

补遗一. 朗道-栗弗席兹方程

1

朗道-栗弗席兹 (Landau-Lifshitz) 方程

- 阿伯拉罕-洛伦兹方程也不具有普遍性 (即便对非相对论粒子) 。

$$m\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{F}}_0 + m\tau\dot{\mathbf{a}}, \quad \text{where} \quad \begin{cases} m = m_0 + \alpha \\ \tau = 2e_s^2/3mc^3 \end{cases}$$

- 隐舍某个空间尺度: 粒子尺度或到点粒子的距离 $r_0 \rightarrow 0$ 。
- 只要裸质量 $m_0 > 0$, 则质量重整化引入的电磁能量

$$\frac{e_s^2}{r_0} < mc^2 \quad \Rightarrow \quad r_0 > \frac{e_s^2}{mc^2} \sim c\tau$$

- $r_0 > c\tau$ 是理论有效的最短尺度,

且方程将产生如下 $m\tau\ddot{\mathbf{a}}(r_0/c) \approx m\tau^2\ddot{\mathbf{a}}$ 的截止修正。

2

- 设 $T = a/\dot{a}$ 是加速度变化的典型时间, 则阿伯拉罕-洛伦兹方程在物理上更有意义的写法是

$$m\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{F}}_0 + m\tau\dot{\mathbf{a}} + O(\tau^2/T^2)$$

- 只有在辐射阻尼力 $\ddot{\mathbf{F}}_R = m\tau\dot{\mathbf{a}} \ll \ddot{\mathbf{F}}_0$ 始终满足的情形下, 阿伯拉罕-洛伦兹方程才是有意义的。
- 加速度的主要贡献为

$$\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{F}}_0/m + O(\tau/T) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{F}}_0/m + O(\tau/T)$$

- 将得到的 $\dot{\mathbf{a}}$ 代回到原方程, 给出

$$m\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{F}}_0 + \tau\dot{\mathbf{F}}_0 + O(\tau^2/T^2)$$

- 此方程与原方程具有同样的精确度。
- 由于其中没有 $\ddot{\mathbf{a}}$ 项, 此方程不会有自加速或其他病态解。

3

- 非相对论点电荷的轨迹, 可以用如下包含辐射阻尼力的朗道-栗弗席兹方程进行最佳描述

$$m\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{F}}_0 + \tau\dot{\mathbf{F}}_0 = \ddot{\mathbf{F}}_0 + \tau\partial_t\ddot{\mathbf{F}}_0 + \tau(\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\ddot{\mathbf{F}}_0$$

- 若粒子从 $t = 0$ 时刻开始受到恒定外力 \vec{f} 作用, 从而

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{F}}_0(t) = \vec{f}\delta(t) \\ \dot{\mathbf{F}}_0(t) = \vec{f}\delta(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\mathbf{a}}(t) = 0, & (t < 0) \\ \dot{\mathbf{a}}(t) = \vec{f}/m, & (t > 0) \end{cases}$$

- 如果将原子中处于激发态的电子设想为是固有频率 ω_0 的简谐振子, 同时受到辐射阻尼力的作用, 即

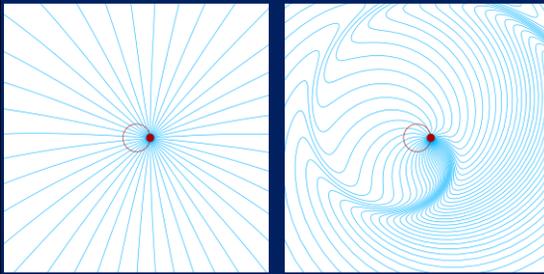
$$\ddot{\mathbf{F}}_0 = -m\omega_0^2\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{F}}_R = \tau\dot{\mathbf{F}}_0(t) = -m\omega_0^2\tau\dot{\vec{x}}$$

从而电子的运动方程为 (其中 $\gamma = \omega_0^2\tau$)

$$m\ddot{\vec{x}} = -m\omega_0^2\vec{x} - \gamma m\dot{\vec{x}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = 0$$

4

补遗二. 非相对论点电荷的辐射

 $\beta = 0.1$ $\beta = 0.6$

5

- 本节讨论非相对论的带电粒子 ($\beta \ll 1$) 的辐射。

- 金属导体中的自由电子、原子中的电子、原子核中的质子都满足这个条件。
- 等离子体中的带电粒子通常也满足这个条件。

- 先考察带电粒子做简谐振动的情况。粒子坐标为

$$\vec{x} = \vec{A} \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{v}} = -\omega \vec{A} \sin \omega t$$

- 非相对论条件

$$\beta = v/c \ll 1 \quad \Rightarrow \quad A \ll \frac{\lambda/2\pi}{c/\omega} \quad \Rightarrow \quad A \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

辐射波的波长

- 可见, 非相对论带电粒子的辐射场应该就是这个前面小场源近似下的电偶极辐射。

- 这一结论也可从点电荷的辐射场直接证明。

6

一、非相对论点电荷的辐射

对于非相对论的带电粒子，由于 $\beta \ll 1$ ，因而

$$\vec{n}^* \triangleq \vec{R}^* - \vec{\beta}^* \approx \vec{R}^*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}^* \cdot \vec{n}^* \approx 1 \\ \vec{R}^* \times (\vec{n}^* \times \vec{a}^*) \approx \vec{R}^* \times (\vec{R}^* \times \vec{a}^*) \end{cases}$$

因此辐射场为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(e\vec{a}^* \times \vec{R}^*) \times \vec{R}^*}{R^{*3}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{R}^*) \times \vec{R}^*}{R^{*3}}$$

这里 \vec{p}^* 是粒子在 $t^* = t - R^*/c$ 时刻相对于原点 O 的电偶极矩，而 $\ddot{\vec{p}}^*$ 则是 \vec{p}^* 在 t^* 时刻的二阶导数

$$\vec{p}^* = e\vec{x}_e^* = e\vec{x}_e(t^*), \quad \ddot{\vec{p}}^* = e\vec{a}^*$$

7

- 在任一特定时刻， $r^* = |\vec{x}_e^*|$ 是确定的有限数值， $r = |\vec{x}|$ 最终是要趋于无穷的，故 $R^* = \vec{x} - \vec{x}_e^*$ 和 $t^* = t - R^*/c$ 近似为

$$\vec{R}^* \approx \vec{x}, \quad t^* \approx t - \frac{r}{c} \triangleq t_r$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{(\ddot{\vec{p}}_r \times \hat{r}) \times \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad \vec{B} = \frac{\ddot{\vec{p}}_r \times \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

这里 \vec{p}_r 和 $\ddot{\vec{p}}_r$ 分别是 t_r 时刻的电矩及其二阶导数。

- 对于非相对论的点电荷，其辐射场的主要贡献就是小场源近似下的电偶极辐射。

- t_r 时刻非相对论点电荷的瞬时辐射功率的角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{p}}_r \times \hat{r}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \Rightarrow P = \frac{|\ddot{\vec{p}}_r|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2e_s^2 a^2}{3c^3}$$

此处瞬时辐射功率是之前所得谐振电流下电偶极平均辐射功率的两倍

8

非相对论点电荷系统的辐射场

对于非相对论带电粒子构成的孤立体系，总的电偶极矩为

$$\vec{p}(t) = \sum e_n \vec{x}_n(t) = \sum \frac{e_n}{m_n} m_n \vec{x}_n(t)$$

系统在 t 时刻激发的辐射场、辐射功率角分布和总辐射功率为

$$\vec{E} = \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}) \times \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3}, \quad P = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

- 若所有粒子都具有相同的荷质比（设为 e/m ），那么

$$\vec{p}(t) = \frac{e}{m} \cdot M \vec{X}_C(t) \quad \begin{cases} M = \sum m_n \\ \vec{X}_C = \sum m_n \vec{x}_n / M \end{cases} \text{ 质心匀速运动}$$

由荷质比相同的非相对论带电粒子构成的孤立体系，不会有辐射（电偶极辐射）。

9

二、两个点电荷构成的体系

考察两个带电粒子构成的体系，设粒子的速度远小于光速。整体匀速运动并不引起辐射，故只需研究粒子的相对运动。

$$m_2, e_2 \leftarrow \frac{\vec{x}}{x_2} \quad C \quad \frac{\vec{x}}{x_1} \rightarrow m_1, e_1 \quad \text{约化质量 } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

以质心作为原点 $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \triangleq \vec{x}, \quad m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = 0$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 \triangleq +\frac{\mu}{m_1} \vec{x}, \quad \vec{x}_2 \triangleq -\frac{\mu}{m_2} \vec{x}$$

体系的电偶极矩 $\vec{p} = e_1 \vec{x}_1 + e_2 \vec{x}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \vec{x}$

$$\Rightarrow P = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mu^2 |\ddot{\vec{x}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

10

相对运动

质心系中，粒子 e_1 的运动方程为（其中 $\vec{x}_1 = \mu \vec{x} / m_1$ ）

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = -\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{x} = \mp \frac{\alpha}{r^2} \hat{r}, \quad \text{where } \alpha = \frac{|e_1 e_2|}{4\pi\epsilon_0} \quad \begin{matrix} \text{吸引力: 负号} \\ \text{排斥力: 正号} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\vec{x}} = \mp \frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \Rightarrow P = \frac{\alpha^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 r^4} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2$$

- 采用平面极坐标，相对运动的轨道方程为

$$r(\theta) = \frac{r_0}{\epsilon \cos \theta \pm 1}, \quad \text{where } r_0 = \frac{L^2}{\mu \alpha}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}}$$

- 其中相对运动的能量和角动量分别为

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu v^2 \mp \frac{\alpha}{r}, \quad L = \mu r^2 \dot{\theta}$$

11

辐射损失

在时间 $t_1 \leq t \leq t_2$ 内，体系由于辐射损失的能量为

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \frac{\alpha^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\theta}{r^4} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{\mu r^2 d\theta}{L}$$

$$\Rightarrow W = \frac{\mu \alpha^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 L} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow W = \frac{\mu^3 \alpha^4}{6\pi\epsilon_0 c^3 L^5} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\epsilon \cos \theta \pm 1)^2 d\theta$$

其中 $g = \left[\theta \pm 2\epsilon \sin \theta + \frac{1}{2} \epsilon^2 (\theta + \sin \theta \cos \theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$

$$r(\theta) = \frac{r_0}{\epsilon \cos \theta \pm 1}, \quad \text{where } r_0 = \frac{L^2}{\mu \alpha}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}}$$

12

椭圆运动 ($\epsilon < 0$) 时的辐射损失

两粒子在库仑吸引力下相对作椭圆运动时, 运动一周的时间内

$$g = \left[\theta + 2\epsilon \sin \theta + \frac{1}{2}\epsilon^2(\theta + \sin \theta \cos \theta) \right]_0^{2\pi} = \pi(2 + \frac{1-b^2/a^2}{\epsilon^2})$$

椭圆运动的半半径 $L^2/\mu\alpha = b^2/a$ 、周期 $T = 2\pi\sqrt{\mu a^3/\alpha}$, 故

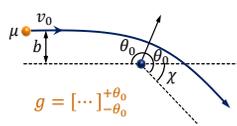
$$\begin{cases} W = \frac{\frac{\mu^3 \alpha^4}{6\epsilon_0 c^3 L^5}}{\sqrt{\mu \alpha^3 a^5}} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(3 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left(3 - \frac{2|\epsilon|L^2}{\mu \alpha^2} \right) \\ \langle W \rangle = \frac{W}{T} = \frac{\alpha^2 a}{12\pi \epsilon_0 c^3 b^5} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(3 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\sqrt{2}\mu^{5/2}\alpha^3|\epsilon|^{3/2}}{6\pi \epsilon_0 c^3 L^5} \end{cases}$$

13

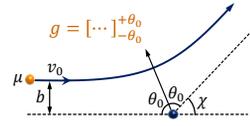
双曲运动 ($\epsilon > 0$) 时的辐射损失

$$\begin{cases} \epsilon^2 = 1 + \frac{2\epsilon L^2}{\mu \alpha^2} = 1 + \left(\frac{b\mu v_0^2}{\alpha} \right)^2 & \Rightarrow \begin{cases} \cot \frac{\chi}{2} = \frac{b\mu v_0^2}{\alpha} = \frac{v_0 L}{\alpha} \\ \epsilon \sin \frac{\chi}{2} = 1 \end{cases} \\ \epsilon^2 = 1 + \tan^2 \theta_0 = 1 + \cot^2 \frac{\chi}{2} \end{cases}$$

$$W = \frac{\mu^3 v_0^5}{12\pi \epsilon_0 c^3 \alpha} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \tan^3 \frac{\chi}{2} \left[(\pi \pm \chi) \left(1 + 3 \tan^2 \frac{\chi}{2} \right) \pm 6 \tan \frac{\chi}{2} \right]$$



$$\cos \theta_0 = -1/\epsilon, \quad \chi = 2\theta_0 - \pi$$



$$\cos \theta_0 = 1/\epsilon, \quad \chi = \pi - 2\theta_0$$

14

§5 介质常数的洛伦兹模型

15

一、自由和束缚

- 介质中的 (宏观) 总电荷密度和 (宏观) 总电流密度分别为

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}, \quad \vec{j} = \vec{j}_f + \partial_t \vec{P} + \nabla \times \vec{M}$$

- 电荷、电流分布与电磁场的关系符合真空中的麦克斯韦方程。
- “自由电荷”和“传导电流”这样的术语, 在静电学和电动力学中的用法略有不同, 下面澄清其含义。
- 静电学中, 束缚电荷和非束缚电荷的行为有着本质的区别。
 - 束缚电荷最多只能移动有限距离, 而非束缚电荷则会持续移动, 直到被物体表面阻挡 (就像在导体中一样)。
 - 电介质中的“自由电荷”被假定为不能在其中自由移动。

- 电动力学中, 若电磁场以非零频率随时间振荡, 则束缚电荷和非束缚电荷都会发生振荡, 二者在行为上并无本质区别。

16

处理电荷、电流的两种等价描述

- 描述一: 将非束缚电荷视为自由电荷。

- 非束缚电荷对 ρ 和 \vec{j} 的贡献直接计为 ρ_f 和 \vec{j}_f 。
- ρ_f 和 \vec{j}_f 对 \vec{P} 和 \vec{M} 没有任何贡献。

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad \vec{j}' = \nabla \times \vec{M} + \partial_t \vec{P}$$

- 描述二: 将非束缚电荷与束缚电荷同等对待。

- 非束缚电荷对 ρ_f 或 \vec{j}_f 没有贡献, 即 $\rho_f = 0 = \vec{j}_f$ 。
- 非束缚电荷通过 $-\nabla \cdot \vec{P}$ 对 ρ 贡献, 通过 $\partial_t \vec{P} + \nabla \times \vec{M}$ 对 \vec{j} 贡献。

$$\rho = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad \vec{j} = \nabla \times \vec{M} + \partial_t \vec{P}$$

17

- 对于振荡电荷, 这两种描述是等价的。

- 两种描述下的总源 ρ 和 \vec{j} 以及场 \vec{E} 和 \vec{B} 是相同的, 且均满足

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, & \nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) \end{cases}$$

- 两种描述中辅助矢量 \vec{D} 和 \vec{H} 的定义相同, 但其数值不同

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$$

- 两种描述中辅助矢量 \vec{D} 和 \vec{H} 满足的方程相同。第二种描述下

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0} - \frac{\nabla \times \vec{M}}{\mu_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 = \rho_f \\ \nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} = \vec{j}_f + \partial_t \vec{D} \end{cases}$$

18

- 许多文献中采用第一种描述，将非束缚电荷电流视为自由的。
 - 这在低频情况下尤为方便。因为此情形下：
 - 束缚电荷会产生（几乎）实的介电常数，而非束缚电荷会产生（几乎）实的电导率。
- 在下面的简单介质模型中，我们采用第二种描述，即将所有电荷都放在同一基础上处理，并认为它们都不是自由电荷。
 - 在此观点下，由于 $\rho_f = 0 = \vec{j}_f$ ，因而麦克斯韦方程写为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0, & \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, & \nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} \end{cases}$$
 - 对于均匀介质中的时谐场，独立方程为

$$\nabla \times \vec{E} = +i\omega \vec{B}, \quad \nabla \times \vec{H} = -i\omega \vec{D}$$

19

二、介电常数的洛伦兹模型

- 取 $\rho_f = \vec{j}_f = 0$ ，但容许非束缚电荷在介质中自由移动。
 - 利用极化强度 \vec{P} ，在同等地位上描述束缚、非束缚电荷。
- 忽略磁化效应 ($\vec{M} = 0$)，因而 $\mu(\omega) = \mu_0$ 。
 - 由此，介质的所有宏观电磁效应都由介电常数 $\epsilon(\omega)/\epsilon_0$ 决定。
- 忽略固有电矩及核的运动。
 - 视极化完全由电子运动所致。
- 假设每个电子都是电荷为 $-e$ 、质量为 m_e 的非相对论点粒子。
 - 视不同的电子彼此独立地在宏观场中运动。
 - 运动过程中，电子受到宏观电场的作用，并忽略磁力。
 - 运动过程中，电子还受到弹性恢复力和摩擦阻尼力作用。

20

1. 电子的运动与相对介电常数

- 取弹性势能的极小值点为原点，电子的运动方程为

$$m_e \ddot{\vec{x}} + \gamma m_e \dot{\vec{x}} + m_e \omega_0^2 \vec{x} = -e \vec{E}(t, \vec{x}) \quad (\text{其中 } \vec{E} \text{ 为总电场})$$
 - 弹性恢复力描述原点处的原子对电子的作用。
 - 阻尼力描述碰撞和辐射效应。
- 这一模型可定性描述绝缘介质、等离子体及导电介质的行为。
 - 绝缘介质：所有电子都受到束缚，从而取 $\omega_0^2 > 0$ 。 γ 很小，常可忽略
 - 等离子体：所有电子都不受束缚，从而取 $\omega_0^2 = 0$ 。
 - 导电介质：考察不与原子结合的电子，取 $\omega_0^2 = 0$ 。 须保留 γ
- 由电子的运动方程可确定场源分布演化。
 - 由此可给出电极化强度，进而获得等效介电常量。
 - 将等效介电常量代入麦克斯韦方程即可确定场的行为。

21

电极化强度与极化率

- 方程对时间做傅里叶变换，得到

$$m_e(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2)\vec{x} = -e\vec{E}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = -e\vec{x} = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \vec{E}$$

相当于在方程中令 $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$
 $\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x}) e^{-i\omega t}$
 此 $\vec{x}(t)$ 即是时谐场作用下的受迫振动解
- 对所有电子求和即得电极化强度（设分子数密度为 N ）

$$\vec{P} = N\vec{p} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad \text{where } \chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}$$
- 不同电子可能处在不同束缚态中，电极化率的更有趣的写法是

$$\chi(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{N_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i\omega\gamma_j}$$

N_j, ω_j 以及 γ_j 分别为处于第 j 束束缚态的电子的数密度、固有频率和阻尼系数

22

相对介电常数和电导率

- 在洛伦兹模型中，相对介电常数由下式给出

$$\epsilon_r(\omega) \triangleq 1 + \chi(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}$$
- 由于在我们的描述下 $\vec{j}_f = 0$ ，且假设 $\vec{M} = 0$ ，因而

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -i\omega \vec{P} = -i\omega \epsilon_0 \chi \vec{E}$$
 - 可见， \vec{j} 和 \vec{E} 之间满足线性关系（其中 σ 为电导率）：

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \text{where } \sigma(\omega) = -i\omega \epsilon_0 \chi(\omega)$$
 - 由此，相对介电常量可用电导率 σ 表示为

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega}$$

23

2. 麦克斯韦方程

在洛伦兹模型中，由于 $\rho_f = 0 = \vec{j}_f$ ，因而均匀介质中时谐电磁场满足的独立方程有

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = +i\omega \vec{B} & \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega \vec{D} & \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \end{cases}$$

方程解耦，可知电场满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon}$$

定义复折射率

$$n = \sqrt{\epsilon_r} = n_0 + i n_1 \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\beta}{c} n_0 + i \frac{\alpha}{c} n_1$$

24

折射率实部和虚部的物理含义

● 复折射率 $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 的实部 n_0 和虚部 n_1 满足方程

$$\begin{cases} n_0^2 - n_1^2 = \text{Re } \epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ 2n_0 n_1 = \text{Im } \epsilon_r = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \end{cases}$$

➢ n_0 和 n_1 均与 ω 有关。

● 考察亥姆霍兹方程的平面波解

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad k = \beta + i\alpha = \frac{\omega}{c} (n_0 + in_1)$$

➢ $n_0(\omega)$ 引起色散, $n_1(\omega)$ 导致吸收。

3. 绝缘介质

对绝缘介质, 所有电子都束缚于原子, 取 $\omega_0^2 > 0$; 且实际情形为小阻尼 $\gamma \ll \omega_0$ 。

$$\begin{cases} \chi = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ n_0^2 - n_1^2 = 1 + \text{Re } \chi, \quad 2n_0 n_1 = \text{Im } \chi \end{cases}$$

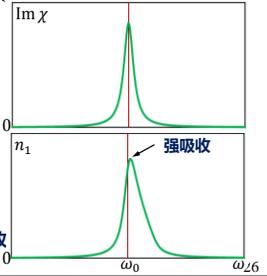
● $\omega \rightarrow 0$ 时, 回到熟悉的电介质的静电行为:

$$\begin{cases} \epsilon_r = 1 + \chi \rightarrow 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} \\ \sigma = -i\omega \epsilon_0 \chi \rightarrow 0 \end{cases}$$

● ω_0 称为共振频率。

➢ $\chi(\omega_0)$ 很大、且为虚数。

➢ 共振频率附近电磁波被强烈吸收



● 远离共振频率时, $\epsilon_r(\omega)$ 几乎是实的, 且随 ω 缓慢变化。

$$\begin{cases} \chi = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ n_0^2 - n_1^2 = 1 + \text{Re } \chi, \quad 2n_0 n_1 = \text{Im } \chi \end{cases}$$

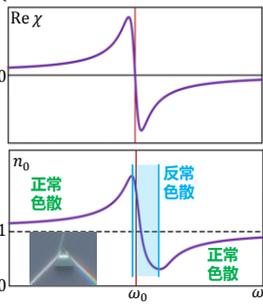
➢ $\epsilon_r(\omega)$ 的实部随 ω 递增。

➢ 折射率的实部随频率递增, 称之为**正常色散**。

● 共振频率附近, $\epsilon_r(\omega)$ 随 ω 快速变化。

➢ $\epsilon_r(\omega)$ 的实部随 ω 递减。

➢ 折射率的实部随频率递减, 称之为**反常色散**。



4. 等离子体或导电介质

为了使模型适用于等离子体或导电介质, 令 $\omega_0 = 0$ 。

● 介电常数和电导率分别为

$$\begin{cases} \epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Ne^2/m_e}{\omega^2 + i\omega\gamma} \\ \sigma(\omega) = i\omega \frac{Ne^2/m_e}{\omega^2 + i\omega\gamma} \end{cases}$$

➢ 对于等离子体, N 表示电子数密度。

➢ 对于导电介质, N 表示没有束缚于原子的电子数密度。

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad \sigma(\omega) = -i\omega \epsilon_0 \chi(\omega)$$

低频极限

当 $\omega \ll \gamma$ 时, 相比于 $i\omega\gamma$, ω^2 项可忽略。因而

$$\begin{cases} \epsilon_r(\omega) \approx 1 + i \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega \gamma} = 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \\ \sigma(\omega) \approx \frac{Ne^2}{m_e \gamma} \end{cases}$$

● σ 是实的且不依赖于 ω 。

➢ 如果所研究的现象只涉及低频行为, 那么就得到

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \sigma \vec{E}(t, \vec{x}), \quad \text{where } \sigma = \sigma(0)$$

这正是**欧姆定律**。此情形下的模型与德鲁德模型相对应。

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Ne^2/m_e}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad \sigma(\omega) = -i\omega \epsilon_0 \chi(\omega)$$

● 若进一步假设频率足够低, 以至于 $\epsilon_0 \omega \ll \sigma$ 时, 则

$$\epsilon_r(\omega) \approx i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \Rightarrow n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} \approx \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}}$$

➢ 对于频率为 ω 、波矢量为 $\vec{k} = k\hat{z}$ 的平面波, 波数为

$$k = \frac{\omega n}{c} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \sigma}{2c^2 \epsilon_0}} = (1+i) \sqrt{\frac{\mu_0 \omega \sigma}{2}}$$

➢ 因此, 对于这样的平面波解, 电磁场量 $\psi (= \vec{A}, \vec{E} \text{ 或 } \vec{B} \text{ 的分量})$ 的振幅随着深度指数衰减, **穿透深度**为

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}}$$

高频极限

当 $\omega \gg \gamma$ 时, 可忽略 γ 项, 因而 $\epsilon_r \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, $\sigma \approx i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

其中, ω_p 称为**等离子体频率** $\omega_p^2 \triangleq \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}$

• $\sigma(\omega)$ 是纯虚数意味着电流和电场有 $\pi/2$ 的相位差

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \sim i\vec{E} \Rightarrow \langle p \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \cdot \vec{j}^*) = 0 \text{ 无能量耗散}$$

• 当 $\omega \gg \gamma$ 且 $\omega > \omega_p$ 时, $\epsilon_r(\omega) > 0$, 因而 $n(\omega)$ 是实的。

> 平面波可无衰减地在等离子体或导电介质中传播。

> 由于 $n(\omega) < 1$, 故相速度 $v_p > c$; 与群速度满足 $v_p v_g = c^2$ 。

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Ne^2/m_e}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad \sigma(\omega) = -i\omega\epsilon_0\chi(\omega)$$

31

• 当 $\omega \gg \gamma$ 且 $\omega < \omega_p$ 时, $\epsilon_r(\omega) < 0$, $n(\omega)$ 是纯虚的。

> 频率为 ω 的平面波解在等离子体中纯指数衰减

频率低于 ω_p 的波不能在等离子体中传播。

> 若等离子体有一个平面边界, 则平面电磁波由真空入射到边界上, 穿透等离子体中的有效深度为 $c/\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ 。



32

§6 介质对电磁波的散射

33

一、散射截面

当电磁波入射到样品上时, 若样品产生的场不能由平面界面反射和折射的非涅耳理论描述, 则称电磁波在样品上发生了**散射**。

• 此类问题中, 入射波波长与样品边界曲率半径相比并非小量。

• 与散射相关的物理和导出非涅耳方程的物理是相同的。

> 微观: 入射电磁波 \Rightarrow 介质中带电粒子运动 \Rightarrow 产生推迟场
介质中所有粒子产生的场的总和称为“散射场”。

> 宏观: 介质中带电粒子运动 \Rightarrow 电流 (散射场的源)

实际电流密度应保证总场满足介质表面的边值关系。

• 在透明介质中, 电子吸收入射电磁波的能量, 向各个方向发出次波, 也称为散射。例如地球大气对阳光的散射。

34

微分散射截面

微分散射截面定义为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \triangleq \frac{r^2 \hat{r} \cdot \langle \vec{S}' \rangle}{|\langle \vec{S} \rangle|}$$

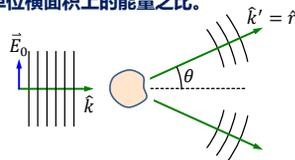
其中 \vec{S} 和 \vec{S}' 分别是入射平面波与散射波的能流密度。

• 物理含义: 单位时间内在给定方向 \hat{r} 的单位立体角出射的能量与单位时间入射到单位横面积上的能量之比。

• 定义入射波强度

$$I = |\langle \vec{S} \rangle|$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\langle P \rangle / d\Omega}{I}$$



35

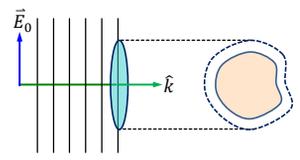
总散射截面

微分散射截面对立体角积分, 就给出了**总散射截面**

$$\sigma = \iint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

• 物理含义: 单位时间入射到横截面积 σ 上的能量, 等于单位时间所出射的能量。

• 总截面反应的是物体或带电粒子电磁相互作用的有效尺度。



36

电子对电磁波的散射和吸收

- 外来电磁波（入射波、原波）投射到电子（自由电子或束缚的谐振电子）上时，电子会在电磁波的作用下做强迫振动，从而不断地辐射电磁波（次波）。
 - 由于次波是向各个方向发射的，其能量又来源于原来的波。故总的结果可以归结为：入射波被电子散射到各个方向去。
 - 这个过程称为电子对电磁波的散射。
 - 问题：散射强度随角度的分布以及它对频率的依赖关系。
- 在谐振电子情况下，当入射波频率与电子的固有频率相等时
 - 电子由于共振而强烈地吸收入射波，若非次波的能量损耗（或其他能量损耗）的限制作用，振子的振幅将趋于无穷。
 - 因此这个过程被称为振子对电磁波的吸收和再发射。
- 散射和吸收都属于外来电磁波与电子相互作用的过程。

37

二、自由电子对电磁波的散射

下面考察非相对论自由电子（ $v \ll c$ ）对电磁波的散射。

- 设入射波是线偏振的单色平面波：

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ c\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E} \end{cases} \Rightarrow I = \langle S \rangle = \varepsilon_0 c^2 \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

- 忽略磁场对电子的作用

$$\text{电磁波作用在电子上的电力} \gg \text{磁力} : \frac{F_m}{F_e} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

- 视电磁波的电场为均匀场

$$\text{电子运动尺度} \ll \text{波长} : l \sim vT \ll cT = \lambda$$

- 电子的辐射功率可采用电偶极辐射公式或拉莫公式计算。

38

自由电子的运动方程

电子的运动方程可近似写为

$$m_e \ddot{\vec{x}} = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e_s^2}{3c^3} \ddot{\vec{a}} \quad \text{辐射阻尼力 } \vec{F}_R$$

对于受迫振动解 $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ ，由于

$$\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x} \Rightarrow \vec{F}_R = -\frac{2e_s^2 \omega^2}{3c^3} \vec{x} = -\gamma m_e \dot{\vec{x}}$$

利用波长 $\lambda = 2\pi c/\omega$ 及电子经典半径 $r_e = e_s^2/m_e c^2$ ，阻尼系数

$$\gamma \triangleq \frac{2e_s^2 \omega^2}{3m_e c^3} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{\lambda} \cdot \omega$$

这样电子的运动方程也就写为了

$$m_e \ddot{\vec{x}} + \gamma m_e \dot{\vec{x}} = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

39

受迫振动解

将形如 $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ 的受迫振动解代入方程，即得

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma) m_e \vec{x}_0 = -e\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{x}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m_e \omega (\omega + i\gamma)}$$

在自由电子情况下，一直到X射线波段（ $10^{-8} \sim 10^{-13}$ m）都有

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{\lambda} \ll 1$$

因而，分母中的 $i\gamma$ 项（即辐射阻尼效应）常可忽略。因此

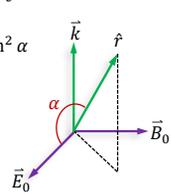
$$\vec{x} = \frac{e\vec{E}_0}{m_e \omega^2} e^{-i\omega t} \Rightarrow \ddot{\vec{x}} = -e\vec{x} = \frac{e^2 \vec{E}_0}{m_e} e^{-i\omega t}$$

40

辐射功率

在非相对论情形，振荡电子的辐射主要来自电偶极辐射。

设 α 为辐射方向与 \vec{E}_0 的夹角，则平均辐射功率为

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2 \alpha = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c^3} \sin^2 \alpha \\ &= \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \right) \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} &= I r_e^2 \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow \langle P \rangle &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{8\pi}{3} I r_e^2 \end{aligned}$$


41

自由电子的散射截面

利用辐射功率表达式，我们就得到了微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \triangleq \frac{d\langle P \rangle / d\Omega}{I} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \alpha$$

而总散射截面则为

$$\sigma \triangleq \frac{\langle P \rangle}{I} \Rightarrow \sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

这就是非相对论自由电子散射的汤姆逊公式。

电子经典半径是电子电磁相互作用的有效尺度。

42

对自然光的散射

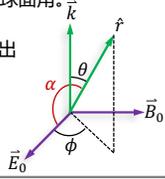
- 通常，入射波（如自然光）是非偏振的，即 \vec{E}_0 在垂直于 \vec{k} 的平面内无规取向，因而 ϕ 在 $[0, 2\pi]$ 范围内等概率取值。

θ 和 ϕ 是以入射波传播方向作为极轴的球面角。

- 对自然光，计算时应应对 ϕ 取平均。由此给出

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

θ 称为散射角。



$$\cos \alpha = \hat{r} \cdot \vec{E}_0 = \sin \theta \cos \phi \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi$$

$$\Rightarrow \langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\phi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

43

汤姆逊散射的特点

- 散射波频率与入射波相同。
- 散射波强度（或散射截面）与入射频率无关。
- 散射波强度（或散射截面）角分布前后对称。
 - 平行方向 ($\theta = 0, \pi$) 最强，垂直方向 ($\theta = \pi/2$) 最弱。
- 对硬 X 射线或 γ 射线，汤姆逊散射 \Rightarrow 康普顿散射（量子）
 - 散射波频率或波长与方向有关
 - $\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad \lambda_c \triangleq \frac{h}{m_e c} \approx 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$
 - 散射波强度失去前后对称性（后方强度变弱）
 - 当 $\hbar\omega \ll m_e c^2$ 、即 $\lambda \gg \lambda_c$ 时，经典理论适用。



44

三、束缚电子对电磁波的散射

基本假定

- 中性气体，只考虑原子或分子内束缚电子的运动。
- 电子受到原子或分子内部的约束力用简谐力模拟。
- 不同电子的空间位置和周期运动的初始相位随机分布，可在处理单个电子运动的基础上，将它们发出的散射波的功率进行简单叠加。
- 设入射波是线偏振的单色平面波。
- 非相对论近似
 - 电磁波作用在电子上的电力 \gg 磁力，磁场的作用可忽略。
 - 电子运动长度 \ll 波长，可视电磁波的电场为均匀场。
 - 电子的辐射功率可采用电偶极辐射公式计算。

45

束缚电子的运动方程及受迫振动解

- 电子的运动方程为 (ω_0 为振子的固有频率，或称本征频率)

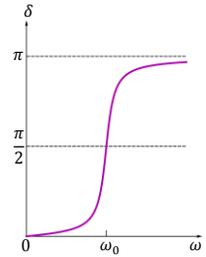
$$m_e \ddot{x} + \gamma m_e \dot{x} + m_e \omega_0^2 x = -e \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

- 受迫振动解为

$$\begin{aligned} \vec{x} &= -\frac{e}{m_e} \frac{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \\ &= \frac{e}{m_e} \frac{\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \delta)}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \end{aligned}$$

其中 δ 称为**散射相移**

$$\tan \delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



46

束缚电子的散射截面

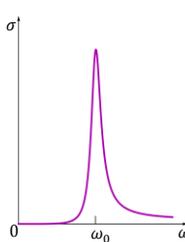
$$\ddot{\vec{p}} = -\frac{e^2 \vec{E}_0}{m_e} \frac{\omega^2 e^{-i(\omega t - \delta)}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \quad \begin{cases} \ddot{\vec{p}} = -e \ddot{x} \\ \frac{d(P)}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d(P)}{d\Omega} = I r_e^2 \sin^2 \alpha \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{8\pi I r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

汤姆逊散射截面 σ_T



47

束缚电子散射的特点

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

- 散射波频率与入射波频率一致，**散射截面与入射频率有关**。
- 高频散射： $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \sigma \approx \sigma_T$ **汤姆逊散射截面**
- 低频散射： $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \sigma \approx \sigma_T (\omega/\omega_0)^4$ **瑞利散射截面**
 - 天空呈蔚蓝色：地球大气对蓝光散射强
 - 夕阳呈橙红色：地球大气对红光吸收弱
- 共振散射： $\omega \sim \omega_0 \Rightarrow \sigma = \sigma_T (\omega_0/\gamma)^2 = \sigma_T / (\omega_0 \tau)^2 \gg \sigma_T$
 - 一般 $\omega_0 \tau \ll 1$ ，散射极强，称为**共振散射（最终导致吸收）**。
 - 此时辐射阻尼（或其它阻尼）起着关键作用，不能忽略。



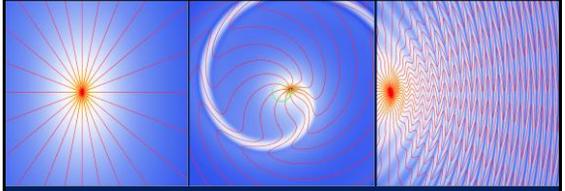
48

四、经典电动力学的适用范围

- 经典电动力学中的典型困难举例
 - 发散困难、自加速和预加速困难
 - 原子模型与辐射矛盾
 - 康普顿散射光频率变化、光电效应、黑体辐射
- 经典电动力学的适用范围
 - 光的粒子性与带电粒子的波动性均不显著的电磁过程
 - 光子能量远小于带电粒子的能量，带电粒子的德布罗意波长远小于粒子运动的尺度

$$\hbar\omega \ll mc^2, \quad \lambda = \frac{h}{p} \ll l$$

49



《电动力学》课程结束

谢谢同学们支持

祝诸君好运

50