

第九章 电磁波的传播

§ 1 介质中的电磁波

§ 2 电磁波在绝缘介质表面的反射与折射

§ 3 导体对电磁波的影响

§ 4 谐振腔与波导管

§ 5 介质对电磁波的散射和吸收

§ 6 介电常数的洛伦兹模型

1

§ 1 介质中的电磁波

2

一、对介质的考虑

当 $\rho_f = 0 = \vec{j}_f$ 时，绝缘介质中的麦克斯韦方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad \xrightarrow{\vec{D} = \epsilon \vec{E}} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} \quad \xrightarrow[\vec{B} = \mu \vec{H}]{\vec{D} = \epsilon \vec{E}} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \partial_t \vec{E} \end{array} \right.$$

将自由空间中的结论做替换 $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ 和 $\mu_0 \rightarrow \mu$ ，即可得介质中电磁波的相应结论？

● 即便是均匀、静止的介质也不行！

➢ 本构关系 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 和 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 一般不成立！

3

介质的色散性质

一般的介质都具有**色散**性质：介质对电磁场的响应性质与电磁场的变化频率有关，即

$$\vec{D}(\omega, \vec{x}) = \varepsilon(\omega, \vec{x})\vec{E}(\omega, \vec{x}), \quad \vec{B}(\omega, \vec{x}) = \mu(\omega, \vec{x})\vec{H}(\omega, \vec{x})$$

- 一般的电磁场可表示为各种频率的电磁场的叠加，因而

$$\vec{D}(t, \vec{x}) \neq \varepsilon\vec{E}(t, \vec{x}), \quad \vec{B}(t, \vec{x}) \neq \mu\vec{H}(t, \vec{x})$$

- **通常介质中的一般电磁场，不满足波动方程。**
- 由于惯性，介质中的微观粒子（如电子）来不及响应外场。

4

二、定态波动方程

时谐场的麦克斯韦方程组

若电磁场以确定频率随时间作简谐振动，则称其为**时谐场**或**定态**，即是傅里叶变换的一个基态：

$$\begin{cases} \vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}, & \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t} \\ \vec{D}(t, \vec{x}) = \vec{D}(\vec{x})e^{-i\omega t}, & \vec{H}(t, \vec{x}) = \vec{H}(\vec{x})e^{-i\omega t} \end{cases}$$

代入麦克斯韦方程组，得到：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = +i\omega\vec{B}, & \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\vec{D}, & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

- **无散条件方程不独立。可根据方便选择是否将其列出。**
- **在非均匀介质中（如介质界面处），这些方程仍然成立。**

5

时谐场的麦克斯韦方程组

若电磁场以确定频率随时间作简谐振动，则称其为**时谐场**或**定态**，即是傅里叶变换的一个基态：

$$\begin{cases} \vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}, & \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t} \\ \vec{D}(t, \vec{x}) = \vec{D}(\vec{x})e^{-i\omega t}, & \vec{H}(t, \vec{x}) = \vec{H}(\vec{x})e^{-i\omega t} \end{cases}$$

代入麦克斯韦方程组，得到：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = +i\omega\vec{B}, & \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\vec{D}, & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

- **无散条件方程不独立。可根据方便选择是否将其列出。**
- **在非均匀介质中（如介质界面处），这些方程仍然成立。**

6

- 在介质界面处，场方程写为了边值关系。若介质界面处无自由电荷、传导电流分布，则独立的边值关系有两个：

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \quad \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

- 利用本构关系

$$\vec{D}(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}), \quad \vec{B}(\vec{x}) = \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x})$$

时谐场满足的基本方程写为了

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = +i\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} \end{cases} \xrightarrow[k \triangleq \omega\sqrt{\mu\varepsilon}]{\text{均匀介质}} \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

定态波动方程

➤ 出于数学上的方便，选择 $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ 而非 $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ 作为场量。

7

亥姆霍兹方程

- 定态波动方程又称为**亥姆霍兹方程**。
- 定态情形下，**均匀介质**中的电磁场方程可以写为

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{E} = +\frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla \times \vec{H} \end{cases}$$

➤ 其中 $k \triangleq \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。

➤ 此处的 \vec{E}, \vec{H} 是电磁场的振幅，时间变化部分未包含在内。

8

三、单色平面波解

作为随时空变化的函数，可对电磁场作时空联合的傅里叶变换：

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

任意的时空函数，可以写为下列基函数之叠加：

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

这样的基函数称为**单色平面波**。

9

单色平面波

单色平面波的一般形式为：

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

- \vec{k} 称为**波矢**，代表波传播方向，波长 $\lambda = 2\pi/k$ 。
 > 垂直于 \vec{k} 的平面上各点场值相同 \Rightarrow 平面波
- \vec{E}_0 称为**振幅**（通常为复矢量）。
- 沿着传播方向上相位传播的速度称为**相速度**：

$$\vec{v}_p = \frac{\omega}{k} \hat{k}$$

- 对于单色平面波，微分算符转化为代数算符：

$$\partial_t \leftrightarrow -i\omega, \quad \nabla \leftrightarrow i\vec{k}$$

10

场方程对单色平面波解的限制

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 & \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 & \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{H} = -\frac{i}{\omega \mu} \nabla \times \vec{E} & \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\omega \mu} \vec{k} \times \vec{E} \end{cases}$$

定义介质的**折射率**：

$$n \triangleq c \sqrt{\mu \epsilon} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{c} n, \quad v_p = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

注：对弱磁性介质， $\mu_r \approx 1$ ：

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

定义介质的**固有阻抗**：

$$Z \triangleq \sqrt{\mu/\epsilon} = \mu c/n$$

$$\Rightarrow Z \vec{H} = \hat{k} \times \vec{E}$$

注：真空的固有阻抗为

$$Z_0 \triangleq \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega$$

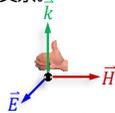
11

单色平面波的基本特征

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad Z \vec{H} = \hat{k} \times \vec{E}, \quad (\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c} n)$$

- 单色平面电磁波为TEM： \vec{E} 、 \vec{H} 、 \vec{k} 构成右手正交系。
- \vec{E} 和 \vec{H} 同相位，且

$$|\vec{E}| = Z |\vec{H}|, \quad |\vec{E}|/|\vec{B}| = \omega/k = v_p$$



- 单色平面电磁波是均匀、无限大介质中麦克斯韦方程组的解。
 > 实际要求：均匀空间区域的限度 \gg 波长，边界无反射。
- 单色平面电磁波有两个独立偏振态。
 > 特定的单色平面波有一个独立变化的矢量 \vec{E}_0 ，但 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ 。

12

单色平面波的力学性质

- 单色平面波的能量密度

$$w = \frac{1}{2}\epsilon|\text{Re } \vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\text{Re } \vec{H}|^2 = \epsilon|\text{Re } \vec{E}|^2 = \mu|\text{Re } \vec{H}|^2$$

电场、磁场能量密度相同。

- 单色平面波的能流密度

$$\vec{S} = \text{Re } \vec{E} \times \text{Re } \vec{H} = \frac{1}{Z}|\text{Re } \vec{E}|^2 \hat{k} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}|\text{Re } \vec{E}|^2 \hat{k} = w v_p \hat{k}$$

能流密度 = 能量密度 × 速度

- 能量密度和能流密度对时间的平均值：

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2}\epsilon\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0, \quad \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2Z}|\vec{E}_0|^2 \hat{k} = \langle w \rangle v_p \hat{k}$$

13

思考

场方程要求绝缘介质中的单色平面波满足：

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon, \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{H} = \frac{1}{\omega \mu} \vec{k} \times \vec{E}$$

- 这些条件并未限定限制 \vec{k} 为实矢量。

➢ 后面会看到：当电磁波在介质界面发生全反射时，折射波的 \vec{k} 必然为复矢量。

- 如果 \vec{k} 为复矢量，应该如何修改前面的结论？

14

§2 电磁波在介质表面的反射与折射

15

一、反射、折射问题

设两介质界面为无限大平面。

入射波 (介质1内) :

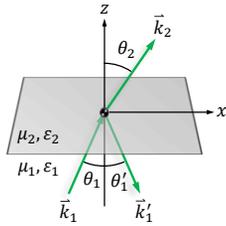
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

反射波 (介质1内) :

$$\vec{E}'_1 = \vec{E}'_{01} e^{i(\vec{k}'_1 \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

折射波 (介质2内) :

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega t)}$$



● 入射面：入射波矢与法向所张平面 (设为 xz 平面 $\Rightarrow k_{1y} = 0$)

● 用以确定反射波和折射波性质的方程只能是边值关系：

$$(\vec{E}_1 + \vec{E}'_1)_{x,y} = (\vec{E}_2)_{x,y}, \quad (\vec{H}_1 + \vec{H}'_1)_{x,y} = (\vec{H}_2)_{x,y}$$

16

二、边值关系对波矢的限制

电场的切向边值关系为

$$(\vec{E}_{01} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + \vec{E}'_{01} e^{i\vec{k}'_1 \cdot \vec{x}})_{x,y} = (\vec{E}_{02} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}})_{x,y}, \quad (z = 0)$$

亦即有

$$[\vec{E}_{01} e^{i(k_{1x}x + k_{1y}y)} + \vec{E}'_{01} e^{i(k'_{1x}x + k'_{1y}y)}]_{x,y} = [\vec{E}_{02} e^{i(k_{2x}x + k_{2y}y)}]_{x,y}$$

此式对任意 x, y 成立，因而

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}, \quad k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y}$$

● 由 $k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y}$ 以及 $k_{1y} = 0$ 知：

反射波矢、折射波矢与入射波矢共面 (入射平面)。

17

● 由 $k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$ 知：

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2$$

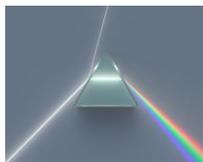
利用

$$k_1 = k'_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = \frac{\omega}{c} n_1, \quad k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = \frac{\omega}{c} n_2$$

由此就给出反射定律和折射定律：

$$\theta'_1 = \theta_1, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \triangleq n_{12}$$

其中 n_{12} 称为相对折射率。

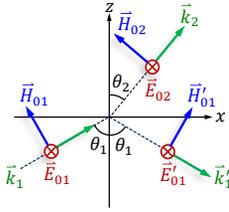


18

2. 垂直偏振

垂直偏振：电场矢量垂直入射面

【证明】边值关系：



若入射波是垂直偏振，
则反射、折射波也是垂直偏振

$$\begin{cases} E_{10x} + E'_{10x} = E_{20x} \\ H_{10y} + H'_{10y} = H_{20y} \end{cases}$$

利用 $\vec{E} = -\vec{k} \times \vec{H} / \omega \epsilon$ ，得到：

$$\begin{cases} \frac{k'_{1z}}{\omega \epsilon_1} H'_{10y} = \frac{k_{2z}}{\omega \epsilon_2} H_{20y} \\ H'_{10y} = H_{20y} \end{cases}$$

由于 $k'_{1z} < 0$ 而 $k_{2z} > 0$ ，故：

$$H'_{10y} = H_{20y} = 0$$

22

垂直偏振入射时的振幅关系

垂直偏振情形下，振幅关系由另外两个边值关系给出：

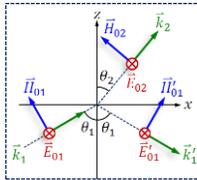
$$E_{10y} + E'_{10y} = E_{20y}, \quad H_{10x} + H'_{10x} = H_{20x}$$

利用 $E_{0y} = E_0$ 、 $H_{0x} = \pm H_0 \cos \theta$ 和 $H_0 = E_0 / Z$ ，将其写为：

$$E_{10} + E'_{10} = E_{20}, \quad Z_2(E_{10} - E'_{10}) \cos \theta_1 = Z_1 E_{20} \cos \theta_2$$

由此不难解得：

$$\begin{cases} r_{\perp} \triangleq \left(\frac{E'_{10}}{E_{10}} \right)_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \\ t_{\perp} \triangleq \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)_{\perp} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \end{cases}$$



23

3. 菲涅耳 (Fresnel) 公式

$$\begin{cases} r_{\parallel} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}, & t_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \\ r_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}, & t_{\perp} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \end{cases}$$

● 若入射单色平面波是一般的椭圆偏振波，则

$$\vec{E}_{10} = r_{\parallel}(\vec{E}_{10})_{\parallel} + r_{\perp}(\vec{E}_{10})_{\perp}, \quad \vec{E}_{20} = t_{\parallel}(\vec{E}_{10})_{\parallel} + t_{\perp}(\vec{E}_{10})_{\perp}$$

● 对弱磁性介质 ($\mu_r \approx 1$)，有

$$\begin{cases} r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}, & t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, & t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{cases}$$

24

四、介质界面处的能量输运

反射系数 R (透射系数 T) 定义为反射波 (折射波) 与入射波的平均能流密度的法向分量之比, 即

$$R \triangleq \frac{|\hat{n} \cdot \langle \vec{S}'_1 \rangle|}{|\hat{n} \cdot \langle \vec{S}_1 \rangle|}, \quad T \triangleq \frac{|\hat{n} \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle|}{|\hat{n} \cdot \langle \vec{S}_1 \rangle|}$$

由于入射、反射、折射波的平均能流密度可分别表示为:

$$\langle \vec{S}_1 \rangle = \frac{1}{2Z_1} |\vec{E}_{01}|^2 \hat{k}_1, \quad \langle \vec{S}'_1 \rangle = \frac{1}{2Z_1} |\vec{E}'_{01}|^2 \hat{k}'_1, \quad \langle \vec{S}_2 \rangle = \frac{1}{2Z_2} |\vec{E}_{02}|^2 \hat{k}_2$$

因而

$$R = \frac{|\vec{E}'_{01}|^2}{|\vec{E}_{01}|^2}, \quad T = \frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1} \frac{|\vec{E}_{02}|^2}{|\vec{E}_{01}|^2}$$

注: 如果折射波矢是复矢量, 此处所得 T 的表达式不再正确。

25

平行偏振和垂直偏振时的反射、透射系数

由菲涅耳公式, 平行偏振和垂直偏振时的反射、透射系数为

$$\begin{cases} R_{\parallel} = \left(\frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \right)^2, & T_{\parallel} = \frac{4Z_1 Z_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)^2} \\ R_{\perp} = \left(\frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \right)^2, & T_{\perp} = \frac{4Z_1 Z_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2)^2} \end{cases}$$

由此不难看出

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1, \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1$$

● 一般情形下也有 $R + T = 1$ 。实际上这是能量守恒的必然结果:

$$-\partial_t w = \nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j}_f \Rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}'_1) = \hat{n} \cdot \vec{S}_2$$

此方面的讨论可参考教材4.2.6节和习题4.5。

26

正入射时的反射、透射系数

对于弱磁性介质 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$), 正入射 ($\theta_1 = 0 = \theta_2$) 时:

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 = \left(\frac{n_2^{-1} - n_1^{-1}}{n_2^{-1} + n_1^{-1}} \right)^2 = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2$$

● 可见光由空气正入射到玻璃表面时

$$n_{21} \approx 1.5 \Rightarrow R \approx 4\%$$

● 电磁波由空气正入射到水面时

$$\text{低频电磁波: } n_{21} \approx 9 \Rightarrow R \approx 64\%$$

$$\text{可见光: } n_{21} \approx 1.33 \Rightarrow R \approx 2.0\%$$

27

五、偏振特性

简单起见，下面假设介质是弱磁性的，从而菲涅耳公式写为：

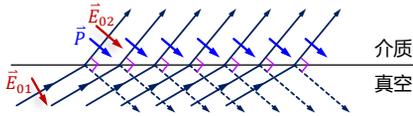
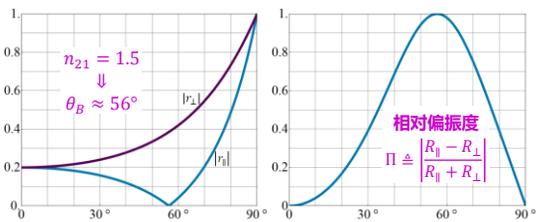
$$\begin{cases} r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}, & t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, & t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{cases}$$

- **半波损失**：当 $\theta_1 > \theta_2$ 时， $r_{\perp} < 0$ ，反射波与入射波相位相反，或相当于半个波长的光程差。
- 当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ 时，反射波无平行偏振分量，只有垂直偏振分量，相应的入射角（记为 θ_B ）称为**布儒斯特角**（线偏振器的原理）。结合折射定律，可得

$$\tan \theta_B = n_{21}$$

28

布儒斯特 (Brewster) 角

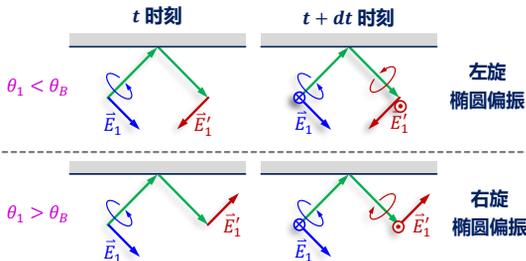


29

反射波的偏振

设入射波是RCP，并设 $n_{21} > 1$ ，从而 $\theta_1 > \theta_2$ 。此时有

$$r_{\perp} < 0, \quad r_{\parallel} > 0 \text{ (if } \theta_1 < \theta_B), \quad r_{\parallel} < 0 \text{ (if } \theta_1 > \theta_B)$$



30

六、全反射

当电磁波从一种折射率 (n_1) 较大的绝缘介质入射到另一种折射率 (n_2) 较小的绝缘介质上时, 可能会发生全反射。

事实上, 由于 $n_1 > n_2$, 因而

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \triangleq n_{12} > 1$$

● 若入射角等于**临界角** θ_c 时, 即 $\sin \theta_c = n_{21}$ 时, 折射角 $\theta_2 = \pi/2$ 。从而, 折射波将沿界面掠过, 此现象称为**全反射**。

➢ 若 $n_{21} = 1/1.5$, 则 $\theta_c \approx 42^\circ$ 。

● 若 $\theta_1 > \theta_c$, 则 $\sin \theta_2 > 1$!

➢ θ_2 将成为复数, 此情形仍属于全反射。

31

全反射时折射波的波矢

显然, 边值关系对波矢所提出的限制在全反射时仍然成立:

$$k_1 \sin \theta_1 = k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}, \quad 0 = k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y}$$

因而折射波波矢的法向分量为

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = k_2 \sqrt{1 - n_{12}^2 \sin^2 \theta_1} \triangleq k_2 \cos \theta_2$$

由于全反射时 $\sin \theta_1 > n_{21}$, 因而 θ_2 为复数, 满足

$$\cos \theta_2 = i \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta_1 - 1}, \quad \sin \theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} = n_{12} \sin \theta_1$$

折射波波矢可写为

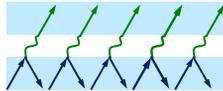
$$\vec{k}_2 = k_{2x} \hat{x} + k_{2z} \hat{z} = k_1 \sin \theta_1 \hat{x} + i \alpha \hat{z}, \quad \left(\alpha \triangleq k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{21}^2} \right)$$

32

全反射时的折射波

全反射情形下, 折射波的电场为:

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ &= \vec{E}_{02} e^{-\alpha z} e^{i(k_{2x} x - \omega t)} \end{aligned}$$



● 等相位面不再是等振幅面。

● 全反射时, 折射波沿着界面法向衰减, 穿透深度为

$$\delta \triangleq \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{21}^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{21}^2}}$$

● 全反射时, 折射波沿着界面切向传播, 相速度为

$$\frac{c}{n_1} < v_p = \frac{\omega}{k_{2x}} = \frac{\omega}{k_1 \sin \theta_1} = \frac{c}{n_1 \sin \theta_1} < \frac{c}{n_2}$$

33

- 全反射时，折射波的无散条件写为

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{E}_2 = k_{2x}E_{2x} + i\alpha E_{2z} = 0$$

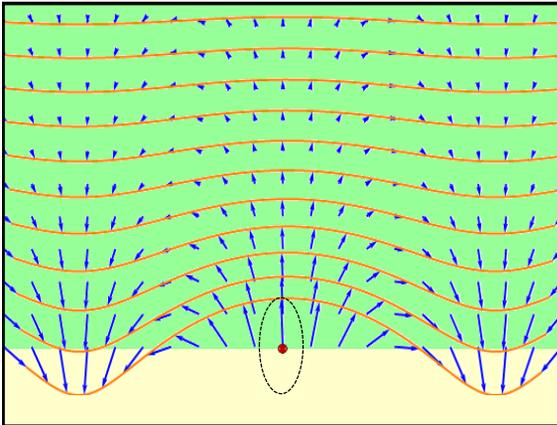
- 由于 \vec{k}_2 是复矢量，故**全反射下折射波的电场通常并不与传播方向垂直**——除非 \vec{E}_2 只有 y 方向分量（垂直偏振）。
- E_{2x} 与 E_{2z} 的比值为虚数意味着电场箭头画出的轨道一般为椭圆，这是椭圆偏振的纵波版本。

- 全反射时，折射波的H矢量为

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{k}_2 \times \vec{E}_2}{\omega\mu_2}$$

- \vec{H}_2 通常也不再与传播方向垂直。
- 由于 \vec{k}_2 是复矢量， \vec{E}_2 与 \vec{H}_2 并不同相。

34



全反射时的反射系数

前面所得菲涅耳公式在全反射情形下仍适用（？），只是其中的 $\cos \theta_2$ 现在变为了虚数。记 $\cos \theta_2 = ia$ 和 $Z_{12} = Z_1/Z_2$ ，则

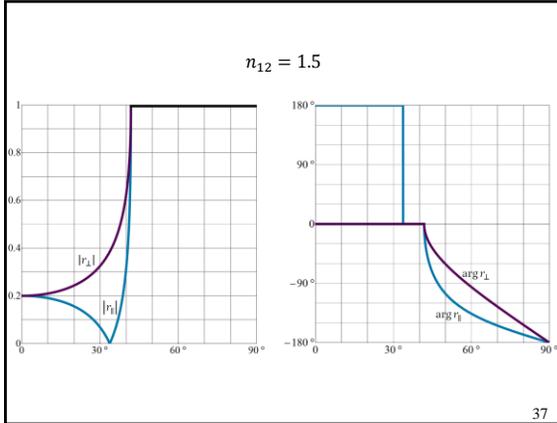
$$\begin{cases} r_{\parallel} = \frac{Z_{12} \cos \theta_1 - ia}{Z_{12} \cos \theta_1 + ia}, & t_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_1}{Z_{12} \cos \theta_1 + ia} \\ r_{\perp} = \frac{Z_{21} \cos \theta_1 - ia}{Z_{21} \cos \theta_1 + ia}, & t_{\perp} = \frac{2Z_{21} \cos \theta_1}{Z_{21} \cos \theta_1 + ia} \end{cases}$$

因而

$$R \triangleq \frac{|\hat{n} \cdot \langle \vec{S}'_1 \rangle|}{|\hat{n} \cdot \langle \vec{S}_1 \rangle|} = \frac{|\vec{E}'_{01}|^2}{|\vec{E}_{01}|^2} \Rightarrow R_{\parallel} = R_{\perp} = 1$$

这正是将此现象称为“全反射”的原因。

36



全反射时的透射系数

全反射情形下，折射波的平均能流密度为

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_2 \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_2^* \times \vec{H}_2) = \frac{1}{2\omega\mu_2} \text{Re}[\vec{E}_2^* \times (\vec{k}_2 \times \vec{E}_2)] \\ &= \frac{1}{2\omega\mu_2} \text{Re} \left[|\vec{E}_2|^2 \vec{k}_2 - (\vec{k}_2 \cdot \vec{E}_2^*) \vec{E}_2 \right] \end{aligned}$$

将无散条件的方程取复共轭，得到

$$\begin{aligned} (\vec{k}_2 \cdot \vec{E}_2)^* &= k_{2x} E_{2x}^* - i\alpha E_{2z}^* = 0 \\ \Rightarrow \vec{k}_2 \cdot \vec{E}_2^* &= k_{2x} E_{2x}^* + i\alpha E_{2z}^* = 2i\alpha E_{2z}^* \\ \Rightarrow \langle \vec{S}_2 \rangle &= \frac{1}{2\omega\mu_2} \text{Re} \left[|\vec{E}_2|^2 \vec{k}_2 - 2i\alpha E_{2z}^* \vec{E}_2 \right] \end{aligned}$$

38

由于 $k_{2z} = i\alpha$ ，因此，折射波的平均能流密度的法向分量为

$$\hat{z} \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle = \frac{1}{2\omega\mu_2} \text{Re} \left[i\alpha \left(|\vec{E}_2|^2 - 2|E_{2z}|^2 \right) \right] = 0$$

所以，**全反射时，透射系数 $T = 0$ 。**

- 此结论自然也可由 $T = 1 - R = 0$ 给出。
- **全反射现象表明，在绝缘介质和真空中也可能存在衰减的平面波，尽管它们并无能量损耗。**
- 写出 \vec{S}_2 的瞬时值表达式可以发现：全反射时能流的法向分量，在一个周期内有一半时间为正，一半时间为负，这表明能量通过边界流进第二种介质，再回流回来，平均而言并没有能量透过边界。

39
