{r} + \dots \right]$$

39

- 这样就得到**小场源近似下辐射矢势的多极展开**

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\dot{\vec{p}}(t) + \frac{1}{c} \dot{\vec{m}}(t) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}(t) + \dots \right]$$

- 第二、三项同量级，它们与第一项之比具有 L/λ 的量级。
- 小场源辐射场的主要贡献通常来自电偶极辐射，而对其的主要修正则来自磁偶极辐射和电四极辐射。

- 小场源近似下的辐射矢势也可表示为

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\dot{\vec{p}}_r + \frac{1}{c} \dot{\vec{m}}_r \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}_r + \dots \right]$$

- 其中 $\vec{p}_r = \vec{p}(t_r) = \vec{p}(t - r/c)$ ， \vec{m}_r 和 \vec{D}_r 的含义类似。
- 可证：此表达式也适用于随时间任意变化的小场源。

40

小场源近似下的辐射电磁场

- 根据 $c\vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}$ 和 $\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}$ ，小场源近似下的**辐射场**为

$$\begin{cases} c\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\dot{\vec{p}} \times \hat{r} + \frac{1}{c} (\dot{\vec{m}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r} + \dots \right] \\ \vec{E} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[(\dot{\vec{p}} \times \hat{r}) \times \hat{r} - \frac{1}{c} \ddot{\vec{m}} \times \hat{r} + \frac{1}{6c} (\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \dots \right] \end{cases}$$

- 小场源近似下的**平均能流密度**及**平均辐射功率角分布**分别为

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^3 |\vec{B}|^2 \hat{r}, \quad \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \langle \vec{S} \rangle r^2$$

$c/2\mu_0$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\dot{\vec{p}}(t) + \frac{1}{c} \dot{\vec{m}}(t) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}(t) + \dots \right]$$

41

关于多极矩的复数表示

- 以电偶极矩为例。谐振电流电偶极矩的复数表示可写为

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$$

- 一般而言， \vec{p}_0 是复矢量，不妨将其记为 $\vec{p}_0 = \vec{p}_{0R} + i\vec{p}_{0I}$ ，其中 \vec{p}_{0R} 和 \vec{p}_{0I} 均为与时间无关的实矢量。

- 物理电偶极矩为 $\vec{p}(t)$ 的实部

$$\begin{aligned} \text{Re}[\vec{p}(t)] &= \text{Re}[(\vec{p}_{0R} + i\vec{p}_{0I})e^{-i\omega t}] \\ \Rightarrow \text{Re}[\vec{p}(t)] &= \vec{p}_{0R} \cos \omega t + \vec{p}_{0I} \sin \omega t \end{aligned}$$

- $\text{Re}[\vec{p}(t)]$ 中 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 前的系数，分别给出 \vec{p}_0 的实部和虚部。
- 若 \vec{p}_{0R} 或 \vec{p}_{0I} 的其中一项为零，则电偶极子沿着某个固定方向振荡，称其为**定向电偶极子**。

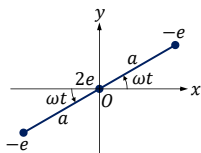
42

【例】写出电四极张量的分量矩阵 D 、 D' 中随时间变化周期性振荡的部分 D' 及其复表示 \bar{D}' 。

$$D = -ea^2 \begin{pmatrix} 1 + 3 \cos 2\omega t & 3 \sin 2\omega t & 0 \\ 3 \sin 2\omega t & 1 - 3 \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D' = -3ea^2 \begin{pmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}' = -3ea^2 \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-2i\omega t}$$



43

二、电偶极辐射

- 矢量势

$$\vec{A} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \dot{\vec{p}}(t)$$

- 电磁场

$$c\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \ddot{\vec{p}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}) \times \hat{r}$$

- 对时间平均的辐射能流与辐射总功率

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \hat{r}, \quad \langle P \rangle = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$c\vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}, \quad \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^3 |\vec{B}|^2 \hat{r}, \quad \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \langle \vec{S} \rangle r^2$$

44

关于辐射功率的证明

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \oint \langle \vec{S} \rangle r^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint (\ddot{\vec{p}}^* \times \hat{r}) \cdot (\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}) d\Omega \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint [(\ddot{\vec{p}}^* \cdot \ddot{\vec{p}})(\hat{r} \cdot \hat{r}) - (\ddot{\vec{p}}^* \cdot \hat{r})(\ddot{\vec{p}} \cdot \hat{r})] d\Omega \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left[|\ddot{\vec{p}}|^2 \oint d\Omega - \ddot{\vec{p}}^* \cdot \left(\oint d\Omega \hat{r} \hat{r} \right) \cdot \ddot{\vec{p}} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{8\pi}{3} |\ddot{\vec{p}}|^2 = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

45

短天线辐射

• 下面考察细的短天线 ($L \ll \lambda$)

$$\dot{\vec{p}} = \dot{z}e^{-i\omega t} \int_{-L/2}^{L/2} I(z) dz = \frac{1}{2} I_m L e^{-i\omega t} \dot{z}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\omega^2 L^2 I_m^2}{48\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\pi}{12\epsilon_0 c} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 I_m^2$$

➢ 峰值电流 I_m 一定时, $\langle P \rangle \propto \omega^2$.

➢ 短天线的辐射电阻 R_r : $\frac{\pi\mu_0 c}{6} \approx 20\pi^2$

$$\langle P \rangle \triangleq \frac{1}{2} I_m^2 R_r \Rightarrow R_r = \frac{\pi}{6\epsilon_0 c} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \approx 197 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 (\Omega)$$

➢ 要提高天线的辐射能力, 需增大天线的长度以致 $L \sim \lambda$, 此时天线的辐射已不能用电偶极辐射来近似描写。

$I(z) = I_m \left(1 - \frac{2}{L}|z|\right)$

49



【例】 点电荷 e 绕着原点做半径为 R 的匀速圆周运动, 试确定其电偶极辐射场以及辐射功率。设运动速度 $v = \omega R \ll c$ 。

非相对论近似 \Leftrightarrow 小场源近似

【解】 物理电偶极矩为 $\text{Re } \vec{p} = eR(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t)$

$$\Rightarrow \vec{p} = eR(\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\omega t}$$

在球坐标系中将其写为 $\vec{p} = eR(\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta + i\hat{\phi})e^{i(\phi - \omega t)}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{p}} = -e\omega^2(\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta + i\hat{\phi})e^{i(\phi - \omega t)}$$

	\hat{x}	\hat{y}	\hat{z}
\hat{r}	$\sin \theta \cos \phi$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta$
$\hat{\theta}$	$\cos \theta \cos \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$-\sin \theta$
$\hat{\phi}$	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0

50



$$\vec{B} = \frac{ea}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{-i\hat{\theta} + \hat{\phi} \cos \theta}{r} e^{i(kr - \omega t + \phi)}$$

$$\vec{E} = \frac{ea}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{\theta} \cos \theta + i\hat{\phi}}{r} e^{i(kr - \omega t + \phi)}$$

• 偏振度 $\vec{R} = \frac{E_\phi}{E_\theta} = \frac{i}{\cos \theta}$

➢ $\theta = \pi/2$: 线偏振

➢ $0 \leq \theta < \pi/2$: 右旋椭圆偏振
($\theta = 0$: 右旋圆偏振)

➢ $\pi/2 < \theta \leq \pi$: 左旋椭圆偏振
($\theta = \pi$: 左旋圆偏振)

偏振态与电荷符号无关, 电场与粒子同向旋转。

$$c\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \ddot{\vec{p}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}, \quad \ddot{\vec{p}} = -e\omega^2(\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta + i\hat{\phi})e^{i(\phi - \omega t)}$$

51




● 低速圆周运动点电荷的平均辐射功率角分布为

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 a^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} (1 + \cos^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{e^2 a^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int (1 + \cos^2 \theta) d\Omega = \frac{16\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{e^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{2e_s^2 a^2}{3c^3}, \quad (e_s^2 \triangleq \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0})$$

➢ 对比一般情形下，非相对论点电荷的相应结果：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta, \quad P = \frac{2e_s^2 a^2}{3c^3}$$


$$\int (1 + \cos^2 \theta) d\Omega = \int_{-1}^1 (1 + \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{8}{3} \cdot 2\pi$$

52

三、磁偶极辐射

● 矢量势

$$\vec{A} = \frac{e^{ikr}}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} \ddot{\vec{m}} \times \hat{r}$$

● 电磁场

$$c\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{r}) \times \hat{r}, \quad \vec{E} = -\frac{e^{ikr}}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} \ddot{\vec{m}} \times \hat{r}$$

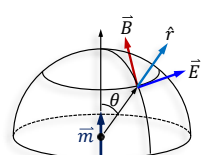
● 对时间平均的辐射能流与辐射总功率

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\ddot{\vec{m}} \times \hat{r}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \hat{r}, \quad \langle P \rangle = \frac{|\ddot{\vec{m}}|^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

$c\vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}, \quad \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^3 |\vec{B}|^2 \hat{r}, \quad \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \langle \vec{S} \rangle r^2$

53

定向磁偶极子的电磁场结构

$$\begin{cases} c\vec{B} = -\frac{\omega^2 m_0 \sin \theta e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} \hat{\theta} \\ \vec{E} = \frac{\omega^2 m_0 \sin \theta e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} \hat{\phi} \end{cases}$$


辐射场是线偏振的TEM (电纬磁经)

54

关于辐射功率的证明

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r} &= (\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}) \times \hat{r} = (n_i \ddot{D}_{im} \hat{x}_m) \times n_j \hat{x}_j = n_i n_j \ddot{D}_{im} \hat{x}_m \times \hat{x}_j \\ \Rightarrow \oint |\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2 d\Omega &= \ddot{D}_{im}^* \ddot{D}_{kn} (\delta_{mn} \delta_{jl} - \delta_{ml} \delta_{jn}) \oint n_i n_j n_k n_l d\Omega \\ &= (n_i n_j \ddot{D}_{im}^* \hat{x}_m \times \hat{x}_j) \cdot (n_k n_l \ddot{D}_{kn} \hat{x}_n \times \hat{x}_l) \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \Rightarrow \oint |\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2 d\Omega &= \frac{4\pi}{15} \ddot{D}_{im}^* \ddot{D}_{kn} (4\delta_{ik} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kn}) \\ &= \frac{4\pi}{15} (4\ddot{D}_{in}^* \ddot{D}_{in} - \ddot{D}_{ik}^* \ddot{D}_{ki} - \ddot{D}_{il}^* \ddot{D}_{li}) = \frac{4\pi}{5} \ddot{D}_{ij}^* \ddot{D}_{ij} = \frac{4\pi}{5} |\ddot{\vec{D}}|^2 \\ \Rightarrow \langle P \rangle &= \frac{1}{1152\pi^2 \epsilon_0 c^5} \oint |\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2 d\Omega = \frac{|\ddot{\vec{D}}|^2}{1440\pi \epsilon_0 c^5} \end{aligned}$$

58

【例】 计算图示场源的辐射场与辐射功率，

其中 $Q = Q_0 e^{-i\omega t}$, $R \ll \lambda = 2\pi c/\omega$.

【解】 电偶极矩和磁偶极矩均为零，
因而辐射的主要贡献来自电四极辐射。



$$I = \dot{Q} = -iI_m e^{-i\omega t}, \quad (I_m = \omega Q_0)$$

$$\ddot{\vec{D}} = 6QR^2(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})$$

$$\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} = 6QR^2(n_x \hat{y} + n_y \hat{x}), \quad (\hat{r} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z})$$

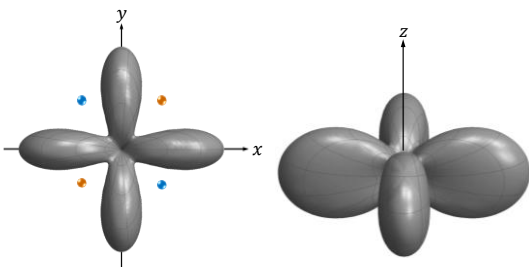
$$\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r} = 6QR^2[n_x n_z \hat{x} - n_y n_z \hat{y} + (n_y^2 - n_x^2) \hat{z}]$$

$$\begin{aligned} |\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2 &= 36\omega^4 I_m^2 R^4 [(n_x^2 + n_y^2)n_z^2 + (n_y^2 - n_x^2)^2] \\ &= 36\omega^4 I_m^2 R^4 [\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)^2] \\ &= 36\omega^4 I_m^2 R^4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \sin^2 2\phi) \end{aligned}$$

59

平面电四极子的能流及方向性

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2}{1152\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \hat{r} = \frac{\omega^4 I_m^2 R^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \sin^2 2\phi)$$



60

平面电四极子的辐射功率和辐射电阻

辐射总功率:

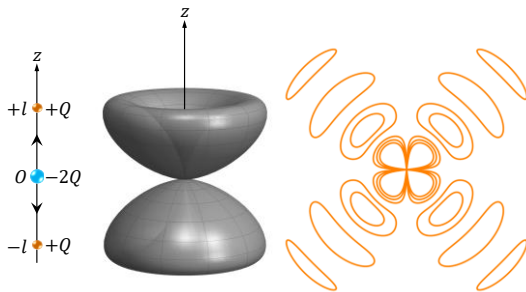
$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \oint \left| \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \right) \right| r^2 d\Omega \\ &= \frac{\omega^4 I_m^2 R^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta (1 - \sin^2 \theta \sin^2 2\phi) \\ &= \frac{\omega^4 I_m^2 R^4}{20\pi \epsilon_0 c^5} = \frac{4}{5\epsilon_0 c} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 I_m^2 = \frac{4}{5} \pi^3 \left[\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 I_m^2 \right] \triangleq \frac{1}{2} R_r I_m^2 \\ &\qquad\qquad\qquad \mu_0 c \approx 120\pi \approx 377 (\Omega) \end{aligned}$$

辐射电阻:

$$R_r \triangleq \frac{8\pi^3}{5} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 \approx 1.87 \times 10^4 \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 (\Omega)$$

61

【例】 计算图示场源的辐射场与辐射功率，其中 $Q = Q_0 e^{-i\omega t}$ 。



62

几点说明

- 对于电偶极矩为零的谐振电流，必须同时考虑磁偶极辐射和电四极辐射，除非其中一项也为零。

- 电磁势、电磁场可以叠加，例如

$$\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \left[\ddot{\vec{p}} \times \hat{r} + \frac{1}{c} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r} \right]$$

- 辐射场的能流和辐射功率角分布不满足叠加原理。

- 不过，平均的总辐射功率满足

$$\langle P \rangle = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} + \frac{|\ddot{\vec{m}}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^5} + \frac{|\ddot{\vec{D}}|^2}{1440\pi\epsilon_0 c^5}$$

事实上，除以上三项外， $\langle P \rangle$ 的表达式还会出现交叉项对立体角的积分，但是可证这些积分均为零。用到

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

63

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{(\vec{p}^* \times \hat{r}) \cdot [(\vec{m} \times \hat{r}) \times \hat{r}]\} = \operatorname{Re}[\hat{r} \cdot (\vec{p}^* \times \vec{m})] \\ \operatorname{Re}\{(\vec{p}^* \times \hat{r}) \cdot [(\hat{r} \cdot \vec{D}) \times \hat{r}]\} = \operatorname{Re}[\hat{r} \cdot \vec{D} \cdot \vec{p}^* - (\hat{r} \cdot \vec{D} \cdot \hat{r})(\hat{r} \cdot \vec{p}^*)] \\ \operatorname{Re}\{[(\vec{m}^* \times \hat{r}) \times \hat{r}] \cdot [(\hat{r} \cdot \vec{D}) \times \hat{r}]\} = \operatorname{Re}[\hat{r} \cdot \vec{D} \cdot (\vec{m}^* \times \hat{r})] \\ \hspace{15em} = \operatorname{Re}[n_i n_l D_{ij} m_k^* \hat{x}_j \cdot (\hat{x}_k \times \hat{x}_l)] \end{cases}$$

① 前两个交叉项对立体角的积分是如下两项之组合，故为零：
 $\oint n_i d\Omega = 0, \quad \oint n_i n_j n_k d\Omega = 0$

② 最后一个交叉项对立体角的积分为：

$$\epsilon_{jkl} \operatorname{Re}[D_{ij} m_k^*] \oint n_i n_l d\Omega \sim \epsilon_{ijk} \operatorname{Re}[D_{ij} m_k^*] \delta_{il} = \epsilon_{ijk} \operatorname{Re}[D_{ij} m_k^*] = 0$$

$$\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \left[\ddot{\vec{p}} \times \hat{r} + \frac{1}{c} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r} \right]$$

64

65

66
