CH8. 点电荷的辐射

1

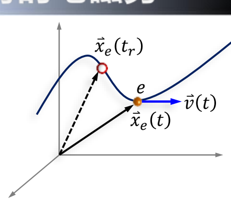
§ 1 运动点电荷的势与场

2

一、运动点电荷的电磁势

按照经典力学原理，若质点受到了外力的作用，则其将沿某个确定的轨道作加速运动。现在把某带电粒子 e 看成质点，设其沿某特定轨道运动，位矢与速度分别为

$$\vec{x}_e = \vec{x}_e(t), \quad \vec{v}(t) = d\vec{x}_e(t)/dt$$



运动电荷将在周围空间激发电磁场。

- 由于电磁相互作用传播速度的有限性，位于场点 $\vec{x}$ 处的观测者在时刻 t 测量的电磁势应是带电粒子在较早时刻激发的。
- 本节的目的是**计算以任意给定方式运动的带电粒子在任一时空点所激发的电磁势和电磁场**。

3

运动点电荷的电荷密度与电流体密度为

$$\rho(t,\vec{x}) = e\delta^3\big(\vec{x}-\vec{x}_e(t)\big),\quad \vec{J}(t,\vec{x}) = e\vec{v}(t)\delta^3\big(\vec{x}-\vec{x}_e(t)\big)$$

将其代入推迟势的表达式，即可给出Lorenz规范下，该点电荷所激发的电磁势：

$$\begin{cases} \varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int d^3x'\,\dfrac{\rho(t-\mathbb{R}/c\,,\vec{x}')}{\mathbb{R}} \\ \vec{A}(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int d^3x'\,\dfrac{\vec{J}(t-\mathbb{R}/c\,,\vec{x}')}{\mathbb{R}} \end{cases}$$

其中

$$t_r \triangleq t - \frac{\mathbb{R}}{c} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} = t_r(t,|\vec{x}-\vec{x}'|)$$

4

标量势

为简化推导，将标量势表达式重新写为：

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\int_{-\infty}^{+\infty} ds\,\frac{\rho(s,\vec{x}')}{\mathbb{R}}\,\delta\left(s-t+\frac{\mathbb{R}}{c}\right)$$

其中

$$\vec{\mathbb{R}} = \vec{x}-\vec{x}_e(s) = \vec{\mathbb{R}}(s,\vec{x})$$

将 $\rho(s,\vec{x}') = e\delta^3\big(\vec{x}'-\vec{x}_e(s)\big)$ 代入并对 $\vec{x}'$ 积分，得到

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int ds\,\frac{1}{\mathbb{R}}\,\delta\left(s-t+\frac{\mathbb{R}}{c}\right)$$

5

- 由于

$$J \triangleq \frac{\partial}{\partial s}\left(s-t+\frac{\mathbb{R}}{c}\right) = 1+\frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{\vec{\mathbb{R}}\cdot\vec{\mathbb{R}}}}{\partial s} = 1+\frac{1}{c}\frac{\vec{\mathbb{R}}}{\sqrt{\vec{\mathbb{R}}\cdot\vec{\mathbb{R}}}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbb{R}}}{\partial s}$$

因此

$$J = 1-\frac{1}{c}\hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{v}(s) = 1-\hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{\beta}(s) > 0$$

即 δ 函数的宗量随着其自变量 s 单调增加，因而宗量（至多）只有一个零点。该零点（设为 $s=t^*$）由下式所定义：

$$t^* = t-\frac{\mathbb{R}^*}{c} = t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}_e(t^*)|}{c}$$

【注】可能无零点，此情形下时空点$(t,\vec{x})$ 的标量势为零。

6

- 这样，利用 δ 函数的性质就给出

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int ds\, \frac{1}{J\mathbb{R}}\delta(s-t^*) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 J^*\mathbb{R}^*}$$

从而

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mathbb{R}^* - \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*}$$

这里，带“$*$”诸量均是在推迟时刻 t^* 的数值。

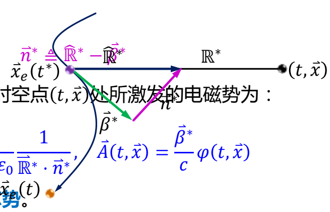
- 类似可给出点电荷的矢量势

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0 e\vec{v}^*}{4\pi}\frac{1}{\mathbb{R}^* - \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*} = \frac{\vec{v}^*}{c^2}\varphi(t,\vec{x})$$

7

1. 李纳-维谢尔势

若定义：



则运动带电粒子在任一时空点$(t,\vec{x})$处所激发的电磁势为：

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*},\quad \vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\vec{\beta}^*}{c}\varphi(t,\vec{x})$$

此结果称为**李纳-维谢尔势**。

- **带“$*$”诸量均是在推迟时刻 t^* 的数值，而 t^* 的定义则为：**

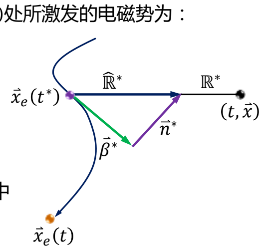
$$t^* \triangleq t - \frac{\mathbb{R}^*}{c} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_e^*|}{c},\quad \text{where } \vec{x}_e^* \triangleq \vec{x}_e(t^*)$$

8

1. 李纳-维谢尔势

运动带电粒子在任一时空点$(t,\vec{x})$处所激发的电磁势：

$$\begin{cases}\varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*}\\[2ex] \vec{A}(t,\vec{x}) = \dfrac{\vec{\beta}^*}{c}\varphi(t,\vec{x})\end{cases}$$



此结果称为**李纳-维谢尔势**。其中

$$\vec{n}^* \triangleq \hat{\mathbb{R}}^* - \vec{\beta}^*$$

- **带“$*$”诸量均是在推迟时刻 t^* 的数值，而 t^* 的定义则为：**

$$t^* \triangleq t - \frac{\mathbb{R}^*}{c} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_e^*|}{c},\quad \text{where } \vec{x}_e^* \triangleq \vec{x}_e(t^*)$$

9

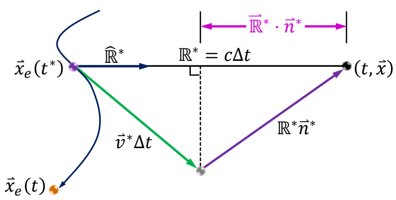
几何因子的含义

时空点 $(t,\vec{x})$ 处的李纳–维谢尔势与如下距离成反比：

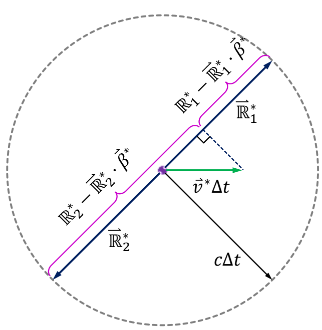
$$\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^* = \mathbb{R}^* - \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^* = \hat{\mathbb{R}}^*\cdot\mathbb{R}^*\vec{n}^*$$

其中

$$\mathbb{R}^*\vec{n}^* = c\Delta t\vec{n}^* = c\Delta t\hat{\mathbb{R}}^* - \vec{v}^*\Delta t$$



10



11

低速极限

对于缓慢运动电荷（$\beta \ll 1$），由于

$$\vec{n}^* \triangleq \hat{\mathbb{R}}^* - \vec{\beta}^* \approx \hat{\mathbb{R}}^*$$

因而

$$\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^* \approx \mathbb{R}^*$$

而李纳–维谢尔势则表示为了

$$\varphi(t,\vec{x}) \approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}^*},\quad \vec{A}(t,\vec{x}) \approx \frac{\mu_0 e\vec{v}^*}{4\pi\mathbb{R}^*}$$

其形式上分别与静止点电荷 e 激发的静电势、电流元 $Id\vec{l} = e\vec{v}^*$ 激发的矢量势相似，但却保留了推迟效应。

12

2. 推迟时间

推迟时间 t^* 的定义为（其中 $\Delta t \triangleq t - t^* > 0$）：

$$\mathbb{R}^* = c(t - t^*) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|\vec{x} - \vec{x}_e^*| = c\Delta t}$$

求解此代数方程，可将 t^* 表示为时空坐标 $(t, \vec{x})$ 的函数

$$t^* = t - \mathbb{R}^*/c = t^*(t, \vec{x})$$

注：若此方程无解，则 $(t, \vec{x})$ 处的李纳–维谢尔势为零。

- 一旦确定了 t^*，t^* 时刻粒子的速度、加速度以及该时刻粒子与场点的相对距离和相对位矢也就确定了：

$$\begin{cases} \vec{v}^* = \vec{v}(t^*) = \vec{v}(t, \vec{x}), & \mathbb{R}^* = c(t - t^*) = \mathbb{R}^*(t, \vec{x}) \\ \vec{a}^* = \vec{a}(t^*) = \vec{a}(t, \vec{x}), & \vec{\mathbb{R}}^* = \vec{x} - \vec{x}_e(t^*) = \vec{\mathbb{R}}^*(t, \vec{x}) \end{cases}$$

注：上述诸量均是 $(t, \vec{x})$ 的函数。

13

与特定时空点对应的推迟时间至多只有一个

反证法：假设对于时空点 $(t, \vec{x})$，t_1^* 和 t_2^* 均为与之相联系的推迟时间，即有

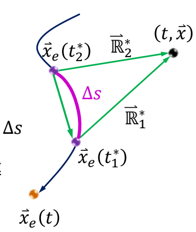
$$c(t - t_1^*) = \mathbb{R}_1^*, \quad c(t - t_2^*) = \mathbb{R}_2^*$$

由此可得

$$c|t_2^* - t_1^*| = |\mathbb{R}_2^* - \mathbb{R}_1^*| \le |\vec{\mathbb{R}}_2^* - \vec{\mathbb{R}}_1^*| \le \Delta s$$

故在两推迟时间之间，粒子的平均速率

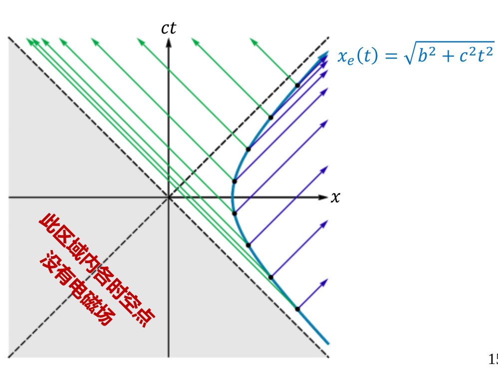
$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{|t_2^* - t_1^*|} \ge c$$



与带电粒子的速度小于真空中光速这一实验事实不符。

14

不存在推迟时间的一个例子



15

二、运动点电荷的电磁场

将李纳–维谢尔势代入电磁势定义，即得点电荷激发的电磁场

$$\begin{cases}\varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*} \\ \vec{A}(t,\vec{x}) = \dfrac{\vec{\beta}^*}{c}\varphi(t,\vec{x})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A} \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A}\end{cases}$$

- 此处难点在于：时空坐标 $(t,\vec{x})$ 以隐变量的形式出现在推迟时间的表达式中，因而对时空坐标求导的函数具有如下形式
  $$f = f\big(\vec{x}, t^*(t,\vec{x})\big)$$
  - ➢ 数学方法：莱布尼兹法则、链式法则。
- 数学上的关键在于求出 t^* 对 t 和 $\vec{x}$ 的导数。
  - ➢ 求解方法：关系 $|\vec{\mathbb{R}}^*| = \mathbb{R}^*$ 亦即 $|\vec{x}-\vec{x}_e^*| = c(t-t^*)$。

16

1. 中间推导

$\vec{x}_e^*$、$\vec{\beta}^*$、$\mathbb{R}^*$ 和 $\vec{\mathbb{R}}^*$ 对时间与空间的导数

- 利用链式法则，$\vec{x}_e^*$ 对时间和空间的导数分别为
  $$\partial_t\vec{x}_e^* = \partial_t\vec{x}_e(t^*) = \vec{\beta}^* c\,\partial_t t^*,\quad \nabla\vec{x}_e^* = \nabla\vec{x}_e(t^*) = (\nabla t^*)\vec{\beta}^* c$$
- 类似地，$\vec{\beta}^*$ 对时间和空间的导数分别为
  $$\partial_t\vec{\beta}^* = \dot{\vec{\beta}}^*\partial_t t^*,\quad \nabla\vec{\beta}^* = (\nabla t^*)\dot{\vec{\beta}}^*$$
- 利用 $\mathbb{R}^* = c(t-t^*)$，可得
  $$\partial_t\mathbb{R}^* = c(1-\partial_t t^*),\quad \nabla\mathbb{R}^* = -c\nabla t^*$$
- 利用 $\vec{\mathbb{R}}^* = \vec{x}-\vec{x}_e^*$，可得
  $$\partial_t\vec{\mathbb{R}}^* = -\vec{\beta}^* c\,\partial_t t^*,\quad \nabla\vec{\mathbb{R}}^* = \overleftrightarrow{I} - (\nabla t^*)\vec{\beta}^* c$$

17

推迟时间对时间与空间的导数

利用

$$\mathbb{R}^* = c(t-t^*),\quad \vec{\mathbb{R}}^* = \vec{x}-\vec{x}_e^*,\quad \mathbb{R}^{*2} = \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\mathbb{R}}^*$$

以及前面给出的关系，不难得到

$$\begin{aligned}\partial_t\mathbb{R}^{*2} &= 2\mathbb{R}^*\partial_t\mathbb{R}^* = 2\mathbb{R}^* c(1-\partial_t t^*) \\ &= 2\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\partial_t\vec{\mathbb{R}}^* = -2\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*\right)c\,\partial_t t^* \\ \nabla\mathbb{R}^{*2} &= 2\mathbb{R}^*\nabla\mathbb{R}^* = -2\mathbb{R}^* c\nabla t^* \\ &= 2\left(\nabla\vec{\mathbb{R}}^*\right)\cdot\vec{\mathbb{R}}^* = 2\vec{\mathbb{R}}^* - 2\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*\right)c\nabla t^*\end{aligned}$$

因此

$$\partial_t t^* = \frac{\mathbb{R}^*}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*},\quad c\nabla t^* = -\frac{\vec{\mathbb{R}}^*}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*} = -\hat{\mathbb{R}}^*\partial_t t^*$$

18

$\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*$ 的导数

由于

$$\nabla\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right) = \nabla \mathbb{R}^* - \left(\nabla \vec{\mathbb{R}}^*\right) \cdot \vec{\beta}^* - \left(\nabla \vec{\beta}^*\right) \cdot \vec{\mathbb{R}}^*$$

$$\partial_t\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right) = \partial_t \mathbb{R}^* - \left(\partial_t \vec{\mathbb{R}}^*\right) \cdot \vec{\beta}^* - \vec{\mathbb{R}}^* \cdot \partial_t \vec{\beta}^*$$

将前面的关系代入可得

$$\nabla\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right) = -\vec{\beta}^* + g\frac{\vec{\mathbb{R}}^*}{\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*}, \quad \frac{1}{c}\partial_t\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right) = 1 - g\frac{\mathbb{R}^*}{\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*}$$

其中

$$g = 1 - \beta^{*2} + \frac{\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \dot{\vec{\beta}}^*}{c}$$

19

2. 运动点电荷的电磁场

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A} = -\nabla\varphi - \frac{\vec{\beta}^*}{c}\partial_t\varphi - \frac{\varphi}{c}\partial_t\vec{\beta}^*$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^2}\left(\nabla + \frac{\vec{\beta}^*}{c}\partial_t\right)\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right) - \frac{\dot{\vec{\beta}}^*\partial_t t^*}{c\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*}\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{g\left(\vec{\mathbb{R}}^* - \mathbb{R}^*\vec{\beta}^*\right)}{\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^3} - \frac{\mathbb{R}^*\dot{\vec{\beta}}^*}{c\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^2}\right]$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{c}\left[\nabla\varphi \times \vec{\beta}^* + \varphi\nabla \times \vec{\beta}^*\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[-\frac{1}{\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^2}\nabla\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right) \times \vec{\beta}^* + \frac{\nabla t^* \times \dot{\vec{\beta}}^*}{\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*}\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[-\frac{g\vec{\mathbb{R}}^* \times \vec{\beta}^*}{\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^3} - \frac{\vec{\mathbb{R}}^* \times \dot{\vec{\beta}}^*}{c\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^2}\right] = \frac{\hat{\mathbb{R}}^* \times \vec{E}}{c}$$

20

$$\vec{E} = \frac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^3}\left[g\vec{n}^* - \frac{\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)\dot{\vec{\beta}}^*}{c}\right]$$

$$= \frac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^3}\left[\left(1 - \beta^{*2} + \frac{\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \dot{\vec{\beta}}^*}{c}\right)\vec{n}^* - \frac{\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)\dot{\vec{\beta}}^*}{c}\right]$$

$$= \frac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^3}\left[(1 - \beta^{*2})\vec{n}^* + \frac{\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \dot{\vec{\beta}}^*\right)\vec{n}^* - \left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)\dot{\vec{\beta}}^*}{c}\right]$$

$$= \frac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)^3}\left[(1 - \beta^{*2})\vec{n}^* + \frac{\vec{\mathbb{R}}^* \times \left(\vec{n}^* \times \dot{\vec{\beta}}^*\right)}{c}\right]$$

21

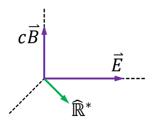
李纳–维谢尔场

综上，点电荷激发的电磁场、亦即**李纳–维谢尔场**为

$$\begin{cases} \vec{E}(t,\vec{x}) = \dfrac{e\mathbb{R}^*}{4\pi\varepsilon_0\left(\mathbb{R}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\left[(1-\beta^{*2})\vec{n}^* + \dfrac{\vec{\mathbb{R}}^*\times(\vec{n}^*\times\vec{a}^*)}{c^2}\right] \\ c\vec{B}(t,\vec{x}) = \hat{\mathbb{R}}^*\times\vec{E}(t,\vec{x}) \end{cases}$$

- 点电荷在任一时空点 $(t,\vec{x})$ 所激发的电磁场都满足

$$\begin{cases} \vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \\ \hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{B} = 0 \\ \hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{E} \neq 0 \end{cases}$$

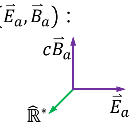


- 点电荷在任一时空点所激发的电磁场总是类电场（$E > cB$）

速度场和加速度场

电磁场可以分解为速度场 $(\vec{E}_v,\vec{B}_v)$ 和加速度场 $(\vec{E}_a,\vec{B}_a)$：

$$\vec{E} = \vec{E}_v + \vec{E}_a, \quad \vec{B} = \vec{B}_v + \vec{B}_a$$



其中

$$\begin{cases} \vec{E}_v = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}^{*2}}\dfrac{(1-\beta^{*2})\vec{n}^*}{\left(\hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}, & c\vec{B}_v = \hat{\mathbb{R}}^*\times\vec{E}_v \\ \vec{E}_a = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2\mathbb{R}^*}\dfrac{\hat{\mathbb{R}}^*\times(\vec{n}^*\times\vec{a}^*)}{\left(\hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}, & c\vec{B}_a = \hat{\mathbb{R}}^*\times\vec{E}_a \end{cases}$$

- **速度场（自场）$\sim 1/\mathbb{R}^{*2}$，而加速度场（辐射场）$\sim 1/\mathbb{R}^*$。**
- **加速度场：$(\vec{E}_a,\vec{B}_a,\hat{\mathbb{R}}^*)$ 构成右手正交系，且 $E_a = cB_a$。**

【例】求以速度 $\vec{v}$ 匀速运动的点电荷激发的电磁势与电磁场。

【方法一】设点电荷初始时位于原点，轨道为 $\vec{x}_e(t) = \vec{v}t$。

不难看出 $\mathbb{R}^*\vec{n}^* = \vec{R}$, $\quad \hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^* = R\cos\alpha$

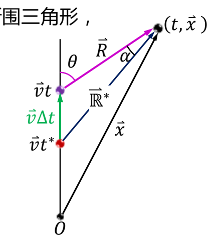
其中 $\vec{R} \triangleq \vec{x} - \vec{\beta}ct$ 是场点相对于粒子目前位置的位矢。

考察场点、粒子推迟位置和目前位置所围三角形，利用正弦定理得到

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{v\Delta t}{c\Delta t} = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin\alpha = \beta\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathbb{R}^*\vec{n}^* = \vec{R} \\ \hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^* = R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta} \end{cases}$$



由此得到，匀速运动点电荷的李纳–维谢尔势为

$$\begin{cases}\varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}} \\ \vec{A}(t,\vec{x}) = \dfrac{\vec{\beta}^*}{c}\varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0 e\vec{v}}{4\pi R}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}\end{cases}$$

而电磁场只有速度场，为

$$\begin{cases}\vec{E} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(1-\beta^{*2})\mathbb{R}^*\vec{n}^*}{\left(\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3} = \dfrac{e\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\ \vec{B} = \dfrac{\hat{\mathbb{R}}^*\times\vec{E}}{c} = \dfrac{\vec{\beta}^*\times\vec{E}}{c} = \dfrac{\mu_0 e\vec{v}\times\hat{R}}{4\pi R^2}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\end{cases}$$

25

【方法二】推迟时间t^*满足

$$\mathbb{R}^* = |\vec{x}-\vec{x}_e(t^*)| = c(t-t^*) = c\Delta t > 0$$

利用 $\vec{R} \triangleq \vec{x}-\vec{\beta}ct$ ，有 $\vec{\mathbb{R}}^* = \vec{R}+\vec{\beta}c\Delta t$，可将其改写为

$$\left|\vec{R}+\vec{\beta}c\Delta t\right| = c\Delta t$$

左右两边平方，整理得到

$$(1-\beta^2)(c\Delta t)^2 - 2\left(\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right)c\Delta t - R^2 = 0$$

解得

$$c\Delta t = \frac{\vec{R}\cdot\vec{\beta}+\sqrt{\left(\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right)^2+(1-\beta^2)R^2}}{1-\beta^2}$$

26

而由于

$$\begin{aligned}\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^* &= \mathbb{R}^* - \vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^* \\ &= c\Delta t - \left(\vec{R}+\vec{\beta}c\Delta t\right)\cdot\vec{\beta} \\ &= (1-\beta^2)c\Delta t - \vec{R}\cdot\vec{\beta}\end{aligned}$$

因而

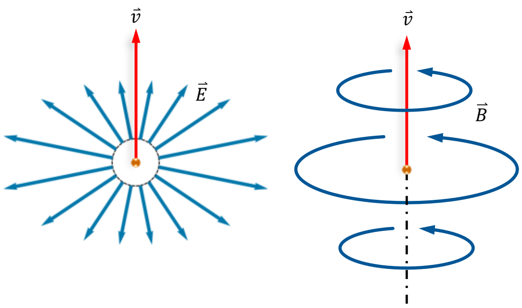
$$\vec{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^* = \sqrt{\left(\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right)^2+(1-\beta^2)R^2}$$

此外

$$\mathbb{R}^*\vec{n}^* = \vec{\mathbb{R}}^* - \mathbb{R}^*\vec{\beta}^* = \left(\vec{R}+\vec{\beta}c\Delta t\right) - \vec{\beta}c\Delta t = \vec{R}$$

将上面两表达式代入李纳维谢尔势与场的表达式，即得匀速运动点电荷激发的电磁势和电磁场。

27



28

【思考】点电荷 e 被限制在 x 轴上运动。证明：

（1）场点位于点电荷右侧

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}^{*2}}\frac{1+\beta^*}{1-\beta^*}\hat{x},\quad \vec{B}=0$$

（2）场点位于点电荷左侧

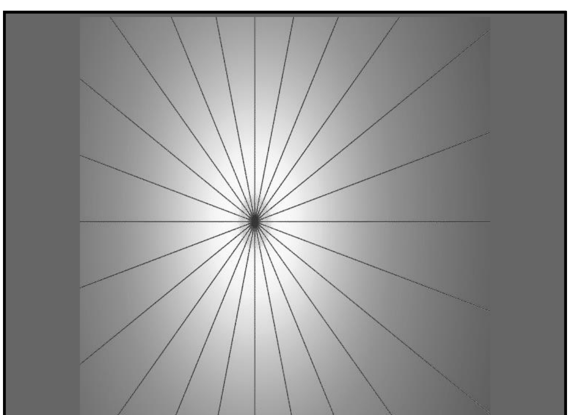
$$\vec{E}=\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}^{*2}}\frac{1-\beta^*}{1+\beta^*}\hat{x},\quad \vec{B}=0$$

【思考】在 x 轴上运动的点电荷 e，其位置与时间满足

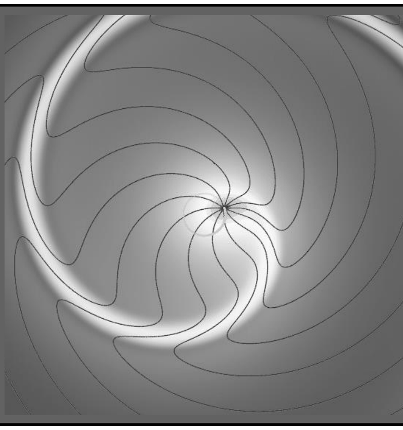
$$x(t)=\sqrt{b^2+c^2t^2}$$

试确定该点电荷在 x 轴上激发的电磁场。

29



30



31

§2 点电荷的辐射

32

一、辐射场

加速运动伴随着辐射，即存在可以脱离粒子的电磁场

$$\vec{E}_a=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2\mathbb{R}^*}\frac{\hat{\mathbb{R}}^*\times(\vec{n}^*\times\vec{a}^*)}{\left(\hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^3}\quad c\vec{B}_a=\hat{\mathbb{R}}^*\times\vec{E}_a$$

其中

$$\vec{n}^*\triangleq\hat{\mathbb{R}}^*-\vec{\beta}^*\quad\Longrightarrow\quad\hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*=1-\hat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{\beta}^*$$

- 当足够大时，与粒子相伴随的自场大小可以忽略，只需考虑辐射场。
- **辐射场满足：$(\vec{E}_a,\vec{B}_a,\hat{\mathbb{R}}^*)$ 构成右手正交系，且 $E_a=cB_a$。**

33

辐射场的能量密度与能流密度

辐射场的能量密度为：

$$w=\varepsilon_0 E_a^2=\frac{e_s^2}{4\pi c^4 \mathbb{R}^{*2}}\frac{\left|\widehat{\mathbb{R}}^*\times(\vec{n}^*\times\vec{a}^*)\right|^2}{\left(\widehat{\mathbb{R}}^*\cdot\vec{n}^*\right)^6}$$

其中

$$e_s^2\triangleq\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

辐射场的能流密度为：

$$\vec{S}=\varepsilon_0 c^2\vec{E}_a\times\vec{B}_a=wc\widehat{\mathbb{R}}^*$$

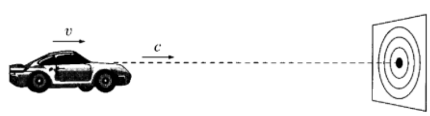
34

二、辐射功率

有两个不同的角度定义加速运动点电荷的辐射功率。

接收功率：远处的观测者在单位时间所接收到的电磁场能量。

发射功率：由点电荷附近的观测者所测得的、
点电荷由于辐射而在单位时间所损失的能量。



35

接收功率

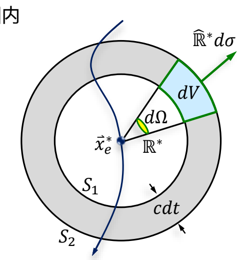
粒子在 t^* 时刻发出的信号在 $t=t^*+\mathbb{R}^*/c$ 时刻传播至球面 S_1。

接下来 dt 时间内，立体角 $d\Omega$ 范围内通过球面流出去的能量为

$$dW=\left(\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}\right)dt$$
$$=\left(\vec{S}\cdot\widehat{\mathbb{R}}^*\right)\mathbb{R}^{*2}dtd\Omega$$

因而，接收功率角分布为

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\text{接受}}=\frac{dW}{dtd\Omega}=S\mathbb{R}^{*2}$$



注：由 $\vec{S}=wc\widehat{\mathbb{R}}^*$ 知：$dW=t$ **时刻** S_1 **和** S_2 **之间的电磁能量。**

36

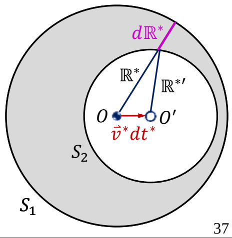
发射功率

设粒子在 t^* 时刻位于 O 点，瞬时速度为 $\vec{v}^*$；该时刻激发的电磁场在 t 时刻影响至半径为 $\mathbb{R}^* = c(t - t^*)$ 的球面 S_1。

在 $t^* + dt^*$ 时刻，粒子到达 O' 点；该时刻激发的电磁场在 t 时刻影响至半径为 $\mathbb{R}^{*\prime} = c(t - t^* - dt^*) = \mathbb{R}^* - cdt^*$ 的球面 S_2。

在 dt^* 时间间隔内，粒子所辐射的能量，就是在 t 时刻位于球面 S_1 和 S_2 之间的电磁场能量。

$$d\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^* - \mathbb{R}^{*\prime} - \widehat{\mathbb{R}}^* \cdot (\vec{v}^* dt^*)$$
$$= \left(1 - \widehat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{\beta}^*\right) cdt^*$$
$$= \left(\widehat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right) cdt^*$$



37

在 dt^* 时间间隔内，粒子在立体角 $d\Omega$ 范围内所辐射的能量为

$$dW = w \cdot \mathbb{R}^{*2} d\Omega \cdot d\mathbb{R}^* = S\mathbb{R}^{*2}\left(\widehat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right) dt^* d\Omega$$

单位时间内粒子发射功率的角分布为

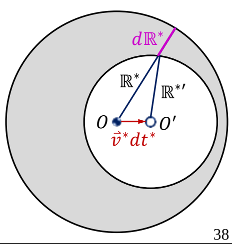
$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\text{发射}} = \frac{dW}{dt^* d\Omega} = S\mathbb{R}^{*2}\left(\widehat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)$$

- 由于

$$\frac{dW}{dt^* d\Omega} = \frac{\partial t}{\partial t^*} \frac{dW}{dt d\Omega}$$

而 $\partial t / \partial t^* = \widehat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*$，因而

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\text{发射}} = \left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\text{接受}} \left(\widehat{\mathbb{R}}^* \cdot \vec{n}^*\right)$$



38

本课程中辐射功率指的是发射功率

粒子在任一时刻的**辐射功率角分布**为

$$\frac{dP}{d\Omega} = S\mathbb{R}^2\left(\widehat{\mathbb{R}} \cdot \vec{n}\right) = \frac{e_s^2}{4\pi c^3} \frac{\left|\widehat{\mathbb{R}} \times (\vec{n} \times \vec{a})\right|^2}{\left(\widehat{\mathbb{R}} \cdot \vec{n}\right)^5}$$

- 此处略去了表示推迟时间的“*”。
- **粒子在任一时刻的辐射功率是由该时刻的 v 和 a 决定的，这里没有推迟的关系。**
- **辐射总功率**为

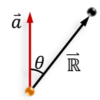
$$P = \oint \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$$

39

三、低速运动粒子的辐射

对于低速运动的粒子（$\beta \ll 1$），取极轴沿加速度方向。由于

$$\vec{n} \triangleq \hat{\mathbb{R}} - \vec{\beta} \approx \hat{\mathbb{R}}$$

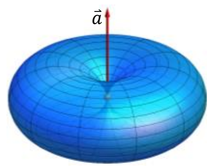


因此，$\hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{n} \approx 1$，而

$$\left|\hat{\mathbb{R}} \times (\vec{n} \times \vec{a})\right| \approx \left|\hat{\mathbb{R}} \times \vec{a}\right| = a \sin\theta$$

所以

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e_s^2 a^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta$$



因此，低速运动粒子的辐射总功率为

$$P = \frac{2e_s^2 a^2}{3c^3}$$

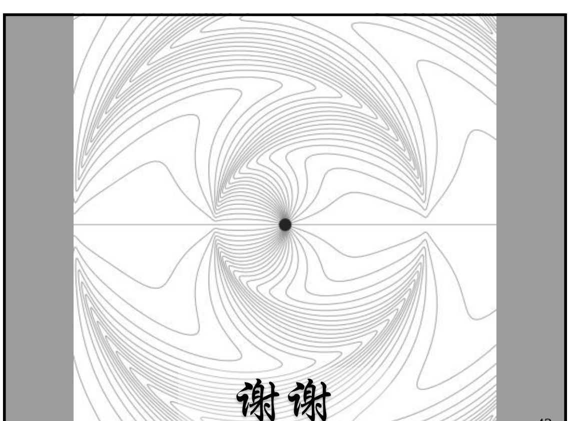
这称为**拉莫（Larmor）公式**。

40

【思考】匀减速直线运动的电子，其速度由 10^5 m/s 减小为零，此段时间内电子运动了距离 $d = 30$ Å。试确定此段时间内电子由于辐射所损失的能量占初始动能的比例（估算量级）。

【思考】卢瑟福的原子核模型认为电子绕着不动的原子核转动。而按照经典电动力学，绕核转动的电子必然会由于辐射电磁场而损失能量，从而最终会落在原子核表面。假设氢原子中的电子绕着质子作半径缓慢减小的圆周运动。试确定电子轨道半径由 $r_0 = 0.529$ Å 减小为 $0.01 r_0$ 大约需要多长时间（估算量级）。

41



42