CH7. 电磁波的辐射

1

§1 推迟势

2

一、电动力学的基本方程

- 描述电磁场的基本动力学变量是电磁势

$$A^\alpha = \left(\varphi/c,\ \vec{A}\right)$$

  - 由规范变换相联系的电磁势是彼此等价的

$$A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \psi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi' = \varphi - \partial_t \psi \\ \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \end{cases}$$

  - 电磁场由电磁势如下确定

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

3

- 电动力学的基本方程（麦克斯韦方程）为

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 \boxed{J^\beta}^{(\rho c,\ \vec{J})} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{B} - \boxed{\mu_0\varepsilon_0}^{c^{-2}}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

  - 将 $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ 代入方程，即得

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta(\partial_\alpha A^\alpha) = \Box A^\beta - \partial^\beta L = -\mu_0 J^\beta$$

  - 在洛伦茨规范下，电磁势满足方程

$$\begin{cases} \Box\varphi = \nabla^2\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon_0 \\ \Box\vec{A} = \nabla^2\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \\ L \triangleq \partial_\alpha A^\alpha = \nabla\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$\Box\psi(t,\vec{x}) = -f(t,\vec{x})$

一般解
= 特解 + 齐次波动方程解

对具有适当衰减行为的源，
推迟解自动规范条件 $L = 0$。

二、波动方程的格林函数

- 定义**波动方程的时空格林函数** $G(t,\vec{x};t',\vec{x}')$：

$$\Box G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = -\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\delta(t-t')$$

  - 要求：当 $|\vec{x}-\vec{x}'| \longrightarrow \infty$ 时 $G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = 0$。
  - 满足这两条件的格林函数不是唯一的。
- 知道了一个格林函数，就可得到方程 $\Box\psi = -f$ 的一个解：

$$\psi(t,\vec{x}) = \int dt' d^3x'\, G(t,\vec{x};t',\vec{x}')\, f(t',\vec{x}')$$

  - 前提是该积分收敛。假设始终如此，这意味着源是局域的：即对于任意 t，当 $|\vec{x}| \longrightarrow \infty$ 时 $f(t,\vec{x})$ 足够快地趋于零。
  - 与格林函数一样，$\Box\psi = -f$ 的解不是唯一的。

- 目的：寻找某个具有明确物理含义的格林函数。
  - 该格林函数直接联系于 δ-函数点源激发的场 。
  - 不妨设格林函数仅与时空位移 $(t-t', \vec{x}-\vec{x}')$ 有关。
- 下面利用傅里叶变换方法求解 $G(t,\vec{x};t',\vec{x}')$。
  - 为简化符号，暂令 $t' = 0 = \vec{x}'$。即我们将求解方程

$$\begin{cases} \Box G(t,\vec{x}) = -\delta^3(\vec{x})\delta(t) \\ G(t,\vec{x}) = 0 \quad \text{when } r = |\vec{x}| \longrightarrow \infty \end{cases}$$

  - 对所得 $G(t,\vec{x})$，作如下替换即可得一个 $G(t,\vec{x};t',\vec{x}')$：

$$t \longrightarrow t - t', \qquad \vec{x} \longrightarrow \vec{x} - \vec{x}'$$

补充：傅里叶变换

- 可积函数 $F(x)$ 的傅里叶变换 $\tilde{F}(k)$ 定义为

$$\tilde{F}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,F(x)e^{-ikx}$$

  - 对 ∞ 处足够快衰减的光滑函数 $F(x)$，存在傅里叶反变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\tilde{F}(k)\overset{\text{基函数}}{\boxed{e^{ikx}}}$$

- 对于时间函数 $F(t)$，其傅里叶变换和反变换通常定义为

$$\tilde{F}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\,F(t)e^{i\omega t},\quad F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\tilde{F}(\omega)\overset{\text{基函数}}{\boxed{e^{-i\omega t}}}$$

$$\vec{E}(t,\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k\int d\omega\boxed{\vec{E}\left(\omega,\vec{k}\right)e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}}\ \text{单色平面波}$$

分布的傅里叶变换

只要合适解释所得表达式，傅里叶变换的理论也适用于分布。

- 譬如，δ-函数 $\delta_a(x)=\delta(x-a)$ 的傅里叶变换及其反变换为

$$\begin{cases}\tilde{\delta}_a(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\delta_a(x)e^{-ikx}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ika}\\ \delta_a(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\tilde{\delta}_a(k)e^{ikx}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ik(x-a)}\end{cases}$$

  - 当 $a=0$ 时给出： 如何理解?

$$\begin{cases}\boxed{\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ikx},} & \tilde{\delta}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\\ \boxed{\delta(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,e^{-i\omega t},} & \tilde{\delta}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\end{cases}$$

- 应在分布意义下理解 δ-函数与其傅里叶变换之间的关系。
  - 对于 $x\longrightarrow\pm\infty$ 时足够快衰减的任一光滑函数 $F(x)$

$$\begin{aligned}\delta(F)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}dx\,F(x)e^{ikx}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\tilde{F}(-k)}\quad\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\tilde{F}(k)\\&=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\tilde{F}(k)e^{ik\cdot 0}}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad\delta(F)=F(0)$$

$$\begin{cases}\boxed{F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\tilde{F}(k)\,e^{ikx}}\\ \tilde{F}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dx\,F(x)\,e^{-ikx}},\end{cases}\qquad\begin{cases}\boxed{\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ikx}}\\ \tilde{\delta}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\end{cases}$$

- 也可如下理解 δ-函数与其傅里叶变换之间的关系。

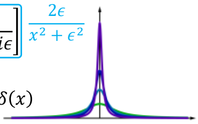
$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \int_{0}^{\infty} dk\, e^{ikx} + \boxed{\int_{-\infty}^{0} dk\, e^{ikx}}\ \int_{0}^{\infty} dk\, e^{-ikx}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{0}^{\infty} dk\, e^{ik(x+i\epsilon)} + \int_{0}^{\infty} dk\, e^{-ik(x-i\epsilon)}\right]$$

此处，收敛因子 $\epsilon > 0$ 使得 $k \longrightarrow \infty$ 时被积函数趋于零。

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \lim_{\epsilon\to 0}\boxed{\left[\frac{i}{x+i\epsilon} - \frac{i}{x-i\epsilon}\right]}\ \frac{2\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2} = \delta(x)$$



$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}, \qquad \tilde{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

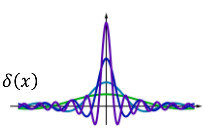
- 还可如下理解 δ-函数与其傅里叶变换之间的关系。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} dk\, e^{ikx}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{\boxed{e^{iNx} - e^{iNx}}}{ix}\ 2i\sin Nx$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \lim_{N\to\infty}\frac{2\sin Nx}{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x} = \delta(x)$$



$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}, \qquad \tilde{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

柯西积分主值

- 柯西主值是一个分布，由其对任意函数 $f(x)$ 的作用定义。如

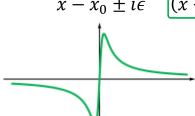
$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{f(x)}{x-x_0} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} dx\, \frac{f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+\epsilon}^{\infty} dx\, \frac{f(x)}{x-x_0}\right]$$

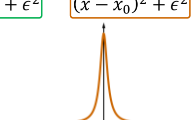
- 关于主值的一个重要的应用是**普莱姆利（Plemelj）公式**

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x-x_0\pm i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x-x_0} \mp i\pi\delta(x-x_0)$$

  - 其含义由各项乘任意 $f(x)$、并对 x 从 $-\infty$ 至 ∞ 积分给出。

$$\frac{1}{x-x_0\pm i\epsilon} = \boxed{\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}} \mp i\boxed{\frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}}$$





实函数的傅里叶变换

- 如果 $f(t)$ 是实函数，则有

$$f^*(t) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}^*(\omega) = \tilde{f}(-\omega)$$

> **实函数的傅里叶变换，其实部（虚部）为偶（奇）函数。**

$$\tilde{f}^*(\omega) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}\right]^*$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega t}$$

$$= \tilde{f}(-\omega)$$

13

傅里叶变换的导数

- 对有合适渐近行为的光滑函数 $F(x)$，其导数的傅里叶变换为

$$\widetilde{\frac{dF}{dx}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \boxed{\frac{dF}{dx}(x)e^{-ikx}} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\frac{dF}{dx}}(k) = ik\tilde{F}(k)$$

$$\text{积分为零}\ \boxed{\frac{d}{dx}\left[F(x)e^{-ikx}\right]} - F(x)\underbrace{\boxed{\frac{d}{dx}e^{-ikx}}}_{-ike^{-ikx}}$$

> **利用傅里叶变换，常系数偏微分方程可转化为代数方程。**

- 时空函数对时空坐标的导数转化了其傅里叶变换的代数乘法

$$\nabla \ \mapsto\ i\vec{k}\,, \qquad \partial_t \ \mapsto\ -i\omega$$

$$\Box\psi(t,\vec{x}) = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(t,\vec{x}) \ \mapsto\ \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\tilde{\psi}\left(\omega,\vec{k}\right)$$

14

卷积定理

- 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的**卷积** $h(t)$ 定义为

$$h(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t-t')g(t') \quad \Rightarrow \quad \tilde{h}(\omega) = \sqrt{2\pi}\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)$$

> 如： $\psi(t,\vec{x}) = \int dt' d^3x'\, G(t-t',\vec{x}-\vec{x}')\, f(t',\vec{x}')$。

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega(t-t')}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \tilde{g}(\omega')\, e^{-i\omega' t'}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \tilde{g}(\omega') \underbrace{\boxed{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{i(\omega-\omega')t'}\right]}}_{\delta(\omega-\omega')}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \overbrace{\boxed{\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)}}^{\tilde{h}(\omega)/\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{h}(\omega)e^{-i\omega t}$$

15

帕塞瓦尔（Parseval）定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde f^*(\omega)\tilde g(\omega)\,d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde f(\omega)\, e^{-i\omega t}\right]^* \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \tilde g(\omega')\, e^{-i\omega' t}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde f^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \tilde g(\omega') \underbrace{\boxed{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega-\omega')t}\right]}}_{\delta(\omega-\omega')}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde f^*(\omega)\tilde g(\omega)$$

16

三、由傅里叶变换求格林函数

- 方程 $\Box G(t,\vec x) = -\delta^3(\vec x)\delta(t)$ 中诸项作傅里叶变换，给出

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\tilde G\left(\omega,\vec k\right) = -\frac{1}{(2\pi)^2}, \qquad \left(k = \left|\vec k\right|\right)$$

  - 这一频域代数方程方程等价于

$$\Box\left[\tilde G\left(\omega,\vec k\right) e^{i\left(\vec k\cdot\vec x-\omega t\right)}\right] = -\frac{1}{4\pi^2} e^{i\left(\vec k\cdot\vec x-\omega t\right)}$$

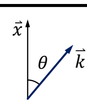
  - 格林函数的频域解为

$$\tilde G\left(\omega,\vec k\right) = -\frac{c^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{\omega^2-k^2c^2}$$

$$\tilde G\left(\omega,\vec k\right) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dt\int d^3x\, G(t,\vec x)e^{-i\left(\vec k\cdot\vec x-\omega t\right)}, \qquad \tilde\delta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \tilde\delta(k)$$

17

- 将频域解代回逆变换公式



$$G(t,\vec x) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int d\omega\, e^{-i\omega t}\int \overbrace{\boxed{d^3k}}^{k^2\sin\theta\, dk d\theta d\phi}\frac{e^{i\vec k\cdot\vec x}}{\omega^2-k^2c^2}$$

$$= -\frac{c^2}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\int_0^{\infty}\frac{k^2dk}{\omega^2-k^2c^2}\underbrace{\boxed{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, e^{ikr\cos\theta}}}_{\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{ikr} = \frac{2\sin kr}{kr}}$$

$$\Longrightarrow\quad G(t,\vec x) = -\frac{c^2}{4\pi^3 r}\int_0^{\infty} dk\, k\sin kr \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-k^2c^2}}}_{I(t,k)}$$

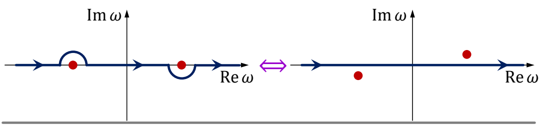
在 $\omega = \pm kc$ 处
存在对数发散

$$G(t,\vec x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\omega\int d^3k\, \tilde G\left(\omega,\vec k\right) e^{i\left(\vec k\cdot\vec x-\omega t\right)}, \qquad \tilde G\left(\omega,\vec k\right) = -\frac{c^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{\omega^2-k^2c^2}$$

18

1. 格林函数的正规化

- 频域格林函数存在奇点 $\omega = \pm kc$，因此 $I(t,k)$ 是不确定的。
  - 这反映了一个事实，格林函数 $G(t,\vec{x})$ 并不唯一。
  - 除非提供关于 G 的额外信息，否则无法解出$G(t,\vec{x})$ 。
- 这一困难可通过对积分 $I(t,k)$ 进行适当正规化来解决。
  - 一种简单方法是将极点 $\omega = \pm ck$ 无限小移到复ω-平面内。



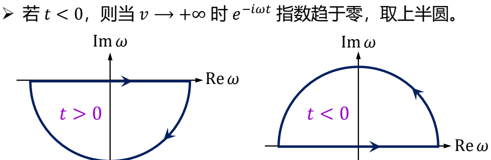
$$G(t,\vec{x}) = -\frac{c^2}{4\pi^3 r}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, I(t,k) k \sin kr\,,\qquad I(t,k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2c^2}$$

19

- 复ω平面内，将积分改为围道积分：实轴+无限大半圆

$$I(t,k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2c^2} = \oint d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2c^2}$$

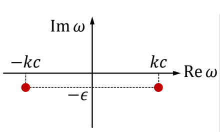
  - 令 $\omega = u + iv$，则 $e^{-i\omega t} = e^{-iut}e^{vt}$。
  - 若 $t > 0$，则当 $v \longrightarrow -\infty$ 时 $e^{-i\omega t}$ 指数趋于零，取下半圆。
  - 若 $t < 0$，则当 $v \longrightarrow +\infty$ 时 $e^{-i\omega t}$ 指数趋于零，取上半圆。



$$G(t,\vec{x}) = -\frac{c^2}{4\pi^3 r}\int_{0}^{\infty} dk\, I(t,k) k \sin kr\,,\qquad I(t,k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2c^2}$$

20

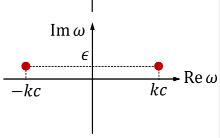
不同的正规化给出不同的格林函数



推迟格林函数

retarded Green's function

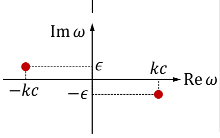
$$\tilde{G}_{\text{ret}}\left(\omega,\vec{k}\right) = -\frac{c^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{(\omega - ck + i\epsilon)(\omega + ck + i\epsilon)}$$



超前格林函数

advanced Green's function

$$\tilde{G}_{\text{adv}}\left(\omega,\vec{k}\right) = -\frac{c^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{(\omega - ck - i\epsilon)(\omega + ck - i\epsilon)}$$



费曼传播子

Feynman propagator

$$\tilde{G}_{\text{F}}\left(\omega,\vec{k}\right) = -\frac{c^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{(\omega - ck + i\epsilon)(\omega + ck - i\epsilon)}$$

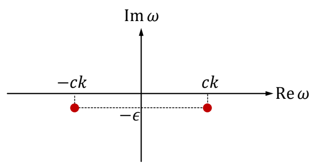
21

2. 推迟格林函数

- 将两个极点都向下移动无穷小距离，由此定义**推迟格林函数**

$$I(t,k)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega-ck+i\epsilon)(\omega+ck+i\epsilon)}$$

➢ 其中 $\epsilon>0$，且在积分完成后取极限 $\epsilon\longrightarrow 0$。



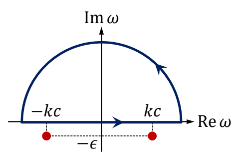
$$\tilde{G}_{\mathrm{ret}}\left(\omega,\vec{k}\right)=-\frac{c^2}{4\pi^2}\frac{1}{(\omega-ck+i\epsilon)(\omega+ck+i\epsilon)}=-\frac{c^2}{4\pi^2}\frac{1}{\omega^2-k^2c^2+i\epsilon\omega}$$

22

- 当 $t<0$ 时，被积函数在上半平面指数衰减。

$$I(t,k)=0,\qquad \text{for}\ \ t<0$$

$$\Longrightarrow\quad G_{\mathrm{ret}}(t,\vec{x})=0,\qquad \text{for}\ \ t<0$$



➢ 此条件唯一地表征了推迟格林函数。
在 $t=0$ 时刻的 δ-函数源“开启”之前为零。

➢ 推迟格林函数提供了无入射辐射情形下具有物理意义的解。
无入射辐射：源出现之前不存在辐射。

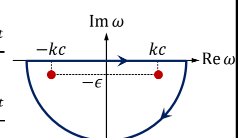
$$I(t,k)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega-ck+i\epsilon)(\omega+ck+i\epsilon)}$$

23

- 当 $t>0$ 时，被积函数在下半平面指数衰减。

$$\mathrm{Res}_1=\lim_{\omega\to ck-i\epsilon}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+ck+i\epsilon}=\frac{e^{-i(ck-i\epsilon)t}}{2ck}$$

$$\mathrm{Res}_2=\lim_{\omega\to -ck-i\epsilon}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-ck+i\epsilon}=\frac{e^{i(ck+i\epsilon)t}}{-2ck}$$



$$I(t,k)=-2\pi i\cdot\boxed{\frac{e^{-i(ck-i\epsilon)t}-e^{i(ck+i\epsilon)t}}{2ck}}\ \ \frac{-2i\sin kct}{2ck}e^{-\epsilon t}$$

$$\Longrightarrow\quad I(t,k)=-2\pi\frac{\sin kct}{kc},\qquad \text{for}\ \ t>0$$

$$I(t,k)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega-ck+i\epsilon)(\omega+ck+i\epsilon)}$$

24

● 由傅里叶反变换给出 $\boxed{t>0}$ 时的格林函数为

$$G_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = +\frac{c}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dk\,\boxed{\sin kct\sin kr}$$

$$\sin kct\sin kr = \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{2i}\cdot\frac{e^{ikct}-e^{-ikct}}{2i}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[e^{ik(r+ct)}+e^{-ik(r+ct)}-e^{ik(r-ct)}-e^{-ik(r-ct)}\right]$$

$$\Longrightarrow\quad G_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = -\frac{c}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dk\left[e^{ik(r+ct)}-e^{ik(r-ct)}\right]$$

$$= -\frac{c}{4\pi r}\left[\boxed{\delta(r+ct)}-\boxed{\delta(r-ct)}\right]\quad \frac{1}{c}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$\Longrightarrow\quad G_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right),\qquad \text{for }\ t>0$$

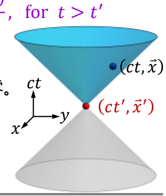
$$G_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = -\frac{c^2}{4\pi^3 r}\int_0^\infty dk\, I(t,k)k\sin kr\,,\qquad I(t>0,k) = -2\pi\frac{\sin kct}{kc}$$

25

● 作替换 $t\longrightarrow t-t'$、$\vec{x}\longrightarrow\vec{x}-\vec{x}'$，就得到**推迟格林函数**

$$G_{\text{ret}}(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \begin{cases} 0, & \text{for }\ t<t' \\ \dfrac{\delta(t-t'-|\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}, & \text{for }\ t>t' \end{cases}$$

- G_{ret} 仅在源点$(t',\vec{x}')$的未来光锥上非零，即只有当 $|\vec{x}-\vec{x}'|=c(t-t')$ 时不为零非零。
- 满足方程 $\Box\psi=-f$ 的场，若早期为零，然后在 $(t',\vec{x}')$ 处放置一个δ 函数源，则由此产生的场恰好以光速 c 传播出去。



$$G_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{for }\ t<0 \\ \dfrac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\dfrac{r}{c}\right), & \text{for }\ t>0 \end{cases}$$

26

推迟解

● 方程 $\Box\psi=-f$ 的**推迟解**：利用推迟格林函数得到的解

$$\psi(t,\vec{x}) = \int dt'd^3x'\ G_{\text{ret}}(t,\vec{x};t',\vec{x}')\,f(t',\vec{x}')$$

$$\Longrightarrow\quad \psi(t,\vec{x}) = \int d^3x'\ \frac{f(t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c\,,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

- 定义**相对位矢** $\vec{\mathbb{R}}$ 和**推迟时间** t_r：

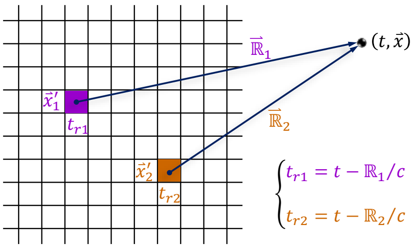
$$\begin{cases} \vec{\mathbb{R}} \triangleq \vec{x}-\vec{x}' \\ t_r \triangleq t-\mathbb{R}/c \end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \psi(t,\vec{x}) = \int d^3x'\ \frac{f(t_r,\vec{x}')}{4\pi\mathbb{R}}$$

- 推迟时间 t_r 不是独立变量，而是 t、$\vec{x}$ 和 $\vec{x}'$ 的函数。

$$G_{\text{ret}}(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \begin{cases} 0, & \text{for }\ t<t' \\ \dfrac{\delta(t-t'-|\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}, & \text{for }\ t>t' \end{cases}$$

27

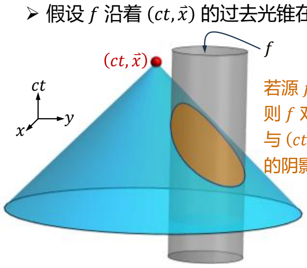
- 推迟解中，源在推迟时间取值。
  - 不同位置的源对应不同的推迟时间。



$$\begin{cases} t_{r1} = t - \mathbb{R}_1/c \\ t_{r2} = t - \mathbb{R}_2/c \end{cases}$$

$$\psi(t,\vec{x}) = \int d^3x' \frac{f(t_r,\vec{x}')}{4\pi\mathbb{R}}, \quad t_r = t - \frac{\mathbb{R}}{c}$$

- 积分并非在某个时刻对整个空间进行，而是在 $(ct,\vec{x})$ 的过去光锥上进行的。
  - 假设 f 沿着 $(ct,\vec{x})$ 的过去光锥在无穷远处衰减足够快。



若源 f 仅在图示“世界管”中非零，则 f 对积分的贡献来自 f 的世界管与 $(ct,\vec{x})$ 的过去光锥的交集所对应的阴影区域。

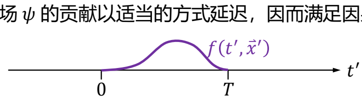
$$\psi(t,\vec{x}) = \int d^3x' \frac{f(t_r,\vec{x}')}{4\pi\mathbb{R}}, \quad t_r = t - \frac{\mathbb{R}}{c}$$

用推迟格林函数表示的一般解

- 方程 $\Box\psi = -f$ 的一般解可以用推迟格林函数表示为

$$\psi(t,\vec{x}) = \underbrace{\boxed{\psi_{\text{in}}(t,\vec{x})}}_{\text{满足齐次波动方程}} + \underbrace{\boxed{\int dt'd^3x'\, G_{\text{ret}}(t,\vec{x};t',\vec{x}')\, f(t',\vec{x}')}}_{\text{推迟解}}$$

- 若设源 $f(t',\vec{x}')$ 在时间和空间中都是定域分布的，则
  - $\psi(t\longrightarrow-\infty,\vec{x}) = \psi_{\text{in}}(t,\vec{x})$，即 ψ_{in} 为**入射辐射**，该项表示在源开启之前很久，就有一个初始信号。
  - 仅当 $t = t' + \mathbb{R}/c$ 时，源才会对 $\vec{x}$ 处的场提供额外贡献。
  - 源对场 ψ 的贡献以适当的方式延迟，因而满足因果律。

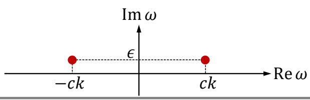


3. 超前格林函数

- 将两个极点都向上移动无穷小距离，将得到超前格林函数

$$G_{\mathrm{adv}}(t,\vec{x};t',\vec{x}')=\begin{cases}\dfrac{\delta(t-t'+|\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}, & \text{for } t<t'\\ 0, & \text{for } t>t'\end{cases}$$

  - 超前格林函数的特征是它在 $t>t'$ 时为零。
  - 超前与推迟格林函数满足 $G_{\mathrm{adv}}(t,\vec{x};t',\vec{x}')=G_{\mathrm{ret}}(t',\vec{x}';t,\vec{x})$



$$\tilde{G}_{\mathrm{adv}}\left(\omega,\vec{k}\right)=-\frac{c^2}{4\pi^2}\frac{1}{(\omega-ck-i\epsilon)(\omega+ck-i\epsilon)}=-\frac{c^2}{4\pi^2}\frac{1}{\omega^2-k^2c^2-i\epsilon\omega}$$

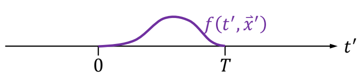
31

用超前格林函数表示的一般解

- 方程 $\Box\psi=-f$ 的一般解可以用超前格林函数表示为

$$\psi(t,\vec{x})=\underbrace{\boxed{\psi_{\mathrm{out}}(t,\vec{x})}}_{\text{满足齐次波动方程}}+\underbrace{\boxed{\int dt'd^3x'\;G_{\mathrm{adv}}(t,\vec{x};t',\vec{x}')\,f(t',\vec{x}')}}_{\text{超前解}}$$

- 若设源 $f(t',\vec{x}')$ 在时间和空间中都是定域分布的，则
  - $\psi(t\longrightarrow+\infty,\vec{x})=\psi_{\mathrm{out}}(t,\vec{x})$，即 ψ_{out} 为**出射辐射**，它是在 $t\longrightarrow+\infty$ 的过程中逐步建立的。
  - G_{adv} 保证了，在切断源之后，场 ψ 不再接受任何贡献，即源就不再发出信号；此后所有信息都包含在了 ψ_{out} 中。



32

- 场既可用推迟格林函数解表示，也可用超前格林函数解表示。没有令人信服的数学理由选择推迟或超前格林函数。
- 在无限空间中
  - 物理上不可能指定超前解所需的最终状态条件。
  - 故推迟解总是被用于研究空间局域源在其他位置产生的场

$$\psi(t,\vec{x})=\underbrace{\boxed{\psi_{\mathrm{in}}(t,\vec{x})}}_{\text{外场贡献}}+\underbrace{\boxed{\int dt'd^3x'\;G_{\mathrm{ret}}(t,\vec{x};t',\vec{x}')\,f(t',\vec{x}')}}_{\text{源的贡献}}$$

- 对于非齐次波动方程 $\Box\psi=-f$，真正重要的解是

$$\psi(t,\vec{x})=\int d^3x'\,\frac{f(t_r,\vec{x}')}{4\pi\mathbb{R}}=\int d^3x'\,\frac{f(t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

33

四、推迟势

- 根据前面的讨论，给定电荷、电流分布激发的电磁势为

$$A^{\alpha}(t,\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{J^{\alpha}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

  - 称其为**推迟势**。其中 t_r 称为**推迟时间**，其定义为

$$t_r \triangleq t-\mathbb{R}/c=t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c$$

- 利用 $J^{\alpha}=(\rho c,\vec{J})$ 和 $c^2=1/(\varepsilon_0\mu_0)$，可得推迟标势和矢势：

$$\begin{cases}\varphi(t,\vec{x})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int dV'\,\frac{\rho(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}\\[2ex] \vec{A}(t,\vec{x})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int dV'\,\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}\end{cases}$$

  - 推迟势满足麦克斯韦方程，还须证明其满足洛伦茨规范条件。

34

推迟势满足洛伦茨规范条件 $L=\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

$$L=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int dV'\underbrace{\boxed{\nabla\cdot\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}}}_{-\nabla'\cdot\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}+\frac{1}{\mathbb{R}}\left[\nabla'\cdot\vec{J}(t_r,\vec{x}')\right]_{t_r}}+\int dV'\,\frac{1}{\mathbb{R}}\underbrace{\boxed{\frac{\partial\rho(t_r,\vec{x}')}{\partial t}}}_{\frac{\partial\rho(t_r,\vec{x}')}{\partial t_r}}\right]$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla'\cdot\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\boxed{\left[\nabla'\cdot\vec{J}(t_r,\vec{x}')\right]_{t_r}+\partial\rho(t_r,\vec{x}')/\partial t_r}}{\mathbb{R}}$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint d\vec{\sigma}'\cdot\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}=0$$

$$\varphi(t,\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\frac{\rho(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}},\quad \vec{A}(t,\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

35

另一角度看待推迟势的物理含义

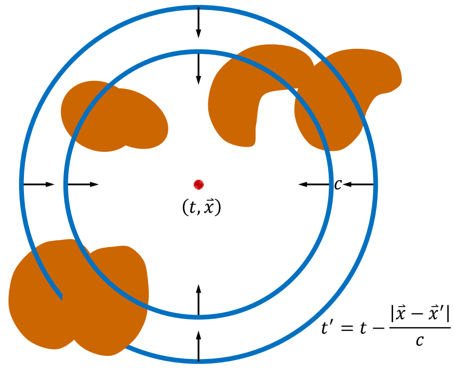
时空点 $(t,\vec{x})$ 处的推迟势可视为是通过以下方式得到的：

- 想象一个以 $\vec{x}$ 为中心、无限大的信息收集球面。
  - 该球面的半径以速度 c 减小，并在 t 时刻变为零。
- 当球面在 t_r 时刻扫过某个空间区域时，当时（t_r）存在的电荷和电流密度除以 $\mathbb{R}$，并加到已经积累的电磁势上

$$d\varphi(t,\vec{x})=\frac{\rho(t_r,\vec{x}')dV'}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}},\qquad d\vec{A}(t,\vec{x})=\frac{\mu_0\vec{J}(t_r,\vec{x}')dV'}{4\pi\mathbb{R}}$$

- 当球面在 t 时到达 $\vec{x}$ 处时，累积电磁势与 $\vec{x}$ 处的观察者在该特定时间所经历的电磁势相对应。

36

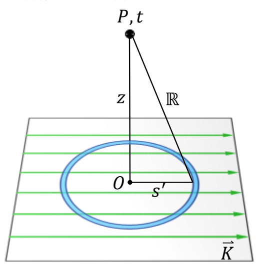


37

【例】 从 $t=0$ 时刻开始，在电中性的 xy 平面上出现均匀但却随时间变化的面电流，即

$$\vec{K}(t) = \vec{K}_0(t)\Theta(t)$$

试确定该电流分布激发的电磁场。



38

【解】 标量势为零。矢量势为

$$\vec{A}(t,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\infty} s'ds'\,\frac{\vec{K}(t-\mathbb{R}/c)}{\mathbb{R}}$$

由关系 $\mathbb{R}^2 = s'^2 + z^2$ 求微分可得 $\mathbb{R}d\mathbb{R} = s'ds'$，因而

$$\vec{A}(t,z) = \frac{\mu_0}{2}\int_{|z|}^{\infty}\vec{K}(t-\mathbb{R}/c)d\mathbb{R}$$

由于当 $t < \mathbb{R}/c$ 时被积函数为零，因此，

$$\vec{A}(t,z) = \frac{\mu_0}{2}\int_{|z|}^{ct}\vec{K}\underbrace{\boxed{(t-\mathbb{R}/c)}}_{\xi}d\mathbb{R} = \frac{\mu_0 c}{2}\int_0^{t-|z|/c}\vec{K}(\xi)d\xi$$

39

- 下面计算电磁场

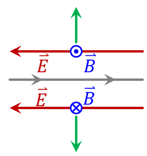
$$\vec{E}(t,z) = -\partial_t \vec{A}(t,z) \ \text{where}\ \vec{A}(t,z) = \frac{\mu_0 c}{2}\int_0^{t-|z|/c} \vec{K}(\xi)d\xi$$

$\Rightarrow$ $\vec{E}(t,z) = -\frac{\mu_0 c}{2}\vec{K}(t-|z|/c)$

$$\vec{B}(t,z) = \overset{\hat{z}\partial_z}{\boxed{\nabla}} \times \vec{A}(t,z) = \hat{z} \times \left[-\frac{1}{c} \overset{\mathrm{sgn}(z)}{\boxed{\frac{\partial |z|}{\partial z}}} \overset{-\vec{E}(t,z)}{\boxed{\partial_t \vec{A}(t,z)}} \right]$$

$\Rightarrow$ $c\vec{B}(t,z) = \mathrm{sgn}(z)\,\hat{z} \times \vec{E}(t,z)$

➢ **面电流激发的电磁场平行于 xy 平面，是背离 xy 平面传播的平面横电磁波。**



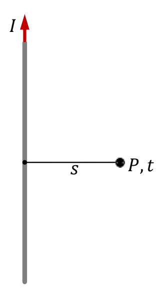
➢ 令 $\hat{n} = \mathrm{sgn}(z)\,\hat{z}$。当 $|z| \ll ct$ 时，有

$$\vec{B}(t,z) = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{K}(t - \boxed{|z|/c}) \times \hat{n} \approx \frac{1}{2}\mu_0 \vec{K}(t) \times \hat{n}$$

40

【思考】从 $t=0$ 时开始，电中性无限长直导线上出现均匀但却随时间变化的电流

$$I(t) = I_0(t)\Theta(t)$$



- 如果 $I_0(t) = const.$，试确定推迟势和电磁场，并给出 $s \ll ct$ 时的近似解。
- 如果 $I_0(t) = kt$，试确定推迟势和电磁场，并给出 $s \ll ct$ 时的近似解。

41

五、电磁场

下面暂记

$$f_r = f(t_r, \vec{x}'), \quad (t_r \triangleq t - \mathbb{R}/c)$$

由于

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1, \quad \nabla t_r = -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{c}$$

因而 f_r 对时间和空间的导数分别为

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} = \frac{\partial f_r}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\partial f_r}{\partial t_r}, \quad \nabla f_r = \frac{\partial f_r}{\partial t_r}\nabla t_r = -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{c}\frac{\partial f_r}{\partial t_r}$$

若记 $\dot{f}_r \triangleq \partial f_r/\partial t_r$，则上式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t} f_r = \dot{f}_r, \quad \nabla f_r = -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{c}\dot{f}_r$$

42

电场

将推迟势的表达式代入其定义中，即可得电磁场。电场为

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -\nabla\varphi(t,\vec{x}) - \partial_t \vec{A}(t,\vec{x})$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \underbrace{\boxed{\nabla\frac{\rho_r}{\mathbb{R}}}}_{\rho_r\nabla\frac{1}{\mathbb{R}}+\frac{\nabla\rho_r}{\mathbb{R}}} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \underbrace{\boxed{\partial_t\frac{\vec{J}_r}{\mathbb{R}}}}_{\partial_t\vec{J}_r}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \left(-\frac{\rho_r\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} - \frac{\dot{\rho}_r\hat{\mathbb{R}}}{c\mathbb{R}}\right) - \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\dot{\vec{J}}_r}{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \left(\rho_r\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} + \dot{\rho}_r\frac{\hat{\mathbb{R}}}{c\mathbb{R}} - \frac{\dot{\vec{J}}_r}{c^2\mathbb{R}}\right)$$

43

磁场

利用电磁势的定义，磁场为

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \nabla\times\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \,\nabla\times\frac{\vec{J}_r}{\mathbb{R}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \left[\left(\nabla\frac{1}{\mathbb{R}}\right)\times\vec{J}_r + \frac{1}{\mathbb{R}}\nabla\times\vec{J}_r\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \left[-\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\times\vec{J}_r + \frac{1}{\mathbb{R}}\underbrace{\boxed{\nabla t_r}}_{-\hat{\mathbb{R}}/c}\times\dot{\vec{J}}_r\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \left(\frac{\vec{J}_r}{\mathbb{R}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}_r}{c\mathbb{R}}\right)\times\hat{\mathbb{R}}$$

44

杰菲门科（Jefimenko）公式

综上，我们就给出了任意局域电荷、电流分布激发的电磁场

$$\begin{cases} \vec{E}(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int dV' \left(\rho_r\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} + \dot{\rho}_r\frac{\hat{\mathbb{R}}}{c\mathbb{R}} - \frac{\dot{\vec{J}}_r}{c^2\mathbb{R}}\right) \\ \vec{B}(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int dV' \left(\frac{\vec{J}_r}{\mathbb{R}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}_r}{c\mathbb{R}}\right)\times\hat{\mathbb{R}} \end{cases}$$

该结论与规范的选取无关，称为**杰菲门科公式**。

- 电磁场中 $\sim 1/\mathbb{R}^2$ 的项分别称为库仑场和毕奥-萨伐尔场，而 $\sim 1/\mathbb{R}$ 的项则称为辐射场。
- 体现了麦克斯韦方程组的完备性。
- 反映了源对场的贡献具有推迟效应。

45

四、时变电偶极子

1. 理想电偶极子的电荷、电流分布

静止的理想电偶极子 $\vec{p}$ 在空间任一点 $\vec{x}$ 处激发的静电势为:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}$$

其电荷体密度可由静电势满足的泊松方程得到: $-4\pi\delta^3(\vec{x})$

$$\rho(\vec{x}) = -\varepsilon_0\nabla^2\varphi(\vec{x}) \ = \frac{1}{4\pi}\vec{p}\cdot\nabla\boxed{\left(\nabla^2\frac{1}{r}\right)}$$

从而【参考教材习题2.2】

$$\rho(\vec{x}) = -\vec{p}\cdot\nabla\delta^3(\vec{x})$$

46

- 原点处随时间变化的理想电偶极子 $\vec{p}(t)$，其电荷体密度为:

$$\rho(t,\vec{x}) = -\vec{p}(t)\cdot\nabla\delta^3(\vec{x}) \ = -\nabla\left[\vec{p}(t)\delta^3(\vec{x})\right]$$

- 由连续性方程

$$\nabla\cdot\vec{J}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}) = \nabla\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{p}(t)\delta^3(\vec{x})\right]$$

可知，时变理想电偶极子 $\vec{p}(t)$ 的体电流密度为:

$$\vec{J}(t,\vec{x}) = \dot{\vec{p}}(t)\delta^3(\vec{x})$$

47

---

2. 理想电偶极子的电磁势与电磁场

- 理想电偶极子的矢量势为

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\dot{\vec{p}}(t-\mathbb{R}/c)\delta^3(\vec{x}')}{\mathbb{R}}dV' \ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\dot{\vec{p}}_r}{r}$$

其中 $\vec{p}_r = \vec{p}(t_r)$，而 $t_r = t - r/c$。

- 类似可得标量势（请自行给出）。或根据 Lorenz 规范条件:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -c^2\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{\dot{\vec{p}}_r}{r} \ = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\frac{\vec{p}_r}{r}\right)$$

由此即可给出理想电偶极子的标量势

$$\varphi(t,\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{\vec{p}_r}{r} \ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}_r\cdot\hat{r}}{r^2}+\frac{\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}}{cr}\right)$$

48

- 我们仅限于讨论原点之外（$r>0$）的电磁场。

$$-\frac{\ddot{\vec{p}}_r}{c^2 r}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\boxed{-\nabla\frac{\vec{p}_r\cdot\hat{r}}{r^2}}\boxed{-\nabla\frac{\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}}{cr}}\boxed{-\frac{1}{c^2}\partial_t\frac{\dot{\vec{p}}_r}{r}}\right)$$

$$-\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\vec{p}_r-\nabla\vec{p}_r\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}=\frac{3(\vec{p}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}_r}{r^3}+\frac{\left(\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}\right)\hat{r}}{cr^2}$$

$$-\frac{1}{c}\nabla\frac{\hat{r}}{r}\cdot\dot{\vec{p}}_r-\frac{1}{c}\nabla\dot{\vec{p}}_r\cdot\frac{\hat{r}}{r}=\frac{2\left(\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\dot{\vec{p}}_r}{cr^2}+\frac{\left(\ddot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}\right)\hat{r}}{c^2r}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\boxed{\nabla\times\frac{\dot{\vec{p}}_r}{r}}$$

$$\nabla\frac{1}{r}\times\dot{\vec{p}}_r+\frac{1}{r}\nabla\times\dot{\vec{p}}_r=\frac{1}{r^2}\dot{\vec{p}}_r\times\hat{r}+\frac{1}{cr}\ddot{\vec{p}}_r\times\hat{r}$$

$$\begin{cases}\varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\vec{p}_r\cdot\hat{r}}{r^2}+\dfrac{\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}}{cr}\right)\\[2ex] \vec{A}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\dfrac{\dot{\vec{p}}_r}{r}\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla\dfrac{\hat{r}}{r^2}=-\dfrac{3\hat{r}\hat{r}-\overleftrightarrow{I}}{r^3}\\[2ex] \nabla\dfrac{\hat{r}}{r}=-\dfrac{2\hat{r}\hat{r}-\overleftrightarrow{I}}{r^2}\end{cases}\qquad\begin{cases}\partial_t\vec{p}_r=\dot{\vec{p}}_r\\[2ex] \nabla\vec{p}_r=-\dfrac{\hat{r}}{c}\dot{\vec{p}}_r\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{3(\vec{p}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}_r}{r^3}+\dfrac{3\left(\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\dot{\vec{p}}_r}{cr^2}+\dfrac{\left(\ddot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\ddot{\vec{p}}_r}{c^2r}\right]\\ \qquad\sim\dfrac{p_r}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{(\cdots)}{r^3}+\dfrac{(\cdots)}{c\tau\cdot r^2}+\dfrac{(\cdots)}{(c\tau)^2\cdot r}\right]\\[3ex] c\vec{B}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0c}\left(\dfrac{\dot{\vec{p}}_r}{r^2}+\dfrac{\ddot{\vec{p}}_r}{cr}\right)\times\hat{r}\sim\dfrac{p_r}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{(\cdots)}{c\tau\cdot r^2}+\dfrac{(\cdots)}{(c\tau)^2\cdot r}\right]\end{cases}$$

如果 τ 是源变化的特征时间，场区可方便地划分为

- **近场区（$r\ll c\tau$）**： $E\sim\dfrac{1}{r^3}$，$cB\sim\dfrac{1}{r^2}$ 且 $\dfrac{E}{cB}\sim\dfrac{c\tau}{r}\gg1$
- **过渡区（$r\sim c\tau$）**： 电磁场没有哪项占优。
- **远场区（$r\gg c\tau$）**： $E\sim\dfrac{1}{r}$，$cB\sim\dfrac{1}{r}$ 且 $\dfrac{E}{cB}\sim1$

3. 定向电偶极子的能流密度

考察定向电偶极子，$\vec{p}(t)=p(t)\hat{z}$。此时磁场可写为

$$\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\left(\frac{\dot{p}_r}{r}+\frac{\ddot{p}_r}{c}\right)\frac{\sin\theta}{r}\hat{\phi}$$

坡印廷矢量 $\vec{S}=\varepsilon_0c^2\vec{E}\times\vec{B}$ 只有 $\hat{r}$ 和 $\hat{\theta}$ 方向的分量。
下面给出 S_r 的结果，类似也可得 S_θ。

$$\hat{r}\cdot\vec{S}=\varepsilon_0c^2\boxed{\left(\hat{r}\times\vec{E}\right)}\cdot\vec{B}\qquad\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_r}{r^2}+\frac{\dot{p}_r}{cr}+\frac{\ddot{p}_r}{c^2}\right)\frac{\sin\theta}{r}\hat{\phi}$$

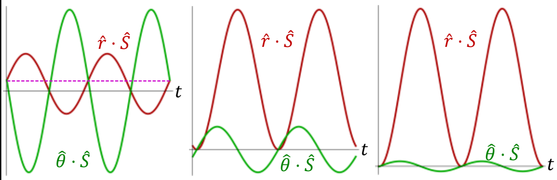
$$\tfrac{1}{2}dp_r^2/dt\qquad d(p_r\dot{p}_r)/dt\qquad d\dot{p}_r^2/dt$$

$$=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{\boxed{p_r\dot{p}_r}}{r^3}+\frac{\boxed{p_r\ddot{p}_r+\dot{p}_r^2}}{cr^2}+\frac{\boxed{2\dot{p}_r\ddot{p}_r}}{c^2r}+\frac{\ddot{p}_r^2}{c^3}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}_r}{r^3}+\frac{3\left(\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\dot{\vec{p}}_r}{cr^2}+\frac{\left(\ddot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\ddot{\vec{p}}_r}{c^2r}\right]$$

由此，经过适当化简后坡印廷矢量的两个非零分量可写为

$$\begin{cases} \hat{r}\cdot\vec{S} = \dfrac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{p_r^2}{2r^3}+\dfrac{p_r\dot{p}_r}{cr^2}+\dfrac{\dot{p}_r^2}{c^2r}\right)+\dfrac{\ddot{p}_r^2}{c^3}\right]\dfrac{\sin^2\theta}{r^2} \\ \hat{\theta}\cdot\vec{S} = -\dfrac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{p_r}{r}+\dfrac{\dot{p}_r}{c}\right)^2\right]\dfrac{\sin 2\theta}{r^3} \end{cases}$$

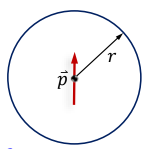


近场区 过渡区 远场区

考察以电偶极子所在处为球心、半径为 r 的球面。

单位时间由该球面流出去的电磁场能量为

$$\frac{dW}{dt} = \oint \vec{S}\cdot d\vec{\sigma} = \oint S_r r^2 d\Omega$$



将前面的结果代入，积分给出

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{p_r^2}{2r^3}+\frac{p_r\dot{p}_r}{cr^2}+\frac{\dot{p}_r^2}{c^2r}\right)+\frac{\ddot{p}_r^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- 上式对时间在$[0,T]$内积分，在如下两情形全导数项的贡献都将为零。
  - $\vec{p}$ 随时间周期性变化，T 为周期。
  - $\vec{p}(t)$ 仅在 $[0,T]$ 范围内不为零。