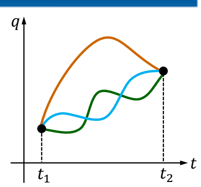
§ 4　带电粒子的拉格朗日表述

一、粒子系统的拉格朗日方程

1. 粒子系统的哈密顿原理

- 在有相同端点的所有可能路径当中，真实运动使得作用量 S 取驻值。

$$\begin{cases} \delta S[q] = \delta \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = 0 \\ \delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0 \end{cases}$$



- 体系的**拉格朗日函数**：$L(q,\dot{q},t)$。
- 体系的**独立动力学变量**：$q(t)=\{q^k(t)\}$，也称广义坐标。
- 广义坐标的变分 $\delta q_k(t)$ 导致广义速度相应的变分：

$$\delta\dot{q}^k = \frac{d}{dt}\delta q_k \quad \leftrightarrow \quad \delta\frac{dq_k}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q_k$$

2

2. 欧拉−拉格朗日方程

动力学变量的变分引起的 S 的改变（一阶变分）为

$$\begin{aligned} \delta S[q(t)] &= \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta\dot{q}^k}\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\delta q^k\right]dt + \underbrace{\boxed{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k\right]_{t_1}^{t_2}}}_{\text{边界项}} \end{aligned}$$

若 $q(t)$ 为驻值路径，则对任意 δq^k 有 $\delta S[q(t)]=0$，因而

$$\frac{\delta L}{\delta q^k} \triangleq \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0 \qquad \textbf{欧拉–拉格朗日方程}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta\dot{q}^k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\delta q^k$$

3

规范变换

- 拉格朗日函数可相差一个**规范变换**:

$$\tilde{L}(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{dF(q,t)}{dt}$$

  - 例如，拉格朗日函数可以加上任一时间 t 的函数 $f(t)$。

$$f(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t f(t)dt$$

- L 和 $\tilde{L}$ 描述同一体系是由于 $\tilde{S}-S=constant$。
  - 等价于说，$\delta(\Delta L)/\delta q^k\equiv 0$，其中 $\Delta L=\tilde{L}-L=dF/dt$。

$$\delta(\Delta L)=\delta\frac{d}{dt}F=\frac{d}{dt}\delta F=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q^k}\delta q^k\right)=\underbrace{\boxed{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q^k}\right)}}_{\partial(\Delta L)/\partial q^k}\delta q^k+\underbrace{\boxed{\frac{\partial F}{\partial q^k}}}_{\partial(\Delta L)/\partial \dot{q}^k}\delta\dot{q}^k$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\delta(\Delta L)}{\delta q^k}=\frac{\partial(\Delta L)}{\partial q^k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial(\Delta L)}{\partial\dot{q}^k}=\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q^k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q^k}\equiv 0$$

4

【例】自由粒子可由如下拉格朗日函数描述

$$L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)=T=\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2=\frac{1}{2}m\dot{x}_k\dot{x}^k$$

- 拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{x}}}-\frac{\partial L}{\partial\vec{x}}=m\ddot{\vec{x}}=0$$

- L 在如下伽利略变换下是不变的:

$$\begin{cases}t\mapsto t'=t+s, & s\in\mathbb{R}\\ \vec{x}\mapsto\vec{x}'=R\vec{x}+\vec{a}, & R\in SO(3),\ \vec{a}\text{ real}\end{cases}$$

  - 拉格朗日方程在该变换下是协变的

$$\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d^2\vec{x}'(t')}{dt'^2}=0$$

5

- L 在如下伽利略变换下是规范不变的:

$$\begin{cases}t\mapsto t'=t+s, & s\in\mathbb{R}\\ \vec{x}\mapsto\vec{x}'=R\vec{x}+\vec{v}_0t+\vec{a}, & R\in SO(3),\ \vec{v}_0,\vec{a}\text{ real}\end{cases}$$

  - 拉格朗日方程在该变换下是协变的。
- L 的对称性与守恒量
  - 时间平移不变性 $\Rightarrow$ 能量守恒（$E=T$）。
  - 空间平移不变性 $\Rightarrow$ 动量守恒（$\vec{p}=m\dot{\vec{x}}$）。
  - 空间转动不变性 $\Rightarrow$ 角动量守恒（$\vec{l}=\vec{x}\times\vec{p}$）。
  - 推动变换下的规范不变性 $\Rightarrow$ 质心匀速运动（$\vec{x}_{cm}=\vec{x}$）。

$$L\left(\vec{x}',\dot{\vec{x}}'\right)=\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}'^2=\frac{1}{2}m\left(R\dot{\vec{x}}+\vec{v}_0\right)^2=\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2+mR\dot{\vec{x}}\cdot\vec{v}_0+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow\quad L\left(\vec{x}',\dot{\vec{x}}'\right)=L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}}\right)+\frac{dF(\vec{x},t)}{dt},\quad F(\vec{x},t)=mR\vec{x}\cdot\vec{v}_0+\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)t$$

6

哈密顿函数与正则方程

- 定义体系的**哈密顿函数**:

$$H(q,p,t) \triangleq p_k\dot{q}^k - L$$

➢ 其中 p_k 是与 q^k 共轭的**正则动量**:

$$p_k \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = p_k(q,\dot{q},t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{q}^k = \dot{q}^k(q,p,t)$$

- 体系的动力学方程可以写为**正则方程**的形式:

$$\begin{cases} \dot{q}^k = +\dfrac{\partial H}{\partial p_k} = [q^k, H] \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} = [p_k, H] \end{cases} \qquad \begin{cases} [q^i, p_j] = \delta^i_j \\ [q^i, q^j] = 0 \\ [p_i, p_j] = 0 \end{cases}$$

➢ 若 L （从而 H）不显含时间，则**哈密顿函数是运动常数。**

7

【例】验证如下拉格朗日函数给出自由粒子正确的运动方程:

$$L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} = -mc^2\sqrt{1-\dot{x}_k\dot{x}^k/c^2}$$

- **正则动量等于粒子的相对论动量:**

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{m\dot{x}_k}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

- **哈密顿函数 H 等于粒子的相对论能量:**

$$H = \sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4}$$

- 如下拉格朗日函数也能给出自由粒子正确的运动方程:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right)$$

➢ p_k 与动量、H 与能量的关系取决于的 L 的数学形式。

$$\dot{x}^k p_k - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

8

二、协变的拉格朗日方程

1. 世界线

- 粒子的动力学变量选为世界线：某个实参数 λ 的四个函数

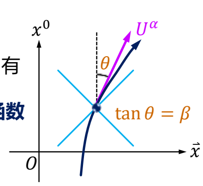
$$x^\alpha(\lambda) = \left(x^0(\lambda),\ \vec{x}(\lambda)\right) = \left(ct(\lambda),\ \vec{x}(\lambda)\right)$$

➢ 切矢量为

$$U^\alpha(\lambda) = \frac{dx^\alpha(\lambda)}{d\lambda}$$

➢ 物理上容许的世界线要求对任意 λ 有

$$\begin{cases} U^0 > 0\ :\ x^0 \text{ 是 } \lambda \text{ 的单调增函数} \\ U^\alpha U_\alpha \le 0\ :\ \text{因果性条件} \end{cases}$$



9

两种常用的世界线参数

- 世界线参数的一种具有直接物理意义的选择是 $\lambda = t$，从而

$$x^\alpha(t) = \left(ct,\ \vec{x}(t)\right)$$

- 世界线参数另一种方便的选择是 $\lambda = \tau$，从而

$$x^\alpha(\tau) = \left(ct(\tau),\ \vec{x}(\tau)\right)$$

  - 固有时可用间隔表示为

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c}\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha} = \frac{dt}{\gamma}$$

  - 世界线上两事件 A 和 B 之间的固有时是参数不变的

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{c}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-\frac{dx^\alpha}{\boxed{d\lambda}}\frac{dx_\alpha}{\boxed{d\lambda}}}\boxed{d\lambda} = \frac{1}{c}\int_A^B\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha}$$

物理可观测量应该是参数不变的。

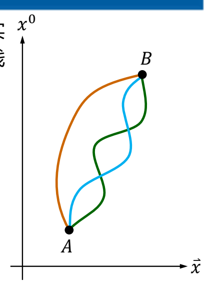
10

2. 相对论中的哈密顿原理

- 相对论中的哈密顿原理表述为：真实运动是有相同端点的所有可能世界线当中使得作用量 S 取驻值的，即

$$\begin{cases}\delta S[x] = \delta\displaystyle\int_A^B L_\lambda\left(x, \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)d\lambda = 0\\ \delta x_A^\alpha = \delta x_B^\alpha = 0\end{cases}$$

  - 为了符合于相对性原理，**作用量必须是四维标量。**



  - 对不同的世界线，参数 λ 在端点 A 和/或 B 处的数值未必相同。
  - 不同参数 λ 对应的拉格朗日函数的数学表达式未必相同。

11

以真实世界线的固有时为参数

- 若以真实世界线的固有时 τ 作为参数，哈密顿原理表述为：

$$\delta S[x] = \delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L_\tau(x,u)d\tau = 0, \qquad \delta x^\alpha(\tau_1) = \delta x^\alpha(\tau_2) = 0$$

其中，“4-速度” $u^\alpha \triangleq dx^\alpha/d\tau$ 为4-矢量。

  - **注意：u^α 并非可能世界线的4-速度。**
  - **仅对真实世界线，u^α 才是粒子的4-速度，故满足质壳关系**

$$u^\alpha u_\alpha = -c^2$$

  - **为了符合于相对性原理，要求 $L_\tau(x,u)$ 必须是四维标量。**
  - 端点处参数的数值 $\tau_{1,2}$ 对所有可能世界线都相同。

12

- 世界线的变分 δx^α 引起的 S 的改变（一阶变分）为

$$\delta S[x(\tau)] = \delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L_\tau(x,u)d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + \boxed{\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha}\right]d\tau$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\right)\delta x^\alpha\right]d\tau + \boxed{\left[\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\delta x^\alpha\right]_{\tau_1}^{\tau_2}}$$ 边界项

若 $x(\tau)$ 为驻值路径，则对任意δx^α 有 $\delta S[x(t)] = 0$，因而

$$\frac{\delta L_\tau}{\delta x^\alpha} \triangleq \frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\boxed{\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}} = 0$$ **拉格朗日方程**

此式中的 u^α 满足 $u^\alpha u_\alpha = -c^2$

- 拉格朗日方程是明显协变的！
- 拉格朗日方程中求完偏导数后的 u^α 满足质壳关系。

$$\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\delta x^\alpha\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha}\right)\delta x^\alpha$$

13

【例】自由粒子的拉格朗日函数。

- 时空平移不变性意味着：**L_τ 只能是由速度 u^α 构造的标量。**
- 由 u^α 所能构造出的独立标量只有

$$u^\alpha u_\alpha = u\cdot u$$

因而，**L_τ 只能是 $u^\alpha u_\alpha = u\cdot u$ 的函数。**

- 有无限多个 L_τ 满足以上条件，并且自由粒子的正确运动方程都可由如下拉格朗日方程给出：

$$\frac{\delta L_\tau}{\delta x^\alpha} \triangleq \frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = 0$$

14

- 譬如，自由粒子的拉格朗日函数可以选为

$$L_\tau = -mc\sqrt{-u^\alpha u_\alpha} = -mc\sqrt{-u\cdot u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = \frac{mcu_\alpha}{\sqrt{-u\cdot u}} \quad \longrightarrow mu_\alpha$$ （对于真实世界线）

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(mu_\alpha) = 0$$

- 自由粒子的拉格朗日函数也可以选为

$$L_\tau = \frac{1}{2}mu^\alpha u_\alpha = \frac{1}{2}mu\cdot u$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = mu_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(mu_\alpha) = 0$$

15

- 譬如，自由粒子的拉格朗日函数可以选为

$$L_\tau = -mc\sqrt{-u^\alpha u_\alpha} = -mc\sqrt{-u\cdot u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = \frac{mcu_\alpha}{\sqrt{-u\cdot u}}$$

$\longrightarrow mu_\alpha$ （对于真实世界线

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(mu_\alpha) = 0$$

➢ 该 L_τ 是参数不变的：对任一可能的世界线有

$$S[x] = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{-\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx_\alpha}{d\tau}}d\tau = -mc\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx_\alpha}{d\lambda}}d\lambda$$

$$L_\tau = -mc\sqrt{-\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx_\alpha}{d\tau}} \quad \Rightarrow \quad L_\lambda = -mc\sqrt{-\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx_\alpha}{d\lambda}}$$

16

- 自由粒子的拉格朗日函数也可以选为

$$L_\tau = \frac{1}{2}mu^\alpha u_\alpha = \frac{1}{2}mu\cdot u$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha} = mu^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(mu^\alpha) = 0$$

➢ 该 L_τ 不具有参数不变性：对任一可能的世界线有

$$S[x] = \frac{1}{2}m\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx_\alpha}{d\tau}d\tau \quad \neq \frac{1}{2}m\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx_\alpha}{d\lambda}d\lambda$$

$$L_\tau = \frac{1}{2}m\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx_\alpha}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad L_\lambda = \frac{1}{2}m\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx_\alpha}{d\lambda}\boxed{\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)}$$

17

以可能世界线的固有时为参数

- 若以可能世界线的固有时 τ 作为参数，哈密顿原理表述为：

$$\delta S[x] = \delta\int_A^B L_0(x,u)d\tau = 0, \qquad \delta x_A^\alpha = \delta x_B^\alpha = 0$$

其中，$u^\alpha \triangleq dx^\alpha/d\tau$ 为粒子沿可能世界线运动的4-速度。

➢ **注意：L_0 中的 u^α 满足质壳关系 $u^\alpha u_\alpha = -c^2$。**

➢ **为了符合于相对性原理，要求 $L_0(x,u)$ 必须是四维标量。**

➢ **对给定的 L_τ，将其中的 u^α 解读为满足质壳关系的4-速度，即可给出一个符合要求的 L_0。**

➢ 端点处参数的数值 $\tau_{1,2}$ 对不同世界线一般是不同的。

$$\delta S[x] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta L_0}{\delta x^\alpha} \triangleq \frac{\partial L_0}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_0}{\partial u^\alpha} = 0$$

18

【例】自由粒子。

- 拉格朗日函数可如下得到:

$$L_\tau = \frac{1}{2} m u^\alpha u_\alpha \qquad \Longrightarrow \quad L_0 = -\frac{1}{2} mc^2$$

- 拉格朗日函数可如下得到:

$$L_\tau = -mc\sqrt{-u^\alpha u_\alpha} \quad \Longrightarrow \quad L_0 = -mc^2$$

- 下面以 $L_0 = -mc^2$ 为例说明：当以可能世界线的固有时为参数时，如何由哈密顿原理给出运动方程。

$$\delta S = -mc^2 \delta \int_A^B d\tau = -mc\delta \int_A^B \sqrt{-dx \cdot dx}$$

连接 A, B 两点的所有世界线中，真实世界线的固有时最长。

19

- 为了得到运动方程，首先计算

$2dx^\alpha(\delta dx_\alpha) = 2dx^\alpha d(\delta x_\alpha)$

$$\delta\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha} = -\frac{\boxed{\delta(dx^\alpha dx_\alpha)}}{2\boxed{\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha}}} = -\frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau} d(\delta x_\alpha)$$

$cd\tau$

$$\Longrightarrow \quad \delta\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha} = -\frac{u^\alpha}{c} d\delta x_\alpha$$

$d(u^\alpha \delta x_\alpha) - du^\alpha \delta x_\alpha$

$$\Longrightarrow \quad \delta S = -mc\delta \int_A^B \sqrt{-dx \cdot dx} = m\int_A^B \boxed{u^\alpha d\delta x_\alpha}$$

$$= \boxed{mu^\alpha \delta x_\alpha \Big|_A^B} - m\int_A^B \frac{du^\alpha}{d\tau} \delta x_\alpha d\tau$$

$$\delta S = -mc^2 \delta \int_A^B d\tau = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(mu^\alpha) = 0$$

20

以时间为参数

- 若以时间 t 作为参数，哈密顿原理表述为:

$$\delta S[\vec{x}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}, \vec{v}) dt = 0, \qquad \delta\vec{x}(t_1) = \delta\vec{x}(t_2) = 0$$

其中，$\vec{v} = d\vec{x}/dt$ 为粒子沿可能世界线运动时的三维速度。

➢ **为符合于相对性原理，要求 $L(x, \vec{v})dt$ 必须是四维标量。**

➢ 端点处参数的数值 $t_{1,2}$ 对所有可能世界线都相同。

$\Longrightarrow$ 运动方程由拉格朗日方程给出

$$\frac{\delta L}{\delta \vec{x}} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$$

21

● **若 L 由如下方式给出，则由于此情形下 S 为四维标量，因而，尽管方程并非明显协变，但却符合于相对性原理的要求：**

$$L(\vec{x},\vec{v}) = \frac{d\tau}{dt}L_0(x,u) = \frac{1}{\gamma}L_0, \quad \text{where } \gamma \triangleq \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

➢ 例如，利用 $L_0 = -mc^2$ 可得自由粒子的拉格朗日函数

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

正则动量和哈密顿函数分别给出正确的相对论动量和能量：

$$\vec{p} = \partial L/\partial \vec{v} = \gamma m\vec{v}, \qquad H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \gamma mc^2$$

拉格朗日函数给出自由粒子正确的运动方程：

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\vec{p}/dt = 0$$

方程符合于相对性原理，但却不是明显协变的。

22

以后，我们将以实际世界线的固有时作为参数

● 哈密顿原理

$$\delta S[x] = \delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L_\tau(x,u)d\tau = 0, \qquad \delta x^\alpha(\tau_1) = \delta x^\alpha(\tau_2) = 0$$

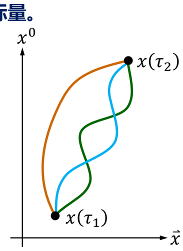
➢ 相对性原理要求：**S 和 L_τ 都是4-标量。**

➢ **L_τ 中的 u^α 不满足 $u^\alpha u_\alpha = -c^2$。**

● 拉格朗日方程

$$\frac{\delta L_\tau}{\delta x^\alpha} \triangleq \frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = 0$$

➢ **拉格朗日方程中求完偏导数后的 u^α 满足质壳关系。**



23

三、电磁场中的带电粒子

1. 作用量

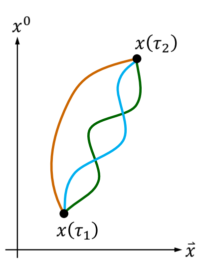
● 以真实世界线的固有时 τ 作为参数，将带电粒子在给定电磁场中的作用量写为

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L_\tau(x,u)d\tau = S_p + S_{pf}$$

其中，S_p 为自由粒子的作用量，
S_{pf} 是场与粒子的相互作用项。

● 总是将自由粒子的拉格朗日函数选为

$$L_\tau = -mc\sqrt{-u^\alpha u_\alpha}$$



24

2. 电磁场运动的带电粒子

除 e 和 m 外，用以构造拉格朗日函数的四维张量有

$$u^\alpha,\quad F^{\alpha\beta},\quad g^{\alpha\beta},\quad g_{\alpha\beta},\quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

- 据此可构造出如下四维标量

$$\begin{cases} u^\alpha u_\alpha & \longrightarrow \text{不可能描述带电粒子与场的相互作用} \\ F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} & \longrightarrow \text{不可能描述带电粒子与场的相互作用} \\ F^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta & \equiv 0 \\ \tilde{F}^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} & \longrightarrow \text{不可能描述带电粒子与场的相互作用} \\ \tilde{F}^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta & \equiv 0 \\ \tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} & \longrightarrow \text{不可能描述带电粒子与场的相互作用} \end{cases}$$

25

- **为了描述带电粒子与电磁场之间的相互作用，有必要用规范势 $A^\alpha(x)$ 代替电磁场张量作为电磁场的动力学变量。**
- 这样，就可以构造出描述相互作用的四维标量

$$A_\alpha u^\alpha$$

因此，电磁场中带电粒子的拉格朗日函数的候选形式为

$$L_\tau = L_p + L_{pf} = -mc\sqrt{-u\cdot u} + kA_\alpha u^\alpha$$

其中，k 是粒子与电磁场的耦合常数，它具有电量的量纲。

- 按此拉格朗日函数，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha} = ku^\beta \partial_\alpha A_\beta \\ \dfrac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = \dfrac{mcu_\alpha}{\sqrt{-u\cdot u}} + kA_\alpha \end{cases} \longrightarrow \underset{\text{(对于真实世界线)}}{mu_\alpha + eA_\alpha = p_\alpha + kA_\alpha}$$

26

- 将前面结果代入拉格朗日方程，得到

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial L_\tau}{\partial x^\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp_\alpha}{d\tau} + ku^\beta\partial_\beta A_\alpha = ku^\beta \partial_\alpha A_\beta$$

亦即有

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = k(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)u^\beta = kF_{\alpha\beta}u^\beta$$

将其与洛伦兹方程比价就得到：$k = e$。

- **电磁场中带电粒子的拉格朗日函数**

$$L_\tau = L_p + L_{pf} = -mc\sqrt{-u\cdot u} + eA_\alpha u^\alpha$$

相应的拉格朗日方程即为洛伦兹方程

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = eF^{\alpha\beta}u_\beta$$

27

规范不变性

电磁势可以做规范变换：

$$A_\alpha \quad \longrightarrow \quad \tilde{A}_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \psi$$

在规范变换下，拉格朗日函数变为

$$L_\tau \quad \longrightarrow \quad \tilde{L}_\tau = L_\tau + e u^\alpha \partial_\alpha \psi = L_\tau + \frac{d}{d\tau}(e\psi)$$

新、旧拉格朗日函数由规范变换相联系。

- **在规范变换下，运动方程（即洛伦兹方程）是不变的。**
  - A_α 只以 $F_{\alpha\beta}$ 的形式出现在运动方程中，由此也可得结论。

28

【思考】（1）以时间为参数，拉格朗日函数为

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e\left(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}\right)$$

（2）拉格朗日方程

$$\frac{\delta L}{\delta \vec{x}} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

（3）带电粒子的正则动量

$$\vec{P} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + e\vec{A}$$

（4）哈密顿量用正则变量表示出来，为

$$H \triangleq \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \sqrt{\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 c^2 + m^2c^4} + e\varphi$$

29

【注】在非相对论极限下

$$H = \frac{\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2}{2m} + e\varphi \boxed{+ mc^2}$$

过渡到量子力学时，需要将粒子的正则动量（而非机械动量）代换为厄米算符

$$\vec{P} \quad \longrightarrow \quad -i\hbar\nabla$$

描述微观带电粒子在电磁场中运动的动力学方程是如下形式的**薛定谔方程**：

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{ie\vec{A}}{\hbar}\right)^2 + e\varphi\right]\psi$$

30

§5 电磁场的拉格朗日表述

一、场的拉格朗日方程

若一个体系的所有可观测物理量都可以用如下 N 个独立场描述

$$\varphi = \{\varphi_I(x) \mid I = 1, \cdots, N\}$$

则称这些场为该体系的动力学变量，而称 N 为体系的自由度。

	粒子系统	场系统
描述系统状态的量	$q_k(t)$	$\varphi_I(x)$
独立变量	t, k	$t, \vec{x}$
拉格朗日函数	$L = L(q, \dot{q})$	$L = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^3x$
运动方程	$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_I} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_I)} = 0$
哈密顿函数（能量）	$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$	$H = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_I)} \partial_0 \varphi_I d^3x - L$

1. 场的拉格朗日密度和作用量

- 场的拉格朗日函数表示为拉格朗日密度 $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ 的积分

$$L = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^3x$$

  - 一般地，$\mathcal{L}$ 可能明显地依赖于时空坐标：$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x)$。
- 场的作用量表示为

$$S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^3x$$

  - 一般地，作用量可表示为 $\mathcal{L}$ 在某个时空区域 D 内的积分：

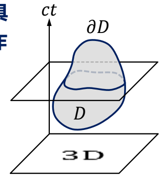
$$S[\varphi] = \frac{1}{c}\int_D \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x) d^4x$$

- 相对性原理要求 ***S* 必须是四维标量。**
  - 由于 $d^4x = cdtd^3x$ 是四维标量，故 **$\mathcal{L}$ 也必须是四维标量。**

2. 场的哈密顿原理

场系统的哈密顿原理表述为：在边界上具有相同数值的场中，真实场 $\varphi(x)$ 是使得作用量取驻值的。其数学表述为

$$\begin{cases}\delta S=\frac{1}{c}\delta\int_D \mathcal{L}d^4x=0\\ \delta\varphi_I(x\in\partial D)=0\end{cases}$$



- 场的一个变分 $\delta\varphi_I(x)$ 引起导数中相应的变分：

$$\delta\left(\frac{\partial\varphi_I}{\partial x^\mu}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta\varphi_I)\quad\leftrightarrow\quad\delta(\partial_\mu\varphi_I)=\partial_\mu(\delta\varphi_I)$$

由此，又引起拉格朗日密度的相应变分：

$$\delta\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)=\mathcal{L}(\varphi+\delta\varphi,\partial\varphi+\delta\partial\varphi,x)-\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)$$

34

3. 场的拉格朗日方程

- 场的一个变分 $\delta\varphi_I(x)$ 引起的 $\mathcal{L}$ 的改变为

$$\delta\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)=\mathcal{L}(\varphi+\delta\varphi,\partial\varphi+\delta\partial\varphi,x)-\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)$$

$$=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}\delta\varphi_I+\overbrace{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}}}^{\Pi^{\mu I}}\delta(\partial_\mu\varphi_I)$$

$$=\underbrace{\boxed{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}-\partial_\mu\Pi^{\mu I}\right)}}_{\delta\mathcal{L}/\delta\varphi_I}\delta\varphi_I+\underbrace{\boxed{\partial_\mu(\Pi^{\mu I}\delta\varphi_I)}}_{\text{四维散度项}}$$

$$\Longrightarrow\quad \delta\mathcal{L}=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_I}\delta\varphi_I+\partial_\mu(\Pi^{\mu I}\delta\varphi_I),\quad \text{where}\ \begin{cases}\Pi^{\mu I}\triangleq\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_I}\triangleq\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}-\partial_\mu\Pi^{\mu I}\end{cases}$$

$$\Pi^{\mu I}\delta(\partial_\mu\varphi_I)=\partial_\mu(\Pi^{\mu I}\delta\varphi_I)-(\partial_\mu\Pi^{\mu I})\delta\varphi_I$$

35

- 场的变分 $\delta\varphi_I(x)$ 引起作用量的如下变化：

$$\delta S[\varphi]=\frac{1}{c}\delta\int_D\mathcal{L}d^4x=\frac{1}{c}\int_D\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}\delta\varphi_I d^4x+\overset{\text{边界项}}{\boxed{\frac{1}{c}\oint_{\partial D}\Pi^{\mu I}\delta\varphi_I dn_\mu}}$$

若 $\varphi_I(x)$ 使得 S 取驻值，则对任意 $\delta\varphi_I$ 有 $\delta S[\varphi]=0$，从而

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_I}\triangleq\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}=0\qquad\textbf{拉格朗日方程}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}=\partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi_I)}+\nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_I)}=\partial_\mu\Pi^{\mu I},\quad \Pi^{\mu I}\triangleq\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}$$

➢ 对于真实的场 $\varphi_I(x)$，有

$$\delta\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)=\partial_\mu(\Pi^{\mu I}\delta\varphi_I)$$

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_I}\delta\varphi_I+\partial_\mu(\Pi^{\mu I}\delta\varphi_I),\quad\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_I}\triangleq\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}-\partial_\mu\Pi^{\mu I},\quad\Pi^{\mu I}\triangleq\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}$$

36

规范变换

- 拉格朗日密度可相差一个**规范变换**:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi,\partial\varphi,x)=\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)+\partial_\mu C^\mu(\varphi,x)$$

  - 例如， $\mathcal{L}$ 可以加上时空坐标 x 的任一标量函数 $f(x)$ 。
- $\mathcal{L}$ 和 $\tilde{\mathcal{L}}$ 描述同一体系是由于

$$\Delta S=\tilde{S}-S=\frac{1}{c}\int_D\partial_\mu C^\mu(\varphi,x)d^4x=\frac{1}{c}\underbrace{\boxed{\oint_{\partial D}C^\mu(\varphi,x)dn_\mu}}_{\text{与可能场无关的常数}}$$

  - 等价于说，$\delta(\Delta\mathcal{L})/\delta\varphi\equiv 0$，其中 $\Delta\mathcal{L}=\tilde{\mathcal{L}}-\mathcal{L}=\partial_\mu C^\mu$。

$$\frac{\delta(\Delta\mathcal{L})}{\delta\varphi_I}=\boxed{\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial\varphi_I}}-\partial_\mu\boxed{\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}}=\partial_\mu\frac{\partial C^\mu}{\partial\varphi_I}-\partial_\mu\left(\frac{\partial C^\mu}{\partial\varphi_I}\right)\equiv 0$$

$$\delta(\Delta\mathcal{L})=\boxed{\delta(\partial_\mu C^\mu)}=\partial_\mu C^\mu(\varphi+\delta\varphi,x)-\partial_\mu C^\mu(\varphi,x)$$

$$=\boxed{\partial_\mu(\delta C^\mu)}=\partial_\mu\left[\frac{\partial C^\mu}{\partial\varphi_I}\delta\varphi_I\right]=\boxed{\left(\partial_\mu\frac{\partial C^\mu}{\partial\varphi_I}\right)}\delta\varphi_I+\boxed{\frac{\partial C^\mu}{\partial\varphi_I}}\delta(\partial_\mu\varphi_I)$$

37

【例】实标量场

考察与外部标量场 $\rho(x)$ 耦合的四维实标量场 $\varphi(x)$，并设其拉格朗日密度为如下的4-标量

$$\frac{1}{\hbar c}\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right]+\rho(x)\varphi(x)$$

- $\mathcal{L}$ 具有能量密度的量纲， φ 具有长度倒数的量纲。
- 质量为 m 的粒子的康普顿波长

$$\lambda_C\triangleq\frac{h}{mc}\quad\Longrightarrow\quad\frac{mc}{\hbar}=\frac{2\pi}{\lambda_C}$$

- 由于 $\mathcal{L}$ 前面的因子不影响运动方程，因此，下面取

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right]+\rho(x)\varphi(x)$$

38

拉格朗日方程

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}}-\partial_\mu\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}}=0\quad\Longrightarrow\quad\left[\partial_\mu\partial^\mu-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\varphi(x)=-\rho(x)$$

- 方程是明显协变的。

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right]+\rho(x)\varphi(x)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}=-\overbrace{\boxed{\frac{\partial(\partial_\mu\varphi)}{\partial(\partial_\nu\varphi)}}}^{\delta_\mu^\nu}\partial^\mu\varphi=-\partial^\nu\varphi$$

$$\delta\mathcal{L}=\boxed{-\partial^\mu\varphi}\,\delta(\partial_\mu\varphi)+\boxed{\left[-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi+\rho\right]}\delta\varphi$$

39

有质量场的传播速度

- 无源情形下，场方程写为

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\varphi(x)=0$$

- 考察其单色平面波解：

$$\varphi(x)=\varphi_0 e^{ik_\alpha x^\alpha},\quad \text{where } k^\alpha=\left(\frac{\omega}{c},\vec{k}\right)$$

  - 代入方程得到（其中 $k=\sqrt{\vec{k}\cdot\vec{k}}$）：

$$k_\alpha k^\alpha+(mc/\hbar)^2=0\quad\leftrightarrow\quad \omega=c\sqrt{k^2+(mc/\hbar)^2}$$

  - 群速度 $v_g=\dfrac{d\omega}{dk}=\dfrac{kc}{\sqrt{k^2+(mc/\hbar)^2}}<c$

质量项（正比于场平方的项）意味着场的传播速度小于光速。

有质量场的相互作用力程

如果源项是静态球对称的，即 $\rho=\rho(r)$，则方程写为

$$\left[\nabla^2-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\varphi(r)=\underbrace{\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}}_{\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}}-\underbrace{\boxed{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)}}_{\frac{2\pi}{\lambda_C}}{}^2\varphi=-\rho(r)$$

在源之外的区域（$\rho=0$），方程写为

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}=\left(\frac{2\pi}{\lambda_C}\right)^2(r\varphi)$$

$$\Rightarrow\quad \varphi(r)\sim\frac{1}{r}e^{-2\pi r/\lambda_C},\quad \boxed{\frac{1}{r}e^{+2\pi r/\lambda_C}}$$

质量项意味着相互作用不是长程的。

二、麦克斯韦方程的拉格朗日密度

麦克斯韦方程的拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 需要满足

- 相对性原理要求 $\mathcal{L}$ 是四维标量。
- 描述电磁作用的动力学变量应为电磁势 A^α 而非 $F^{\alpha\beta}$。
- $\mathcal{L}=\mathcal{L}_f+\mathcal{L}_{pf}$，其中 $\mathcal{L}_f$ 描述自由（无源）的电磁场，$\mathcal{L}_{pf}$ 描述带电物质与电磁场的相互作用。
- $\mathcal{L}$ 是规范不变的：
  - 规范变换 $\tilde{A}_\mu=A_\mu+\partial_\mu\psi$ 下，存在 C^μ 使得 $\tilde{\mathcal{L}}=\mathcal{L}+\partial_\mu C^\mu$。
  - 这等价于说，$\delta(\Delta\mathcal{L})/\delta A_\beta\equiv 0$，其中 $\Delta\mathcal{L}=\tilde{\mathcal{L}}-\mathcal{L}$。
- $\mathcal{L}$ 或者 $\mathcal{L}_{pf}$ 是源 J^α 的线性函数（叠加原理）。
- $\mathcal{L}$ 是 A^α 的二次函数（方程的线性性）。

1. 自由电磁场的拉格朗日密度

- 用以构造自由电磁场拉格朗日密度 $\mathcal{L}_f$ 的4-张量有

$$A^\alpha,\quad \partial^\alpha A^\beta,\quad g_{\alpha\beta},\quad g^{\alpha\beta},\quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

- 这些张量能够构造出的 A^α 的次数不超过2的4-标量有哪些?

$$\partial^\alpha A^\beta \quad\Longrightarrow\quad \partial_\alpha A^\alpha$$

$$A^\alpha A^\beta \quad\Longrightarrow\quad A_\alpha A^\alpha \qquad F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},\ G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}$$

$$\partial^\alpha A^\beta \partial^\mu A^\nu \quad\Longrightarrow\quad \partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta,\ \boxed{\partial^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta,\ \partial^\alpha A^\beta \partial_\beta A_\alpha}$$

$$\boxed{\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu}\quad \tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

$$\partial^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta = \partial^{(\alpha}A^{\beta)}\partial_{(\alpha}A_{\beta)} + \partial^{[\alpha}A^{\beta]}\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$$

$$\partial^\alpha A^\beta \partial_\beta A_\alpha = \partial^{(\alpha}A^{\beta)}\partial_{(\alpha}A_{\beta)} - \partial^{[\alpha}A^{\beta]}\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu = 4\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$$

$$\begin{cases} F_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \\ G_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha \\ \tilde{F}^{\alpha\beta} \triangleq \dfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} \end{cases}$$

43

用这些张量能构造出的、A^α 的次数不超过2的4-标量有

$$\begin{cases} \partial_\alpha A^\alpha & \longleftarrow \text{符合规范不变性} \quad \text{(此项无关紧要)} \\ A^\alpha A_\alpha & \longleftarrow \text{不满足规范不变性} \quad \text{(质量项)} \\ \partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta & \longleftarrow \text{不满足规范不变性} \\ F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} & \longleftarrow \text{符合规范不变性} \\ G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} & \longleftarrow \text{不满足规范不变性} \\ \tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} & \longleftarrow \text{符合规范不变性} \quad \text{(空间反演下的赝标量)} \end{cases}$$

$$F_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha,\qquad \tilde{F}^{\alpha\beta} \triangleq \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu},\qquad G_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha$$

44

- $\partial_\alpha A^\alpha$ 满足规范不变性要求。
  - 在规范变换 $\tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\psi(x)$ 下，

$$\partial_\alpha A^\alpha \quad\longrightarrow\quad \partial_\alpha \tilde{A}^\alpha = \partial_\alpha(A^\alpha + \partial^\alpha\psi) = \partial_\alpha A^\alpha + \underbrace{\boxed{\partial_\alpha\partial^\alpha\psi}}_{\partial_\mu C^\mu(x)}$$

  或者，$\Delta\mathcal{L} = \partial_\alpha\partial^\alpha\psi$ 显然满足 $\delta(\Delta\mathcal{L})/\delta A_\beta \equiv 0$。

  - 由于 $\partial_\alpha A^\alpha$ 本身就是散度项，$\mathcal{L}$ 中有无此项不影响方程。

  事实上，若令 $\mathcal{L}_0 = \partial_\alpha A^\alpha$，则

$$\delta\mathcal{L}_0 = g^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha A_\beta) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta A_\beta} = \overbrace{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\beta}}}^{0} - \partial_\alpha \overbrace{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}}}^{g^{\alpha\beta}}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta A_\beta} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 0 \equiv 0$$

$\partial_\alpha A^\alpha$ 项不必出现在拉格朗日密度中。

45

● $\mathcal{L}_0 = A^\alpha A_\alpha$ 不满足规范不变性的要求。

➢ 在规范变换 $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \psi$ 下，

$$A^\alpha A_\alpha \quad \longrightarrow \quad \tilde{A}^\alpha \tilde{A}_\alpha = (A^\alpha + \partial^\alpha \psi)(A_\alpha + \partial_\alpha \psi)$$
$$= A^\alpha A_\alpha + \overbrace{\boxed{2A^\alpha \partial_\alpha \psi + \partial^\alpha \psi \partial_\alpha \psi}}^{\Delta\mathcal{L}_0}$$

不存在 $C^\mu(A,x)$ 使得 $\Delta\mathcal{L}_0 = \partial_\mu C^\mu$

事实上 $\dfrac{\delta(\Delta\mathcal{L}_0)}{\delta A_\beta} = \dfrac{\partial(\Delta\mathcal{L}_0)}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \dfrac{\partial(\Delta\mathcal{L}_0)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 2\partial^\beta \psi - 0 \neq 0$

➢ 或者，若令 $\mathcal{L}_0 = A^\alpha A_\alpha$，则

$$\delta\mathcal{L}_0 = 2A^\alpha \delta A_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta A_\beta} = \overset{2A^\beta}{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\beta}}} - \partial_\alpha \overset{0}{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}}}$$

可见，$\delta\mathcal{L}_0/\delta A_\beta = 2A^\beta$ 依赖于规范的选择。

$A_\alpha A^\alpha$ 项（质量项）不能出现在拉格朗日密度中。

● $\mathcal{L}_0 = \partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta$ 不满足规范不变性的要求。

$$\delta\mathcal{L}_0 = 2\partial^\alpha A_\alpha \delta(\partial^\beta A_\beta) = 2g^{\alpha\beta}\partial^\gamma A_\gamma \delta(\partial_\alpha A_\beta)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta A_\beta} = \underset{0}{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\beta}}} - \partial_\alpha \underset{2g^{\alpha\beta}\partial^\gamma A_\gamma}{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}}} = \boxed{-2\partial^\beta \partial^\gamma A_\gamma}$$

有赖于规范选取

● $\mathcal{L}_0 = G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$ 不满足规范不变性的要求。

$$\delta\mathcal{L} = 2G^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha) = 4G^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha A_\beta)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta A_\beta} = \underset{0}{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\beta}}} - \partial_\alpha \underset{4G^{\alpha\beta}}{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}}} = \boxed{-4\partial_\alpha G^{\alpha\beta}}$$

有赖于规范选取

$\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta$ 和 $G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$ 项都不能出现在拉格朗日密度中。

● $\mathcal{L}_0 = F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ 符合规范不变性的要求。

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\delta(F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}) = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}\underset{\delta(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\boxed{\delta F_{\alpha\beta}}}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta\mathcal{L}_0 = 2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}\delta(\partial_\alpha A_\beta)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta A_\beta} = \underset{0}{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\beta}}} - \partial_\alpha \underset{2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}}{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}}} = -2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\,\partial_\alpha F_{\mu\nu}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta A_\beta} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\underset{\partial_\alpha\partial_\mu A_\nu - \partial_\alpha\partial_\nu A_\mu}{\boxed{\partial_\alpha F_{\mu\nu}}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad 0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0$$

$F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ 项（赝标量）不必出现在拉格朗日密度中。

- $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ 和 $\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ 均符合规范不变性的要求。

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -2\frac{E^2}{c^2} + 2B^2, \quad \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} = -2B^2 + 2\frac{E^2}{c^2} = -F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

自由电磁场的拉格朗日密度必然正比于 $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ 。

- 无源麦克斯韦方程的拉格朗日密度正比于 $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$，将其取为

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \mathcal{L}_f(\partial A)$$

  - 数值上，$\mathcal{L}_f$ 等于电场与磁场的能量密度之差，即

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 - c^2B^2\right)$$

$$F^{\alpha\beta} = \left\{\frac{\vec{E}}{c},\ \vec{B}\right\},\ F_{\alpha\beta} = \left\{-\frac{\vec{E}}{c},\ \vec{B}\right\},\ \tilde{F}^{\alpha\beta} = \left\{\vec{B},\ -\frac{\vec{E}}{c}\right\},\ \tilde{F}_{\alpha\beta} = \left\{-\vec{B},\ -\frac{\vec{E}}{c}\right\}$$

49

2. 有源麦克斯韦方程的拉格朗日密度

- 除度规张量外，用以构造 $\mathcal{L}_{pf}$ 的 4-张量只有 J^α 和 A^α。
  - 由此能够构造出的对 J^α 线性依赖的标量只有一个：$J^\alpha A_\alpha$。
  - $\mathcal{L}_{pf} = J^\alpha A_\alpha$ 符合规范不变性要求：$\delta\mathcal{L}_{pf} = J^\alpha\delta A_\alpha$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}_{pf}}{\delta A_\beta} = \underbrace{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\beta}}}_{J^\beta} - \partial_\alpha\underbrace{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}}}_{0} = \boxed{J^\beta}$$

与规范选取无关

- 有源麦克斯韦方程的拉格朗日密度写为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{pf} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha$$

  - 数值上，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 - c^2B^2\right) - \left(\rho\varphi - \vec{J}\cdot\vec{A}\right)$$

50

麦克斯韦方程

- 若 $J^\alpha(x)$ 给定，即忽略电磁场对带电物质的作用，则

$$\mathcal{L}(A, \partial A, x) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha = \mathcal{L}_f(\partial A) + \mathcal{L}_{pf}(A, x)$$

$$\Rightarrow \quad \delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0}F^{\alpha\beta}\underbrace{\boxed{\delta F_{\alpha\beta}}}_{\delta(\partial_\alpha A_\beta) - \delta(\partial_\beta A_\alpha)} + J^\alpha\delta A_\alpha = \boxed{-\frac{1}{\mu_0}F^{\alpha\beta}}\delta(\partial_\alpha A_\beta) + \boxed{J^\beta}\delta A_\beta$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\beta} = \underbrace{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial A_\beta}}}_{J^\beta} - \partial_\alpha\underbrace{\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}}}_{-(1/\mu_0)F^{\alpha\beta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta$$

麦克斯韦方程

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \qquad \Rightarrow \quad \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0$$

毕安琪恒等式

$$\partial_\alpha(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha)$$
$$= \left(\partial_\alpha\partial_\mu A_\nu - \partial_\alpha\partial_\nu A_\mu\right) + \left(\partial_\mu\partial_\nu A_\alpha - \partial_\mu\partial_\alpha A_\nu\right) + \left(\partial_\nu\partial_\alpha A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu A_\alpha\right)$$

51

三、完备的电动力学方程

- 带电粒子-电磁场系统的作用量和拉格朗日密度可以写为

$$\begin{cases} S = S_p + S_f + S_{pf} = \int \mathcal{L} dt d^3x \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_{pf} \end{cases}$$

  - 动力学变量为 $A^\alpha(x)$ 和 $x_e^\alpha(\tau)$（设只有一个带电粒子）。

$$A^\alpha = \left(\varphi/c, \vec{A}\right), \quad x_e^\alpha = (ct, \vec{x}_e)$$

  - 自由电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

  - 下面给出 $\mathcal{L}_p + \mathcal{L}_{pf}$ 的表达式。

52

- 以真实运动的固有时作为参数，带电粒子的作用量为

$$S_p + S_{pf} = \int \boxed{d\tau} \left[-mc\sqrt{-\frac{dx_e^\alpha(\tau)}{\boxed{d\tau}}\frac{dx_{e\alpha}(\tau)}{\boxed{d\tau}}} + eA_\alpha(x_e(t)) \frac{dx_e^\alpha(\tau)}{\boxed{d\tau}} \right]$$

$$= \int dt \left[-mc\underbrace{\sqrt{-\frac{dx_e^\alpha(t)}{dt}\frac{dx_{e\alpha}(t)}{dt}}}_{\sqrt{c^2-v^2} = c/\gamma} + eA_\alpha(x_e(t)) \underbrace{\frac{dx_e^\alpha(t)}{dt}}_{u^\alpha(t)/\gamma} \right]$$

$$= \int dt \underbrace{\left[-\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{e}{\gamma} A_\alpha(x_e(t)) u^\alpha(t) \right]}_{\int d^3x \underbrace{\left[-\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{e}{\gamma} A_\alpha(x) u^\alpha(t) \right] \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_e(t))}_{\mathcal{L}_p + \mathcal{L}_{pf}}}$$

53

- 电动力学的完整拉格朗日密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_{pf}$ 为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) - \frac{mc^2}{\gamma} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_e(t)) + \frac{e}{\gamma} A_\alpha(x) u^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_e(t))$$

  - 相应的作用量 $S = S_f + S_p + S_{pf} = \frac{1}{c}\int d^4x\, \mathcal{L}$ 为

$$S = -\frac{1}{4\mu_0 c} \int d^4x\, F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) - mc \int d\tau\, \sqrt{-u \cdot u} + e \int d\tau\, A_\alpha(x_e) u^\alpha$$

- 最小作用原理：在动力学变量的如下变分下，$\delta S = 0$ 的充要条件是 $x_e^\alpha(\tau)$ 满足洛伦兹方程，而 $A_\alpha(x)$ 满足麦克斯韦方程

$$\begin{cases} x_e^\alpha(\tau) \longrightarrow x_e^\alpha(\tau) + \delta x_e^\alpha(\tau) \\ A_\alpha(x) \longrightarrow A_\alpha(x) + \delta A_\alpha(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta x_e^\alpha(\tau) \longrightarrow 0 \quad \text{when } |\tau| \longrightarrow \infty \\ \delta A_\alpha(x) \longrightarrow 0 \quad \text{when } |x^\alpha| \longrightarrow \infty \end{cases}$$

54

$$\delta S_f = -\frac{1}{\mu_0 c}\int d^4x\, F^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial \delta A_\beta(x)}{\partial x^\alpha} \quad = \frac{1}{\mu_0 c}\int d^4x\, \frac{\partial F^{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\alpha}\boxed{\delta A_\beta(x)}$$

$$\delta S_p = mc\int d\tau\, \frac{u_\alpha}{\sqrt{-u\cdot u}}\frac{d\delta x_e^\alpha(\tau)}{d\tau} \quad = -mc\int d\tau\, \left[\frac{d}{d\tau}\frac{u_\alpha}{\sqrt{-u\cdot u}}\right]\boxed{\delta x_e^\alpha(\tau)}$$

$$\delta S_{pf} = e\int d\tau\, \boxed{\left[u^\beta\frac{\partial A_\beta(x_e)}{\partial x_e^\alpha} - \frac{dA_\alpha(x_e)}{d\tau}\right]}\boxed{\delta x_e^\alpha(\tau)} + \boxed{e\int d\tau\, u^\alpha \delta A_\alpha(x_e)}$$

$$u^\beta\frac{\partial A_\beta(x_e)}{\partial x_e^\alpha} - u^\beta\frac{\partial A_\alpha(x_e)}{\partial x_e^\beta} = F_{\alpha\beta}(x_e)u^\beta \qquad \frac{e}{c}\int d^4x\, \frac{u^\beta}{\gamma}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_e)\boxed{\delta A_\beta(x)}$$

$$mc\frac{d}{d\tau}\frac{u_\alpha}{\sqrt{-u\cdot u}} = eF_{\alpha\beta}(x_e)u^\beta \quad \Longrightarrow \quad \frac{dp_\alpha(\tau)}{d\tau} = eF_{\alpha\beta}(x_e)u^\beta(\tau)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial F^{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\gamma}eu^\beta\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_e) \quad \Longrightarrow \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta}(x) = \frac{e}{\gamma}u^\beta\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_e)$$

$$S = -\frac{1}{4\mu_0 c}\int d^4x\, F_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha\beta}(x) - mc\int d\tau\,\sqrt{-u\cdot u} + e\int d\tau\, A_\alpha(x_e)u^\alpha$$

55