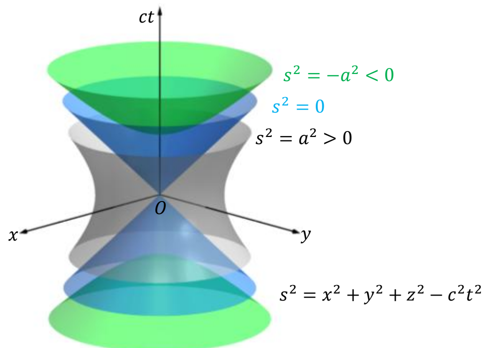
§4 闵可夫斯基空间的张量



1

一、四维标量

能够用与标架选取无关的一个数描述的物理量称为**四维标量**，经常也称其为**不变量**—— 在庞加莱变换下不变的数。

- 四维标量必然也是三维空间中的标量。
- 四维标量的例子：
  - 真空中的光速 c
  - 四维体积元 $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = cdtd^3x$
  - 两事件的时空间隔 $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$
  - 固有长度和固有时间 $d\tau = dt/\gamma$
  - 粒子的质量 m 和电量 e

2

二、四维矢量

四维矢量 $X^\alpha = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (X^0, \vec{X})$ 是一个有四个分量的量，它在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下按照如下方式变换

$$X'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\mu X^\mu$$

- 四维矢量 X^α 的时间分量 X^0 必然是三维空间中的标量，四维矢量 X^α 的空间分量 $\vec{X}$ 必然是三维空间中的矢量。
- 时空位移 Δx^α 是矢量的原型：$\Delta x^\alpha = (cdt, d\vec{x})$
- 所有矢量的集合构成了一个4维矢量空间。
  - 四维矢量是一个几何量：不依赖于惯性标架选择。

在正交变换下 $\lambda \in O(3)$ $\quad \begin{pmatrix} X'^0 \\ \vec{X}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ \vec{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 \\ \lambda\vec{X} \end{pmatrix}$

3

矢量是一个几何量

- 惯性标架 K 的基矢 $\hat{e}_\alpha$ 在 K 中的分量为 $(\hat{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha^\beta$
  - ➢ 矢量 X 可表示为基矢 $\hat{e}_\alpha$ 的线性组合：$X = X^\alpha \hat{e}_\alpha$
- 不同惯性标架的基矢之间的变换

$$\hat{}'_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\beta \hat{e}_\beta$$

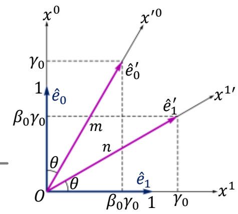
$$'^\alpha \hat{e}'_\alpha = \overset{\delta_\mu^\nu}{\boxed{\Lambda^\alpha{}_\mu \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\nu}} X^\mu \hat{e}_\nu$$

$$'^\alpha \hat{e}'_\alpha = X^\alpha \hat{e}_\alpha$$

$$\hat{e}'_0 = \gamma_0(\hat{e}_0 + \beta_0 \hat{e}_1)$$

$$\hat{e}'_1 = \gamma_0(\hat{e}_1 + \beta_0 \hat{e}_0)$$

$$\hat{e}'_{2,3} = \hat{e}_{2,3}$$



$$1 = \frac{m\cos\theta}{\gamma_0} = \frac{n\cos\theta}{\gamma_0}$$

矢量是一个几何量

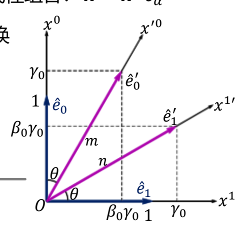
- 惯性标架 K 的基矢 $\hat{e}_\alpha$ 在 K 中的分量为 $(\hat{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha^\beta$
  - ➢ 矢量 X 可表示为基矢 $\hat{e}_\alpha$ 的线性组合：$X = X^\alpha \hat{e}_\alpha$
- 不同惯性标架的基矢之间的变换

$$\hat{e}'_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\beta \hat{e}_\beta$$

$$\Rightarrow \quad X'^\alpha \hat{e}'_\alpha = \overset{\delta_\mu^\nu}{\boxed{\Lambda^\alpha{}_\mu \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\nu}} X^\mu \hat{e}_\nu$$

$$\Rightarrow \quad X'^\alpha \hat{e}'_\alpha = X^\alpha \hat{e}_\alpha$$

$$\begin{cases} \hat{e}'_0 = \gamma_0(\hat{e}_0 + \beta_0 \hat{e}_1) \\ \hat{e}'_1 = \gamma_0(\hat{e}_1 + \beta_0 \hat{e}_0) \\ \hat{e}'_{2,3} = \hat{e}_{2,3} \end{cases}$$



$$1 = \frac{m\cos\theta}{\gamma_0} = \frac{n\cos\theta}{\gamma_0}$$

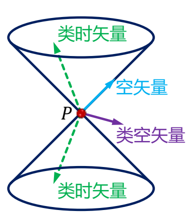
1. 内积

两个矢量 X^α 和 Y^α 的**内积**定义为

$$X \cdot Y \triangleq g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = \vec{X} \cdot \vec{Y} - X^0 Y^0$$

- 两个矢量的内积为不变量。
- 若 $X \cdot Y = 0$，则称 X^α 和 Y^α **正交**。
- 矢量 X^α 的**平方**定义为

$$X \cdot X \triangleq g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = \left|\vec{X}\right|^2 - \left(X^0\right)^2$$



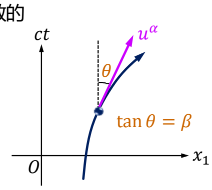
  - ➢ 若 $X \cdot X < 0$，则称 X^α 是**类时矢量**。
  - ➢ 若 $X \cdot X > 0$，则称 X^α 是**类空矢量**。
  - ➢ 若 $X \cdot X = 0$，则称 X^α 是**类光矢量**（或**空矢量**）。

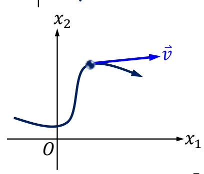
矢量的例子：4-速度

设 $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ 是粒子以其固有时为参数的世界线方程，粒子的**四维速度**定义为

$$u^\alpha \triangleq \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \underbrace{\boxed{\frac{dt}{d\tau}}}_{\gamma}\underbrace{\boxed{\frac{d}{dt}\left(ct,\ \vec{x}\right)}}_{(c,\ \vec{v})}$$

- $\vec{v}$ 沿粒子轨迹的切矢量；
  u^α 沿粒子世界线的切矢量。
- 由4-速度可构造如下不变量
  $$u \cdot u = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -c^2$$
- 在任一给定的惯性标架中
  $$u^\alpha = \gamma(c, \vec{v}) = \gamma c\left(1, \vec{\beta}\right)$$





7

【例】试利用四维速度推导相对论的速度合成法则。

【解】 4–速度满足洛伦兹反变换

$$\gamma c\begin{pmatrix}1\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_0 & \beta_0\gamma_0 & 0 & 0\\ \beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\gamma' c\begin{pmatrix}1\\ \beta_1'\\ \beta_2'\\ \beta_3'\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\gamma = \gamma_0\gamma'(1+\beta_0\beta_1')\\ \gamma\beta_1 = \gamma_0\gamma'(\beta_0+\beta_1')\\ \gamma\beta_{2,3} = \gamma'\beta_{2,3}'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta_1 = \dfrac{\beta_1'+\beta_0}{1+\beta_0\beta_1'}\\ \beta_{2,3} = \dfrac{\beta_{2,3}'}{\gamma_0\left(1+\beta_0\beta_1'\right)}\end{cases}$$

8

---

2. 对偶矢量

- 从矢量到实数的线性映射称为**对偶矢量**。
  - 对偶矢量是一个几何量：不依赖于惯性标架选择。
  - 所有对偶矢量的集合构成一个4维矢量空间，即对偶空间。
- 对于任一给定矢量 X^α，可利用度规 $g_{\alpha\beta}$ 构造一个对偶矢量
  $$L_X: Y^\alpha \longrightarrow \boxed{g_{\alpha\beta}X^\beta}Y^\alpha \quad\Longrightarrow\quad L_X: Y^\alpha \longrightarrow X_\alpha Y^\beta$$
  - 定义了度规后，所有对偶矢量都是通过这种方式得到的。
- 将对偶矢量 L_X 记为
  $$X_\alpha \triangleq g_{\alpha\beta}X^\beta = (X_0, X_1, X_2, X_3) = \left(-X^0, \vec{X}\right)$$
  - 由于时空度规是非退化的，求逆变换得到
  $$X^\alpha \triangleq g^{\alpha\beta}X_\beta = (X^0, X^1, X^2, X^3) = \left(X^0, \vec{X}\right)$$

9

- 两个矢量 X^α 和 Y^α 的内积可以写为

$$X^\alpha Y_\alpha = g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = \vec{X} \cdot \vec{Y} - X^0 Y^0$$

  - 矢量 X^α 的平方可以写为

$$X^\alpha X_\alpha = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = \left|\vec{X}\right|^2 - \left(X^0\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u^\alpha u_\alpha = -c^2$$

- 矢量和对偶矢量在洛伦兹变换下的变换方式不同。

$$X'_\alpha = g_{\alpha\beta} X'^\beta = g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\mu \underbrace{\boxed{X^\mu}}_{g^{\mu\nu}X_\nu} = \underbrace{\boxed{g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\mu g^{\mu\nu}}}_{\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\nu} X_\nu$$

$$\Rightarrow \quad X'_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\nu X_\nu, \quad \text{where } \tilde{\Lambda} \triangleq g\Lambda g$$

  - 通常的矢量又称为逆变矢量，而对偶矢量又称为协变矢量。

对偶矢量的例子：四维梯度

- 考察在点 P 处切矢量为 $T^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ 的世界线 $x^\alpha(\lambda)$。

$$T^\alpha \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}}}_{\partial_\alpha f} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{df}{d\lambda}$$

  - $T^\alpha \partial_\alpha f$ 代表沿该曲线方向的函数 f 的导数 $df/d\lambda$。
  - $T^\alpha \partial_\alpha f$ 与坐标系的选择无关。
  - 点 P 处的 $\partial_\alpha f$ 可视为一个线性映射。
- 函数 f 在点 P 处的时空梯度 $\partial_\alpha f$ 是一个对偶矢量。

- 时空中的**梯度算符**定义为

$$\partial_\mu \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

  - ∂_μ 是一个对偶矢量算符，满足协变矢量的变换规律

$$\partial'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\alpha \partial_\alpha$$

- 与 ∂_μ 对应的矢量算符 $\partial^\mu \triangleq g^{\mu\nu}\partial_\nu$ 为

$$\partial^\mu \triangleq \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

  - ∂^μ 满足逆变矢量的变换规律 $\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$：
- 梯度算子的平方称为**达朗贝尔算子**（4-标量算子）：

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu \triangleq \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

矢量的例子：4-动量

静止质量为 m 的粒子的**四维动量**定义为

$$p^\alpha \triangleq mu^\alpha = \gamma mc\left(1,\ \vec{\beta}\right)$$

- **质壳关系**：$p^\alpha p_\alpha = -m^2c^2$
- 经常将四维动量写为：$p^\alpha = \left(\mathcal{E}/c,\ \vec{p}\right)$
  - ➢ $\mathcal{E}$ 和 $\vec{p}$ 分别称为粒子的**相对论能量和动量**：

$$\mathcal{E} \triangleq \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \vec{p} \triangleq \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

  - ➢ 由能量、动量的定义以及质壳关系不难得到

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{\mathcal{E}},\qquad \mathcal{E}^2 = |\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4$$

矢量的例子： 4-加速度

粒子的**四维加速度**定义为 $w^\alpha \triangleq \dfrac{du^\alpha}{d\tau} = \underbrace{\boxed{\dfrac{dt}{d\tau}}}_{\gamma}\dfrac{d}{dt}(\gamma c, \gamma\vec{v})$

- **4-加速度与4-速度正交：** $u_\alpha w^\alpha = 0$
- 在任一给定的惯性标架中， $w^0 = \gamma^4\vec{\beta}\cdot\vec{a}$，而

$$\vec{w} = \gamma^2\vec{a} + \gamma^4\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)\vec{\beta} = \gamma^4\left[\vec{a} + \vec{\beta}\times\left(\vec{\beta}\times\vec{a}\right)\right]$$

  - ➢ $\vec{a}$ 与 $\vec{\beta}$ 平行和垂直的分量 $\vec{a}_\parallel$ 和 $\vec{a}_\perp$ 分别为

$$\vec{w}_\parallel = \gamma^4\vec{a}_\parallel,\qquad \vec{w}_\perp = \gamma^2\vec{a}_\perp$$

$$0 = d(u_\alpha u^\alpha)/d\tau = u^\alpha(du_\alpha/d\tau) + u_\alpha(du^\alpha/d\tau) = 2u_\alpha w^\alpha$$

$$\beta = \tanh\xi \quad\Longrightarrow\quad \dot{\beta} = \dot{\xi}\,\mathrm{sech}^2\,\xi = \dot{\xi}/\gamma^2 \quad\Longrightarrow\quad \dot{\xi} = \gamma^2\dot{\beta}$$

$$\gamma = \cosh\xi \quad\Longrightarrow\quad \dot{\gamma} = \dot{\xi}\sinh\xi = (\gamma^2\dot{\beta})(\gamma\beta) \quad\Longrightarrow\quad \dot{\gamma} = \gamma^3\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}$$

- 设 K' 为粒子自身系，粒子的四维加速度在其中写为

$$w'^\alpha = \left(0,\ \vec{a}'\right) = \left(0,\ a_1',\ a_2',\ a_3'\right)$$

  - ➢ 4-加速度的平方： $w^\alpha w_\alpha = a'^2$
  - ➢ 将 $\vec{\beta}$ 的方向取为 x_1 轴正向，则

$$\begin{pmatrix}\gamma^4\beta a_1\\ \gamma^4 a_1\\ \gamma^2 a_2\\ \gamma^2 a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma & 0 & 0\\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ a_1'\\ a_2'\\ a_3'\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\gamma^4 a_1 = \gamma a_1'\\ \gamma^2 a_{2,3} = a_{2,3}'\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\vec{a}_\parallel = \vec{a}_\parallel'/\gamma^3\\ \vec{a}_\perp = \vec{a}_\perp'/\gamma^2\end{cases}$$

$$w^0 = \gamma^4\vec{\beta}\cdot\vec{a},\qquad \vec{w} = \gamma^2\vec{a} + \gamma^4\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)\vec{\beta}$$

- 关于矢量和对偶矢量，关键不在于描述它们在洛伦兹变换下如何变换的具体公式，而在于它们代表了明确定义的几何量，且这种定义与任何惯性标架的选择无关。
- 粒子在时空中的世界线是一条明确定义的曲线，其物理意义与事件在惯性标架中的时空坐标无关。
- 粒子的4速度 u^α（其世界线的切矢量）具有明确的物理意义。因此，将其纳入粒子的运动物理定律是合理的。
  - u^α 在惯性标架变换下按合适的方式变换这一事实，仅仅反映了它作为矢量具有明确的几何意义。
- 函数 f 的梯度 $\partial_\alpha f$ 作为对偶矢量具有明确的物理含义。
  - $\partial_\alpha f$ 按合适的方式变换这一事实仅仅是对此的体现。
  - 若 f 是一个物理量，则 $\partial_\alpha f$ 进入涉及 f 的物理定律是合理的。

16

三、四维张量

(k,l) 型张量是一个多重线性映射，将 k 个对偶矢量和 l 个矢量映射为一个数。 $dx^{\alpha_1}\cdots dx^{\alpha_k}\, dx_{\beta_1}\cdots dx_{\beta_1}$

- (k,l) 型张量的分量写为 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}$。
  - (k,l) 型张量的秩 n 定义为 $n=k+l$。
  - 在 4 维空间上，秩为 n 的一般张量具有 4^n 个独立分量。
  - 通过指标的升降，同秩张量之间可以相互转换。
- 在庞加莱变换下，(k,l) 型张量的分量如下变换

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\alpha_k}{}_{\mu_k}\,\tilde{\Lambda}_{\beta_1}{}^{\nu_1}\cdots\tilde{\Lambda}_{\beta_l}{}^{\nu_l}\,T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_k}$$

  - 平移变换 $x'=x+a$ 不影响张量的分量。
  - 重要之处在于，张量代表一个定义明确、独立于惯性标架选取的几何对象，而非洛伦兹变换下其分量如何变化的显式公式。

17

- 标量就是零阶张量。
- $(1,0)$ 型张量是从矢量到数的线性映射，即是一个对偶矢量。
- $(0,1)$ 型张量是从对偶矢量到数的线性映射，即是一个矢量。
- $(0,2)$ 型张量是将一对矢量映射为数的双重线性映射。
  - $(0,2)$ 型张量的分量 $T_{\alpha\beta}$ 如下变换

$$T' = \tilde{\Lambda} T \tilde{\Lambda}^T$$

$$\boxed{T'_{\alpha\beta} = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu \tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu T_{\mu\nu}} \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu T'_{\alpha\beta}$$

  - 时空度规 $g_{\alpha\beta}$ 是一个 $(0,2)$ 型张量，$g'_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$。

$$g'_{\alpha\beta}\,dx'^\alpha dx'^\beta = g_{\mu\nu}\boxed{dx^\mu}dx^\nu \quad \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu dx'^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g'_{\alpha\beta}}\,dx'^\alpha dx'^\beta = \boxed{g_{\mu\nu}\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu\tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu}\,dx'^\alpha dx'^\beta, \qquad \forall dx^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu\tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu$$

18

- (2,0) 型张量是将一对对偶矢量映射为数的双重线性映射。
  - (0,2) 型张量的分量 $T^{\alpha\beta}$ 如下变换：$\boxed{T'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}T^{\mu\nu}}$ $T' = \Lambda T \Lambda^T$
  - 时空度规的逆 $g^{\alpha\beta}$ 是一个 (2,0) 型张量。
- (1,1) 型张量是将对偶矢量和矢量映射为数的双重线性映射。

$$T:\ X_\alpha, Y^\beta \longrightarrow T^{\alpha}{}_{\beta}X_\alpha Y^\beta$$

  - (1,1) 型张量可视为将矢量映射为矢量的线性映射。

$$T:\ X^\alpha \longrightarrow Y^\alpha = T^{\alpha}{}_{\beta}X^\beta$$

  - δ^α_β 是一个 (1,1) 型张量，$\delta'^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$。

$$g'^{\alpha\beta}\, dx'_\alpha dx'_\beta = g^{\mu\nu}\boxed{dx_\mu}dx_\nu \qquad \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}dx_\alpha$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{g'^{\alpha\beta}}\,dx'_\alpha dx'_\beta = \boxed{g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}}\,dx_\alpha dx_\beta, \qquad \forall dx^\alpha$$

$$\Longrightarrow\ g'^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}$$

19

思考

设下面的 X^α 和 Y^α 可以是任意四维矢量。

(1) 若对 $\forall X^\alpha$，$A^\alpha X_\alpha$ 皆为标量，则 A^α 必为矢量。

(2) 若对 $\forall X^\alpha, Y^\alpha$，$T^{\alpha\beta}X_\alpha Y_\beta$ 皆为标量，则 $T^{\alpha\beta}$ 必为二阶张量。

(3) 若对 $\forall X^\alpha$，$T^{\alpha\beta}X_\alpha$ 皆为矢量，则 $T^{\alpha\beta}$ 必为二阶张量。

……

20

- 可将一个 (2,0) 型的时空张量记为

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varphi & \vec{p} \\ \vec{q} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}$$

φ 必然是三维空间中的标量。
$\vec{p}$ 和 $\vec{q}$ 必然是三维空间中的矢量。
$\overleftrightarrow{T}$ 必然是三维空间中的二阶张量。

$$\Longrightarrow\ T^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} -\varphi & \vec{p} \\ -\vec{q} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix},\quad T_{\alpha}{}^{\beta} = \begin{pmatrix} -\varphi & -\vec{p} \\ \vec{q} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix},\quad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varphi & -\vec{p} \\ -\vec{q} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi & \vec{p} \\ \vec{q} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \varphi & \vec{p} \\ \lambda\vec{q} & \lambda\overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^T \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi' & \vec{p}' \\ \vec{q}' & \overleftrightarrow{T}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & \vec{p}\lambda^T \\ \lambda\vec{q} & \lambda\overleftrightarrow{T}\lambda^T \end{pmatrix}$$

21

思考

- 若 $R^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 和 $S^{\beta_1\cdots\beta_m}$ 分别是 n 阶和 m 阶张量，证明

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_n\beta_1\cdots\beta_m} \triangleq R^{\alpha_1\cdots\alpha_n}S^{\beta_1\cdots\beta_m}$$

是一个 $n+m$ 阶张量，称其为 $R^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 和 $S^{\beta_1\cdots\beta_m}$ 的**张量积**。

  - 譬如，两个矢量 X^μ 和 Y^μ 的张量积为二阶张量：

$$T^{\mu\nu} \triangleq X^\mu Y^\nu$$

- 若 $T^{\alpha\beta}$ 是二阶张量，证明 $T^\alpha{}_\alpha$ 是一个四维标量，称为张量 $T^{\alpha\beta}$ 的**迹**，这种运算称为指标的**缩并**。
  - 高于二阶的张量，其中任一对指标都可进行缩并。例如

$$T^\gamma{}_\gamma{}^\alpha, \quad T^{\gamma\alpha}{}_\gamma, \quad T^{\alpha\gamma}{}_\gamma$$

给出三个不同的四维矢量，均称为三阶张量 $T^{\alpha\beta\gamma}$ 的**迹**。

22

1. 对称与反对称

- 张量 $T^{\alpha\beta\gamma\cdots}$ 关于指标 α 和 β 是**对称**的，若

$$T^{\alpha\beta\gamma\cdots} = T^{\beta\alpha\gamma\cdots}$$

- 张量 $T^{\alpha\beta\gamma\cdots}$ 关于指标 α 和 β 是**反对称**的，若

$$T^{\alpha\beta\gamma\cdots} = -T^{\beta\alpha\gamma\cdots}$$

- **完全（反）对称张量** $T^{\alpha\beta\gamma\cdots}$：关于任两指标（反）对称。
- n 阶张量 $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ 的**完全对称、完全反对称部分**分别定义为

$$T^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)} \triangleq \frac{1}{n!}(T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} + T^{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_n} + \cdots)$$

$$T^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]} \triangleq \frac{1}{n!}(T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} - T^{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_n} + \cdots)$$

23

二阶张量的完全对称与完全反对称部分

对于二阶张量 $T^{\alpha\beta}$，显然有 $T^{\alpha\beta} = T^{(\alpha\beta)} + T^{[\alpha\beta]}$，其中：

$$T^{(\alpha\beta)} = \frac{T^{\alpha\beta}+T^{\beta\alpha}}{2}, \quad T^{[\alpha\beta]} = \frac{T^{\alpha\beta}-T^{\beta\alpha}}{2}$$

- 可将反对称二阶张量表示为

$$A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \overleftrightarrow{a} \end{pmatrix} = \{\vec{p},\ \vec{a}\}$$

其中 $a_{ij} = \varepsilon_{ijk}a_k$（即 $\overleftrightarrow{a} = -\vec{a}\times\overleftrightarrow{I} = -\overleftrightarrow{I}\times\vec{a}$，$\vec{a}$ 是三维赝矢量）

$$A^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ \vec{p} & \overleftrightarrow{a} \end{pmatrix}, \quad A_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{p} \\ -\vec{p} & \overleftrightarrow{a} \end{pmatrix}, \quad A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{p} \\ \vec{p} & \overleftrightarrow{a} \end{pmatrix} = \{-\vec{p},\ \vec{a}\}$$

24

三阶张量的完全对称与完全反对称部分

对于三阶张量 $T^{\alpha\beta\gamma}$：

$$T^{(\alpha\beta\gamma)}=\frac{1}{3!}\left(T^{\alpha\beta\gamma}+T^{\beta\gamma\alpha}+T^{\gamma\alpha\beta}+T^{\beta\alpha\gamma}+T^{\gamma\beta\alpha}+T^{\alpha\gamma\beta}\right)$$

$$T^{[\alpha\beta\gamma]}=\frac{1}{3!}\left(\boxed{T^{\alpha\beta\gamma}}+\boxed{T^{\beta\gamma\alpha}}+\boxed{T^{\gamma\alpha\beta}}-\boxed{T^{\beta\alpha\gamma}}-\boxed{T^{\gamma\beta\alpha}}-\boxed{T^{\alpha\gamma\beta}}\right)$$

若 $T^{\alpha\beta\gamma}$ 关于任意两个指标反对称，则

$$T^{(\alpha\beta\gamma)}=0,\qquad T^{[\alpha\beta\gamma]}=\frac{1}{3}\left(T^{\alpha\beta\gamma}+T^{\beta\gamma\alpha}+T^{\gamma\alpha\beta}\right)$$

【思考】如果三阶张量 $T^{\alpha\beta\gamma}$ 关于某一对指标对称，
$T^{(\alpha\beta\gamma)}$ 和 $T^{[\alpha\beta\gamma]}$ 分别写为了什么？

25

2. Levi–Civita张量

Levi–Civita张量 $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$在任一惯性标架中的分量均由下式定义

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\triangleq\begin{cases}+1, & (\alpha\beta\mu\nu)\text{是}(0123)\text{的偶置换}\\ -1, & (\alpha\beta\mu\nu)\text{是}(0123)\text{的奇置换}\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}=\begin{pmatrix}\delta^\alpha_0 & \delta^\alpha_1 & \delta^\alpha_2 & \delta^\alpha_3\\ \delta^\beta_0 & \delta^\beta_1 & \delta^\beta_2 & \delta^\beta_3\\ \delta^\mu_0 & \delta^\mu_1 & \delta^\mu_2 & \delta^\mu_3\\ \delta^\nu_0 & \delta^\nu_1 & \delta^\nu_2 & \delta^\nu_3\end{pmatrix}$$

- 注意：$\epsilon^{0123}=+1$，而 $\epsilon_{0123}=-1$。
- $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ 是完全反对称的。
- $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ 与洛伦兹变换矩阵 Λ 的行列式

$$\Lambda^\rho{}_\alpha\Lambda^\sigma{}_\beta\Lambda^\gamma{}_\mu\Lambda^\delta{}_\nu\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}=(\det\Lambda)\epsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}=(\det\Lambda)\epsilon'^{\rho\sigma\gamma\delta}$$

  - ➢ $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ 并非张量，实际上它是 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 下的赝张量。

26

赝张量

设量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 有 4^n 个分量，且它在正规洛伦兹变换及时空平移变换下如同一个 n 阶张量一样进行变换。

（1）若 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 在空间反演 $x'^\mu=\mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu$ 下如下变换

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_n}=-\mathcal{P}^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\mathcal{P}^{\alpha_n}{}_{\mu_n}T^{\mu_1\cdots\mu_n}$$

则称其是**空间反演下的赝张量**。

（2）若 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 在时间反演 $x'^\mu=\mathcal{T}^\mu{}_\nu x^\nu$ 下如下变换

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_n}=-\mathcal{T}^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\mathcal{T}^{\alpha_n}{}_{\mu_n}T^{\mu_1\cdots\mu_n}$$

则称其是**时间反演下的赝张量**。

27

【思考】 在空间反演 $ct' = ct$、$\vec{x}' = -\vec{x}$ 下，

（1）赝标量 φ 如何变换?

（2）赝矢量 X^α 的时间分量 X^0 和空间分量 $\vec{X}$ 如何变换?

【思考】 在时间反演 $ct' = -ct$、$\vec{x}' = \vec{x}$ 下，

（1）赝标量 φ 如何变换?

（2）赝矢量 X^α 的时间分量 X^0 和空间分量 $\vec{X}$ 如何变换?

【思考】

（1）$c, ds^2, d\tau, d^4x$ 中，哪些是 $\mathcal{P}$（$\mathcal{T}$）下的赝标量?

（2）$dx^\alpha, u^\alpha, p^\alpha, w^\alpha$ 中，哪些是 $\mathcal{P}$（$\mathcal{T}$）下的赝矢量?

28

对偶张量

一个反对称二阶张量 $A^{\alpha\beta}$ 的**对偶张量**定义为：

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} \triangleq \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}A_{\mu\nu}$$

- $\tilde{A}^{\alpha\beta}$ 是一个二阶反对称赝张量。

$$A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \overleftrightarrow{a} \end{pmatrix} \qquad A^{\alpha\beta} = \{\vec{p},\ \vec{a}\}$$

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{p} \\ \vec{p} & \overleftrightarrow{a} \end{pmatrix} \qquad A_{\alpha\beta} = \{-\vec{p},\ \vec{a}\}$$

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{a} \\ -\vec{a} & -\overleftrightarrow{p} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}^{\alpha\beta} = \{\vec{a},\ -\vec{p}\}$$

29

不变张量

闵可夫斯基空间中基本的不变张量（在所有惯性标架下都具有相同的分量）有三个

$$g^{\alpha\beta},\quad g_{\alpha\beta},\quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

- 其他的不变张量必然是这三个基本不变张量的代数组合。
- 不存在奇数阶的不变张量。
- 二阶不变张量具有下面的形式：

$$T^{\alpha\beta} = a g^{\alpha\beta},\quad T_{\alpha\beta} = a g_{\alpha\beta},\quad T^{\alpha}{}_{\beta} = a\delta^{\alpha}_{\beta} = a g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}$$

30

【思考】设四阶张量 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 是不变张量。

(1) $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 的最一般表达式是什么?

$$T^{\alpha\beta\mu\nu} = a_1 g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + a_2 g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + a_3 g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} + a_4 \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

(2) 若 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 是完全反对称的，其一般表达式是什么?

(3) 若 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 是完全对称的，其一般表达式是什么?

$$T^{\alpha\beta\mu\nu} = a\left(g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}\right)$$

(4) 若 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 关于 α 和 β 反对称，其一般表达式是什么?

(5) 若 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 关于 α 和 β 对称，其一般表达式是什么?

31

3. 二阶张量的不本征值和本征矢

设 $S^{\alpha\beta}$ 是二阶张量，若 $S^{\alpha\beta} X_\beta$ 与非零矢量 X^α 平行、即

$$S^\alpha{}_\beta X^\beta \; \boxed{S^{\alpha\beta} X_\beta} = \boxed{\lambda X^\alpha} \; \lambda g^{\alpha\beta} X_\beta$$

则分别称 λ 和 X^α 为 $S^{\alpha\beta}$ 的**本征值**和**本征矢**。

- 本征矢方程 $S^{\alpha\beta} X_\beta = \lambda X^\alpha$ 可以写为

$$\left(S^{\alpha\beta} - \lambda g^{\alpha\beta}\right) X_\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(S^\alpha{}_\beta - \lambda \delta^\alpha_\beta\right) X^\beta = 0$$

- 本征矢方程具有非零解 X^β 的充要条件是满足久期方程

$$\left|S^\alpha{}_\beta - \lambda \delta^\alpha_\beta\right| = 0$$

  - 本征值 λ 是不变量: $S^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta = \lambda X_\alpha X^\alpha = \lambda g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$

32

- 本征值的如下四个不同组合称为对称张量 $S^{\alpha\beta}$ 的基本不变量:

$$\begin{cases} I_1 = \sum\limits_a \lambda_a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ I_2 = \sum\limits_{a<b} \lambda_a \lambda_b = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_4 \\ I_3 = \sum\limits_{a<b<c} \lambda_a \lambda_b \lambda_c = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_3 \lambda_4 \\ I_4 = \sum\limits_{a<b<c<d} \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \end{cases}$$

  - I_k 是特征多项式中 λ^{4-k} 的系数（或其负值），也就是 $S^\alpha{}_\beta$ 中删去 $4-k$ 个对角元产生的代数余子式之和:

$$\left|S^\alpha{}_\beta - \lambda \delta^\alpha_\beta\right| = \lambda^4 - I_1 \lambda^3 + I_2 \lambda^2 - I_3 \lambda + I_4 = 0$$

33

- 对于反对称张量

$$A^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & \vec{p}\\ -\vec{p} & \vec{a}\end{pmatrix}=\{\vec{p},\ \vec{a}\}$$

久期方程 $\left|A^{\alpha}{}_{\beta}-\lambda\delta^{\alpha}_{\beta}\right|=\lambda^4+(a^2-p^2)\lambda^2-(\vec{p}\cdot\vec{a})^2=0$

因此，反对称张量 $A^{\alpha\beta}=\{\vec{p},\ \vec{a}\}$ 最多有两个基本不变量

$$I_1=a^2-p^2,\quad I_2=\vec{p}\cdot\vec{a}$$

$$A^{\alpha}{}_{\beta}=\begin{pmatrix}0 & \vec{p}\\ \vec{p} & \vec{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & p_1 & p_2 & p_3\\ p_1 & 0 & a_3 & -a_2\\ p_2 & -a_3 & 0 & a_1\\ p_3 & a_2 & -a_1 & 0\end{pmatrix}$$

- 显然，由反对称二阶张量 $A^{\alpha\beta}$ 可以构造如下两个不变量：

$$A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\quad 和\quad \tilde{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$$

由于

$$A^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & \vec{p}\\ -\vec{p} & \vec{a}\end{pmatrix},\quad A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & -\vec{p}\\ \vec{p} & \vec{a}\end{pmatrix},\quad \tilde{A}^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & \vec{a}\\ -\vec{a} & -\vec{p}\end{pmatrix}$$

因而，不变量 $A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$ 和 $\tilde{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$ 可以表示为

$$\begin{cases}A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}=2(a^2-p^2)=2I_1\\ \tilde{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}=-4\vec{p}\cdot\vec{a}=-4I_2\end{cases}$$

由此也可见：I_1 是三维标量，而 I_2 是三维赝标量。

四、张量场

(k,l) 型**张量场**在每一个时空点处指定了一个(k,l) 型张量。

- 时空的函数 $f(x)=f(t,\vec{x})$ 是一个 $(0,0)$ 型张量场。
- 在庞加莱变换下，(k,l) 型张量场的分量如下变换

$$\boxed{T'^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}}\boxed{(x')}$$
$$=\boxed{\Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\alpha_k}{}_{\mu_k}\tilde{\Lambda}_{\beta_1}{}^{\nu_1}\cdots\tilde{\Lambda}_{\beta_l}{}^{\nu_l}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_k}}\boxed{(x)}$$

- (k,l) 型张量场的导数是一个 $(k,l+1)$ 型张量场，定义如下

$$\partial_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}=T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l,\mu}$$

四维标量势

- 若四维矢量场 $A_\alpha(x)$ 是**无旋场**，即满足

$$\partial_\alpha A_\beta = \partial_\beta A_\alpha$$

则存在四维标量场 $\psi(x)$，使得

$$A_\alpha = \partial_\alpha \psi$$

➢ $\psi(x)$ 具有不确定性：$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) + constant$。

- 若 $\boxed{\nabla \times \vec{F} = 0}$，$\Leftrightarrow \quad \epsilon^{ijk}\partial_j F_k = 0$
  $\Leftrightarrow \quad \partial_j F_k = \partial_k F_j$

则存在 φ，使得 $\boxed{\vec{F} = \nabla\varphi}$。$\Leftrightarrow \quad F^i = \partial^i \varphi$

➢ $\varphi(\vec{x})$ 具有不确定性：$\tilde{\varphi}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) + constant$

四维矢量势

- 若四维反对称张量场 $F_{\alpha\beta}(x)$ 满足**毕安琪恒等式**，即

$$\boxed{\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0$$

则存在四维矢量场 $A_\alpha(x)$，使得

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

➢ $A_\alpha(x)$ 具有不确定性：$\tilde{A}_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \psi(x)$。

- 若 $\boxed{\nabla \cdot \vec{F} = 0}$，$\Leftrightarrow \quad \partial_i F^i = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$
  $\Leftrightarrow \quad \epsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} \propto \partial_{[i}F_{jk]} \propto \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0$

则存在 $\vec{A}$，使得 $\boxed{\vec{F} = \nabla \times \vec{A}}$。$\Leftrightarrow \quad F^k = \epsilon^{kij}\partial_i A_j$
$\Leftrightarrow \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$

$$\boxed{F_{ij} = \epsilon_{ijk} F^k \quad \begin{cases} F_{23} = F^1 \\ F_{31} = F^2 \\ F_{12} = F^3 \end{cases}}$$

➢ $\vec{A}(\vec{x})$ 具有不确定性：$\tilde{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \nabla\psi(\vec{x})$

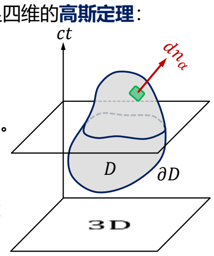
四维高斯定理

类似于三维空间，一个四维矢量场 $G^\alpha(x)$ 的**四维散度**定义为

$$\partial_\alpha G^\alpha$$

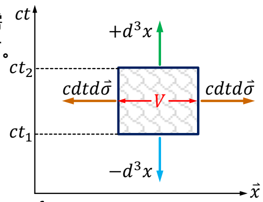
它在某个四维时空区域 D 内的积分满足四维的**高斯定理**：

$$\int_D \partial_\alpha G^\alpha d^4x = \oint_{\partial D} G^\alpha dn_\alpha$$



其中 ∂D 是 D 的边界：一个三维超曲面。矢量 dn_α 的大小等于相应的三维体积元，其方向“垂直于”该超曲面，即当 δx^α 是超曲面上 P 点处的任一位移矢量时，该点的 dn_α 满足 $dn_\alpha \delta x^\alpha = 0$。

- 显然通量满足叠加原理，只需在小区域 D 上证明下式即可。
- 不妨将 D 取为矩形盒子、且其表面与坐标轴垂直。



$$\int_D \partial_\alpha G^\alpha d^4x$$

$$= \int_V d^3x \int_{ct_1}^{ct_2} dx^0\, \partial_0 G^0 + \int_{ct_1}^{ct_2} dx^0 \int_V d^3x\, \nabla \cdot \vec{G}$$

$$= \underbrace{\boxed{\int_V G^0(t_2,\vec{x}) d^3x}}_{\text{上底面通量}} + \underbrace{\boxed{\left[-\int_V G^0(t_1,\vec{x}) d^3x\right]}}_{\text{下底面通量}} + \underbrace{\boxed{\int_{t_1}^{t_2} cdt \oint_{\partial V} \vec{G}(t,\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}}}_{\text{侧面通量}}$$

$$\Rightarrow \int_D \partial_\alpha G^\alpha d^4x = \oint_{\partial D} G^\alpha dn_\alpha$$

40

五、张量与相对性原理

相对性原理要求：

物理定律在所有惯性系中都具有形同的形式。

- 代表物理量的数学对象以及这些对象所满足的方程能够被精确定义，且仅基于狭义相对论中的时空结构。
- 狭义相对论为物理定律的表述提出了两个标准：
  - 物理量应由时空张量（场）来表示。
  - 这些张量（场）所满足的方程应仅包含这些张量（场）、时空度规，以及将时空张量映射为时空张量的运算。

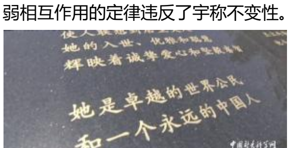
称满足这两个性质的理论具有狭义相对论的协变性。

若 $T_{\mu\nu}$、$S_{\mu\nu}$、$R_{\mu\nu}$ 均为4-张量，则如下方程具有狭义相对论协变性

$$T_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad T'_{\mu\nu} + S'_{\mu\nu} = R'_{\mu\nu}$$

41

- 相对论协变的方程可以写为“张量=张量”的形式，也可以写为“赝张量=赝张量”的形式。
  - 这样的方程在包含离散变换的完整洛伦兹变换下不变。
- 形如“张量=赝张量”的方程仅在正规洛伦兹变换下不变。
  - 支配电磁、引力和强相互作用的定律在完整洛伦兹变换下不变，这些定律不应写成“张量等于赝张量”的形式。
  - 弱相互作用的定律违反了宇称不变性。



粒子动力学

- 在相对论之前的物理学中，粒子的动力学方程写为

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt},\quad (\vec{p}\triangleq m\vec{v})$$ 力 $\vec{F}$ 取决于所考虑的具体情况

  - 该方程不具有明显的洛伦兹协变性，因此，它在狭义相对论中可能并非可接受的物理定律。
- 为了得到可接受的粒子力学定律，有两种可能性：
  - 牛顿方程实际上已具有狭义相对论的协变性，只需将其重新表述为仅包含时空张量的形式即可。
  - 牛顿方程不对应于任何一个具有狭义相对论协变性的方程，从而必须将其舍弃并替换为仅包含时空张量的新定律。
- 此处属于第二种情况，故必须寻找一条新的粒子力学定律。
  - 该定律仅包含时空张量，且对于非相对论粒子，该定律可回到牛顿方程。

43

- 能够表示粒子速度的唯一合理的候选张量是其4-速度 u^α。能够表示粒子动量的唯一合理候选张量是

$$p^\alpha\triangleq mu^\alpha=\left(mu^0,\ m\vec{u}\right)=\left(\mathcal{E}/c,\ \vec{p}\right)$$

  - p^α 称为粒子的4-动量，m 称为粒子的“静止质量”。
- 仅涉及张量的牛顿第二定律修正版，唯一合理的候选形式是

$$f^\alpha=\frac{d}{d\tau}(mu^\alpha)$$ 4-力 f^α 取决于所考虑的具体情况

  - 4-力 f^α 与四维速度正交：$u_\alpha f^\alpha=0$。
- 在相对论之前的物理学中，粒子的能量和动量分别是三维标量和矢量，它们是完全不同的物理量。
  - 可以自由地在能量表达式中添加任意常数。
- 在狭义相对论中，粒子的能量和动量只是4-动量 p^α 的分量。
  - 静止粒子的能量必须被赋值为 $\mathcal{E}_0=mc^2$。

44