

§2 谐振电流及其辐射场

1

一、辐射的基本概念

1. 电磁波的产生

产生电磁波的关键是产生随时间变化的电场和磁场：

时变的电场、磁场相互激发，在空间中就形成了电磁波。

- **微观**：产生电磁波的前提条件是**带电粒子做加速运动**，这样的粒子所产生的电场与磁场通常均是随时间变化的。
- **宏观**：产生电磁波的前提条件是**存在随时间变化的电流分布**，例如频率为 ω 的交变电流密度矢量：

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \vec{j}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

电磁波由载有交变电流的天线辐射出来。

2

2. 辐射问题

- 单位时间由立体角范围 $d\Omega$ 内辐射到无穷远处的能量为

$$dP(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} (\vec{S} \cdot d\vec{\sigma}) = \lim_{r \rightarrow \infty} [(\hat{r} \cdot \vec{S})r^2 d\Omega]$$

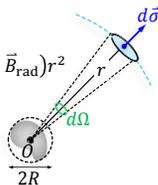
- 仅当 $r \rightarrow \infty$ 时， $\vec{S} \propto \hat{r}/r^2$ ， dP 才不为零。这意味着仅有辐射电磁场 ($\vec{E}_{\text{rad}}, \vec{B}_{\text{rad}} \sim 1/r$) 对 dP 有贡献。

- 定义（瞬时）**辐射功率的角分布**

$$\frac{dP}{d\Omega} \triangleq \lim_{r \rightarrow \infty} [(\hat{r} \cdot \vec{S})r^2] = \epsilon_0 c^2 \hat{r} \cdot (\vec{E}_{\text{rad}} \times \vec{B}_{\text{rad}})r^2$$

- （瞬时）**辐射总功率**为

$$P(t) \triangleq \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \oint \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$$



3

从源的角度看待辐射功率

设 V 是半径为 r 的球，我们有能量守恒定理

$$\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = - \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV - \frac{d}{dt} \int_V w dV$$

取极限 $r \rightarrow \infty$ ，并利用辐射定义，得到

$$P(t) = - \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV - \frac{dW}{dt}$$

- 对于随时间周期性变化的电流，如果将上式左右两边在一个周期内取平均值，由于 $\langle dW/dt \rangle = 0$ ，因而：

$$\langle P \rangle = - \int \langle \vec{E} \cdot \vec{J} \rangle dV$$

平均而言，总辐射功率等于为维持电流周期性变化，外界在单位时间所消耗的能量。

4

二、辐射

接下来我们将给出

- (1) 随时间变化的给定电流分布激发的辐射场；
- (2) 辐射功率及其角分布；
- (3) 谐振电流下平均的辐射功率及其角分布。

- 由于 r 最终是要趋于无穷的，因而在所有推导中，我们只保留那些能通过

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

给出辐射场 $\vec{E}_{\text{rad}}, \vec{B}_{\text{rad}} \sim 1/r$ 的项。其中 φ 和 \vec{A} 为推迟势：

$$\varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho(t_r, \vec{x}')}{r} d^3x', \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\vec{J}(t_r, \vec{x}')}{r} d^3x'$$

5

1. 辐射场的推迟势

由于源尺度 $R \ll r$ ，从而也有 $r' \ll r$ 。将 \mathbb{R} 按照 r'/r 展开

$$\mathbb{R} = e^{-\vec{x}' \cdot \nabla} r = r - r'(\hat{r}' \cdot \hat{r}) + \frac{1}{2!} \frac{r'^2}{r} [1 - (\hat{r}' \cdot \hat{r})^2] - \dots$$

- 我们寻找的是按 $1/r$ 变化的 \vec{A} 的导数，故 \vec{A} 的被积函数中

$$\frac{1}{\mathbb{R}} \approx \frac{1}{r}$$

- 推迟时间

$$t - \frac{\mathbb{R}}{c} = \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r'}{c} (\hat{r}' \cdot \hat{r}) - \frac{1}{2!} \frac{r' r'}{c} [1 - (\hat{r}' \cdot \hat{r})^2] + \dots$$

由于 r 最终趋于 ∞ ，因而有

$$t - \frac{\mathbb{R}}{c} \approx t - \frac{r}{c} + \frac{r'}{c} (\hat{r}' \cdot \hat{r})$$

6

综合以上考量，我们就得到：对辐射有贡献的电磁势为

$$\begin{cases} \varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}, \vec{x}'\right) d^3x' \\ \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}, \vec{x}'\right) d^3x' \end{cases}$$

方便起见，定义

$$t_r \triangleq t - \frac{r}{c}, \quad t^* \triangleq t_r + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}$$

由此，可将辐射场的电磁势写为：

$$\begin{cases} \varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(t^*, \vec{x}') d^3x' \\ \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(t^*, \vec{x}') d^3x' \end{cases}$$

7

2. 辐射场

接下来利用前面所得辐射场电磁势及下面的关系推导辐射场：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- 此处感兴趣的是辐射场，即电磁场中 $\sim 1/r$ 的项。

➢ 后面表示辐射场时将略去下标 “rad”。

- 由于 $\nabla(1/r) \sim 1/r^2$ ，因而 $\nabla\varphi$ 和 $\nabla \times \vec{A}$ 中涉及到 $1/r$ 的导数项，对辐射场没有贡献。
- 与推迟时间有关的导数

$$\begin{cases} t_r = t - \frac{r}{c} \\ t^* = t_r + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial t^*}{\partial t} = 1 \\ \nabla t^* = -\frac{\hat{r}}{c} + \frac{1}{c} O\left(\frac{r'}{r}\right) \end{cases}$$

8

磁场

$$\begin{aligned} \vec{B}(t, \vec{x}) &= \nabla \times \vec{A}(t, \vec{x}) = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(t^*, \vec{x}') d^3x' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \nabla \times \vec{j}(t^*, \vec{x}') d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \nabla t^* \times \frac{\partial}{\partial t^*} \vec{j}(t^*, \vec{x}') d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \left(-\frac{\hat{r}}{c} \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}(t^*, \vec{x}') d^3x' \\ \Rightarrow \vec{B}(t, \vec{x}) &= -\frac{1}{c} \hat{r} \times \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} \end{aligned}$$

为了由电磁势提炼出辐射场，可将空间导数转化为时间导数：

$$\nabla \leftrightarrow -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t$$

9

电场

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A} = \frac{\hat{r}}{c} \partial_t \varphi - \partial_t \vec{A}$$

其中的标势和矢势满足Lorenz 规范条件。

$$0 = \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \nabla \cdot \vec{A}$$

在辐射区，可将Lorenz 规范条件写为

$$0 = \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi - \frac{\hat{r}}{c} \cdot \partial_t \vec{A} \Rightarrow \partial_t \varphi = c \hat{r} \cdot \partial_t \vec{A}$$

因此，辐射场的电场可以用矢量势表示为

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (\hat{r} \cdot \partial_t \vec{A}) \hat{r} - \partial_t \vec{A} = -(\hat{r} \times \partial_t \vec{A}) \times \hat{r} \\ &\Rightarrow \vec{E} = c \vec{B} \times \hat{r} \end{aligned}$$

10

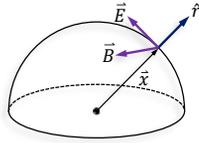
辐射场的基本性质

综上，辐射场就可以用矢量势表示为

$$c \vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c \vec{B} \times \hat{r}$$

其中， $\dot{\vec{A}} = \partial_t \vec{A}$ 。

- 对于辐射场，
($\vec{E}, \vec{B}, \hat{r}$) 构成右手正交系，
且 $E = cB$ 。



- 为了获得辐射场，对空间的导数转化为了对时间的导数：

$$\nabla \leftrightarrow -\frac{\hat{r}}{c} \partial_t$$

11

3. 辐射功率

利用前面给出的辐射场，能流密度矢量可写为

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c^3 B^2 \hat{r}$$

因此，辐射功率的角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega} = S r^2 = \epsilon_0 c^3 B^2 r^2$$

对所有立体角的积分，即得总辐射功率

$$P(t) = \oint \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$$

12

三、谐振电流及其辐射场

下面考察谐振电流：

$$\vec{J}(t, \vec{x}) = \vec{J}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{J}(t^*, \vec{x}') = \vec{J}_0(\vec{x}')e^{-i\omega t^*}, \quad \left(t^* = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{J}(t^*, \vec{x}') = \vec{J}_0(\vec{x}')e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} e^{i(kr - \omega t)}$$

这里定义了波矢量 \vec{k} ： $\vec{k} \triangleq \frac{\omega}{c} \hat{r}$

当讨论谐振电流的辐射场时，
相关场量对时间和空间的导数
都转化为代数乘法运算

$$\begin{cases} \partial_t \leftrightarrow -i\omega \\ \nabla \leftrightarrow i\vec{k} \end{cases}$$

13

- 谐振电流的矢量势

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3x' \vec{J}(t, \vec{x}') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'}$$

- 谐振电流的辐射场

$$\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A} = \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}$$

- 谐振电流的平均能流密度

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \operatorname{Re}(\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^3 |\vec{B}|^2 \hat{r}$$

- 谐振电流的平均辐射功率角分布

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = |\langle \vec{S} \rangle| r^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^3 |\vec{B}|^2 r^2$$

14

§3 天线辐射

15

一、天线电流

本节讨论中心馈电的细天线的辐射。设驱动电压的频率为 ω 。

天线中实际流过的电流需要综合考察电磁场与电荷电流的相互作用。可以证明：在细天线近似下，流过天线的电流为驻波。

设 $k = \omega/c$ ，若细天线长度为 l ，则其上电流强度的表达式为

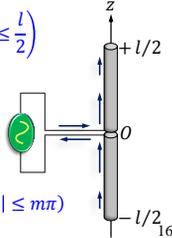
$$I(t, z) = I_0 \sin k \left(\frac{l}{2} - |z| \right) e^{-i\omega t}, \quad \left(|z| \leq \frac{l}{2} \right)$$

引入无量纲量 m ：

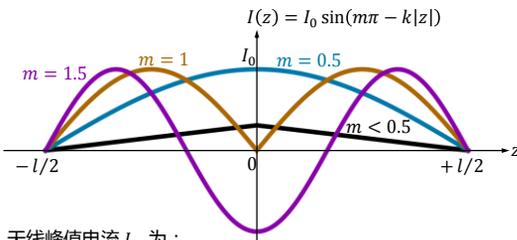
$$m \triangleq \frac{l}{\lambda} = \frac{kl}{2\pi}$$

电流分布可以写为

$$I(t, z) = I_0 \sin(m\pi - k|z|) e^{-i\omega t}, \quad (k|z| \leq m\pi)$$



天线的峰值电流



天线峰值电流 I_m 为：

$$I_m = \begin{cases} I_0, & (m \geq 1/2) \\ I_0 \sin m\pi, & (m < 1/2) \end{cases} \Rightarrow I_m \approx m\pi I_0, \quad (m \ll 1)$$

17

二、天线辐射

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \int d^3x' \vec{j}_0(\vec{x}') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-l/2}^{l/2} \sin(m\pi - k|z'|) e^{-ikz' \cos \theta} dz' \end{aligned}$$

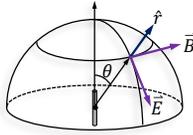
令 $\xi = kz'$ ，则 $\sin[m\pi - (1 - \cos \theta)\xi] + \sin[m\pi - (1 + \cos \theta)\xi]$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \hat{z} \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi kr} \int_0^{m\pi} 2 \sin(m\pi - \xi) \cos(\xi \cos \theta) d\xi$$

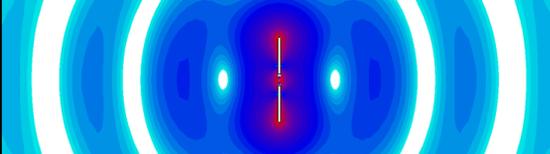
$$\Rightarrow \vec{A}(t, \vec{x}) = \hat{z} \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr - \omega t)}}{2\pi k r} \frac{\cos(m\pi \cos \theta) - \cos(m\pi)}{\sin^2 \theta} \frac{g(\theta)}{\sin \theta}$$

18

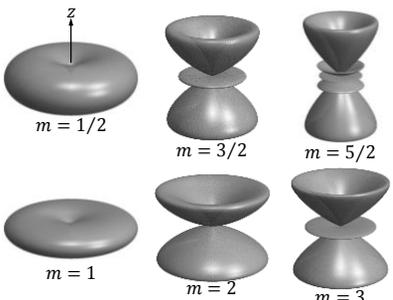
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr - \omega t)}}{2\pi kr} \frac{g(\theta)}{\sin \theta} \hat{z}, \quad g(\theta) \triangleq \frac{\cos(m\pi \cos \theta) - \cos(m\pi)}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c\vec{B} = -i \frac{\mu_0 c I_0 e^{i(kr - \omega t)}}{2\pi r} g(\theta) \hat{\phi} \\ \vec{E} = -i \frac{\mu_0 c I_0 e^{i(kr - \omega t)}}{2\pi r} g(\theta) \hat{\theta} \end{cases}$$


辐射场是线偏振的TEM (电经磁纬)



天线辐射的能流及方向性

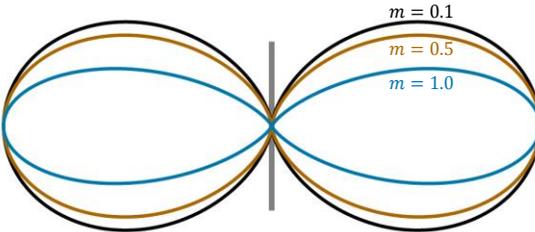
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2 g^2(\theta)}{8\pi^2 r^2} \hat{r} \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} g^2(\theta)$$


随着 m 的增加，主瓣逐渐变窄，且越来越靠近天线轴线方向。

随着 m 的增加，主瓣逐渐变窄，且越来越靠近天线轴线方向。

20

短天线、半波天线、全波天线辐射角分布比较



$$\left. \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} \right|_{m=1.0}, \quad 4 \times \left. \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} \right|_{m=0.5}, \quad 1670 \times \left. \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} \right|_{m=0.1}$$

21

天线的辐射功率和辐射电阻

辐射总功率：

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi g^2(\theta) \sin \theta d\theta \triangleq \frac{1}{2} I_0^2 R_0$$

其中， R_0 具有电阻的量纲，其定义为：

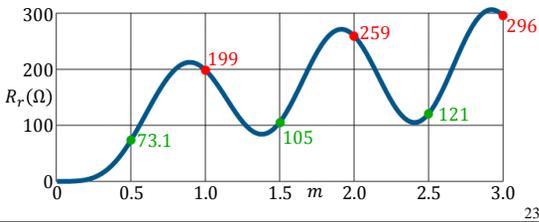
$$R_0 \triangleq \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int_0^\pi g^2(\theta) \sin \theta d\theta \approx 60 \int_{-1}^1 \frac{[\cos(m\pi u) - \cos(m\pi)]^2}{1-u^2} du$$

定义天线的辐射电阻 R_r ：

$$\langle P \rangle \triangleq \frac{1}{2} I_m^2 R_r \Rightarrow R_r = \begin{cases} R_0, & (m \geq 1/2) \\ \frac{R_0}{\sin^2 m\pi}, & (m < 1/2) \end{cases}$$

22

- 可将辐射电阻，视为天线电流驱动电路的负载电阻
- 天线的辐射电阻表示天线的辐射能力
- 辐射电阻越大，天线辐射能力越强
- 对于短天线 ($m \ll 1$)， $R_r \approx 197m^2 (\Omega)$

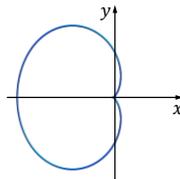
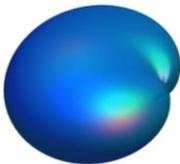
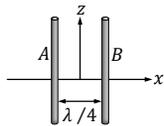


23

天线的辐射功率和辐射电阻

横向排列的两根半波天线：

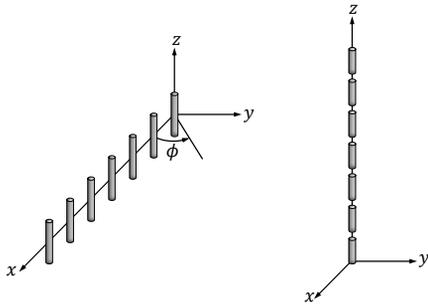
$$\begin{cases} I_A(t, z) = I_0 \cos kz e^{-i\omega t} \\ I_B(t, z) = I_0 \cos kz e^{-i(\omega t + \pi/2)} \end{cases}$$



合适的天线阵列可提高辐射功率并增强辐射的方向性

24

横向天线阵列与纵向天线阵列



25

§3 小场源辐射

26

一、小场源近似

前面给出了谐振电流 $\vec{J}(t, \vec{x}) = \vec{J}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$ 的辐射场矢量势为

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3x' \vec{J}(t, \vec{x}') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'}$$

其中

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \hat{r}$$

除了场源尺度 R 和场、源距离 r 外，此处还涉及到第三个尺度，即电磁波的波长 λ ：

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

27

- 由于研究的是辐射场，自然要求

$$R \ll r, \lambda \ll r$$

- 如果场源尺度 R 不仅远小于场、源间的距离 r ，而且也远小于波长 λ ，即

$$R \ll r, R \ll \lambda$$

则称其为**小场源**。

- 在小场源情形下，由于 $\vec{k} \cdot \vec{x}'$ 为小量，因而将推迟因子 $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'}$ 按照小量 $\vec{k} \cdot \vec{x}'$ 展开，由此即可给出辐射场的主要贡献以及对其的各阶修正。

28

小场源近似下的矢量势

在小场源近似下，将磁矢势的相因子 $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'}$ 按照 $\vec{k} \cdot \vec{x}'$ 展开

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left[\int \vec{j}(t, \vec{x}') d^3x' - i\vec{k} \cdot \int \vec{x}' \vec{j}(t, \vec{x}') d^3x' + \dots \right] \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left\{ \int \vec{j}(t, \vec{x}') d^3x' + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{j}(t, \vec{x}') \vec{x}' d^3x' \right] \cdot \hat{r} + \dots \right\} \\ &= \vec{A}_1(t, \vec{x}) + \vec{A}_2(t, \vec{x}) + \dots \end{aligned}$$

注：展开各级间幅度相差 R/λ 的量级。

29

利用前面得到的关于局域电流的两个关系，给出

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left[\dot{\vec{p}}(t) + \frac{1}{c} \dot{\vec{m}}(t) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}(t) + \frac{1}{6c} \ddot{g}(t) \hat{r} + \dots \right]$$

关于局域电流的两个关系

$$\int dV \vec{j} = \dot{\vec{p}}, \quad \int dV \vec{j} \times \vec{x} = \dot{\vec{m}} \times \hat{r} + \frac{1}{6} \dot{\vec{D}} + \frac{1}{6} \dot{g} \hat{r}$$

其中， \vec{p} 、 \vec{m} 、 \vec{D} 分别为电偶极矩、磁偶极矩和电四极矩：

$$\vec{p} \triangleq \int \vec{x} dq, \quad \vec{m} \triangleq \frac{1}{2} \int \vec{x} \times d\vec{l}, \quad \vec{D} \triangleq \int (3\vec{x}\vec{x} - r^2 \vec{I}) dq$$

而 $g \triangleq \int r^2 dq$ 。

30

根据 $\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A}$, $\vec{g}(t)\hat{r}$ 项对辐射场并无贡献, 因而可将其从矢势中剔除。这样就得到**小场源近似下矢势的多极展开**

$$\begin{aligned}\vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\dot{\vec{p}}(t) + \frac{1}{c} \dot{\vec{m}}(t) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}(t) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\dot{\vec{p}}_r + \frac{1}{c} \dot{\vec{m}}_r \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}}_r + \dots \right]\end{aligned}$$

其中

$$\vec{p}_r = \vec{p}(t_r), \quad \vec{m}_r = \vec{m}(t_r), \quad \vec{D}_r = \vec{D}(t_r) \quad (t_r \triangleq t - r/c)$$

- 小场源辐射场的主要贡献通常来自电偶极辐射, 而对其的主要修正则来自磁偶极辐射和电四极辐射。
- \vec{A}_{2M} 和 \vec{A}_{2E} 均起源于 $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}$ 展开式中 $\vec{k}\cdot\vec{x}'$ 的线性项。
- 可证: \vec{A} 的第二个表达式对随时间任意变化的小场源都成立

31

关于多极矩的复数表示

以电偶极矩为例。谐振电流电偶极矩的复数表示可写为

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$$

一般而言, \vec{p}_0 是复矢量, 不妨将其记为 $\vec{p}_0 = \vec{p}_{0R} + i\vec{p}_{0I}$, 其中 \vec{p}_{0R} 和 \vec{p}_{0I} 均为与时间无关的实矢量。

- 物理电偶极矩为 $\vec{p}(t)$ 的实部

$$\text{Re}[\vec{p}(t)] = \text{Re}[(\vec{p}_{0R} + i\vec{p}_{0I})e^{-i\omega t}] = \vec{p}_{0R} \cos \omega t + \vec{p}_{0I} \sin \omega t$$

$\text{Re}[\vec{p}(t)]$ 中 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 前的系数分别给出 \vec{p}_0 的实部和虚部。

- 若 \vec{p}_{0R} 或 \vec{p}_{0I} 的其中一项为零, 则电偶极子沿着某个固定方向振荡, 称其为**定向电偶极子**。

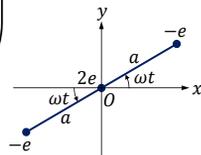
32

【例】 写出电四极张量的分量矩阵 D 、 D 中随时间变化周期性振荡的部分 D' 及其复表示 \vec{D}' 。

$$D = -ea^2 \begin{pmatrix} 1 + 3 \cos 2\omega t & 3 \sin 2\omega t & 0 \\ 3 \sin 2\omega t & 1 - 3 \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D' = -3ea^2 \begin{pmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}' = -3ea^2 \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-2i\omega t}$$



33

二、电偶极辐射

$$\vec{A} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \dot{\vec{p}}(t) \Rightarrow \begin{cases} c\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \ddot{\vec{p}} \times \hat{r} \\ \vec{E} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}) \times \hat{r} \end{cases}$$

- 辐射能流： $\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \hat{r}$
- 辐射总功率： $\langle P \rangle = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$

$$c\vec{B} = \partial_t \vec{A} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r} \quad \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^3 |\vec{B}|^2 \hat{r}, \quad \langle P \rangle = \oint |\langle \vec{S} \rangle| r^2 d\Omega$$

34

关于辐射功率的证明

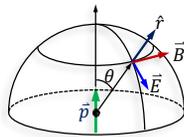
$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \oint |\langle \vec{S} \rangle| r^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint |\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint (|\ddot{\vec{p}}|^2 - |\ddot{\vec{p}} \cdot \hat{r}|^2) d\Omega \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \oint (\vec{T} - \hat{r}\hat{r}) d\Omega \cdot \ddot{\vec{p}} \right] \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \left(4\pi\vec{T} - \frac{4\pi}{3}\vec{T} \right) \cdot \ddot{\vec{p}} \right] \\ \Rightarrow \langle P \rangle &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \end{aligned}$$

35

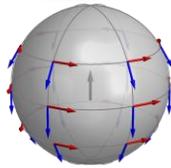
定向电偶极子的电磁场

考察定向电偶极子 $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ ，其中 \vec{p}_0 为实矢量。

$$\begin{cases} c\vec{B} = -\frac{\omega^2 p_0 \sin\theta e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\phi} \\ \vec{E} = -\frac{\omega^2 p_0 \sin\theta e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\theta} \end{cases}$$



辐射场是线偏振的TEM (电经磁纬)

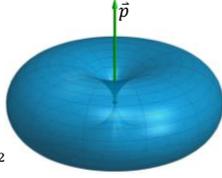


36

定向电偶极子的能流及其方向性

辐射能流：

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$



辐射总功率：

$$\langle P \rangle = \oint \langle \vec{S} \rangle r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2$$

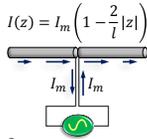
- 电偶极辐射具有强的方向性： $S \propto \sin^2 \theta$ ，垂直 \vec{p} 的方向最强。
- 辐射能流： $S \propto r^{-2}$ 满足能量守恒。
- 辐射功率：在 p_0 一定的情况下， $P \propto \omega^4$ 。

37

短天线辐射，辐射电阻

对于细的短天线，由于

$$\dot{\vec{p}} = \hat{z} e^{-i\omega t} \int_{-l/2}^{l/2} I(z) dz = \frac{1}{2} I_m l e^{-i\omega t} \hat{z}$$



因而辐射总功率为：

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2}{3c^3} |\dot{\vec{p}}|^2 = \frac{\omega^2 l^2 I_m^2}{48\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{\pi}{12\epsilon_0 c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2 \triangleq \frac{1}{2} R_r I_m^2$$

- 峰值电流 I_m 一定时， $P \propto \omega^2$ 。
 - 短天线的辐射电阻 $R_r \triangleq \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 197 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 (\Omega)$
- 要提高天线的辐射能力，需要增大天线的长度以致 $l \sim \lambda$ ，此时天线的辐射已不能用电偶极辐射来近似描写。

38

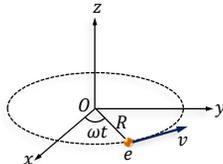
【例】点电荷 e 绕着原点做半径为 R 的匀速圆周运动，试确定其电偶极辐射场以及辐射功率。设运动速度 $v = \omega R \ll c$ 。

【解】 由于

$$\text{Re } \vec{p} = eR(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t)$$

所以

$$\vec{p} = eR(\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\omega t}$$



在球坐标系中将其写为

$$\vec{p} = eR(\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta + i\hat{\phi})e^{i(\phi - \omega t)}$$

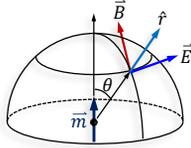
由此得到 (其中 $a = \omega^2 R$ 为粒子的加速度)

$$\ddot{\vec{p}} = -ea(\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta + i\hat{\phi})e^{i(\phi - \omega t)}$$

39

定向磁偶极子的电磁场结构

$$\begin{cases} c\vec{B} = -\frac{\omega^2 m_0}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta e^{i(kr-\omega t)}}{r} \hat{\theta} \\ \vec{E} = \frac{\omega^2 m_0}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta e^{i(kr-\omega t)}}{r} \hat{\phi} \end{cases}$$



辐射场是线偏振的TEM (电纬磁经)

43

【例】求半径为 R 的圆线圈谐振电流 $I = I_m e^{-i\omega t}$ 的辐射功率。

【解】磁偶极矩为 $\vec{m} = m_0 e^{-i\omega t} \hat{z}$ ，其中 $m_0 = \pi R^2 I_m$ 。因而

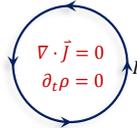
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\dot{\vec{m}} \times \hat{r}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \hat{r} = \frac{\omega^4 m_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \sin^2 \theta \hat{r}$$

辐射总功率：

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^4 m_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{4\pi^5}{3\epsilon_0 c} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 I_m^2 = \frac{4\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 I_m^2 \triangleq \frac{1}{2} R_r I_m^2$$

圆环电流的辐射电阻：

$$R_r \triangleq \frac{8\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 \approx 3.07 \times 10^5 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 (\Omega)$$



44

电、磁偶极子辐射强度比较

电偶极子与磁偶极子的辐射电阻

$$R_{rP} \triangleq \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2, \quad R_{rM} \triangleq \frac{8\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4$$

当 $l = R$ 时有

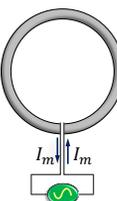
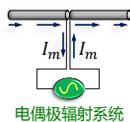
$$\frac{R_{rM}}{R_{rP}} = 16\pi^4 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \approx 1600 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2$$

• 当 $R/\lambda > 1/40$ 时，磁偶极辐射反而占优

• 对高频（如电视信号），通常用圆环天线

➢ 若 50 MHz，波长 6 m。 $R > 15$ cm 即满足条件

➢ 若 200 MHz，波长 1.5 m。 $R = 15$ cm 时磁偶极大优 磁偶极辐射系统



45

三、磁偶极辐射

$$\vec{A} = \frac{e^{ikr}}{24\pi\epsilon_0 c^3 r} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \Rightarrow \begin{cases} c\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{24\pi\epsilon_0 c^3 r} \hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r} \\ \vec{E} = \frac{e^{ikr}}{24\pi\epsilon_0 c^3 r} (\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}) \times \hat{r} \end{cases}$$

● 辐射能流： $\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2}{1152\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \hat{r}$

● 辐射总功率： $\langle P \rangle = \frac{|\ddot{\vec{D}}|^2}{1440\pi\epsilon_0 c^5}$

$$c\vec{B} = \partial_t \vec{A} \times \hat{r}, \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r} \quad \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^3 |\vec{B}|^2 \hat{r}, \quad \langle P \rangle = \oint |\langle \vec{S} \rangle| r^2 d\Omega$$

46

关于辐射功率的证明

设 $\hat{r} = n_k \hat{x}_k$, 则 $\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r} = n_i n_k \ddot{D}_{ij} \hat{x}_j \times \hat{x}_k$, 从而

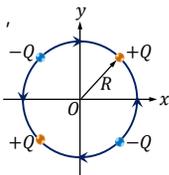
$$\begin{aligned} \oint |\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2 d\Omega &= \ddot{D}_{ij}^* \ddot{D}_{lm} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \oint n_i n_k n_l n_m d\Omega \\ &= \ddot{D}_{ij}^* \ddot{D}_{lm} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \cdot \frac{4\pi}{15} (\delta_{ik} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{kl}) \\ &= \frac{4\pi}{15} \ddot{D}_{ij}^* \ddot{D}_{lm} (4\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{ij} \delta_{lm}) \\ &= \frac{4\pi}{15} (4\ddot{D}_{ij}^* \ddot{D}_{ij} - \ddot{D}_{ij}^* \ddot{D}_{ji} - \ddot{D}_{ii}^* \ddot{D}_{ii}) = \frac{4\pi}{5} \ddot{D}_{ij}^* \ddot{D}_{ij} = \frac{4\pi}{5} |\ddot{\vec{D}}|^2 \\ \Rightarrow \langle P \rangle &= \frac{1}{1152\pi^2 \epsilon_0 c^5} \oint |\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2 d\Omega = \frac{|\ddot{\vec{D}}|^2}{1440\pi\epsilon_0 c^5} \end{aligned}$$

47

【例】 计算图示场源的辐射场与辐射功率，其中 $Q = Q_0 e^{-i\omega t}$ 。

【注】 $I = \dot{Q} = -iI_m e^{-i\omega t}$, ($I_m = \omega Q_0$)

【解】 $\vec{D} = 6QR^2(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})$



$$\hat{r} \cdot \vec{D} = 6QR^2(n_x \hat{y} + n_y \hat{x}), \quad (\hat{r} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z})$$

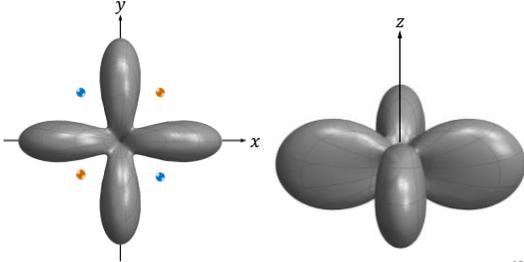
$$\hat{r} \cdot \vec{D} \times \hat{r} = 6QR^2[n_x n_z \hat{x} - n_y n_z \hat{y} + (n_y^2 - n_x^2) \hat{z}]$$

$$\begin{aligned} |\hat{r} \cdot \ddot{\vec{D}} \times \hat{r}|^2 &= 36\omega^4 I_m^2 R^4 [(n_x^2 + n_y^2) n_z^2 + (n_y^2 - n_x^2)^2] \\ &= 36\omega^4 I_m^2 R^4 [\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)^2] \\ &= 36\omega^4 I_m^2 R^4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \sin^2 2\phi) \end{aligned}$$

48

平面电四极子的能流及方向性

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\omega^4 I_m^2 R^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \sin^2 2\phi)$$



49

平面电四极子的辐射功率和辐射电阻

辐射总功率：

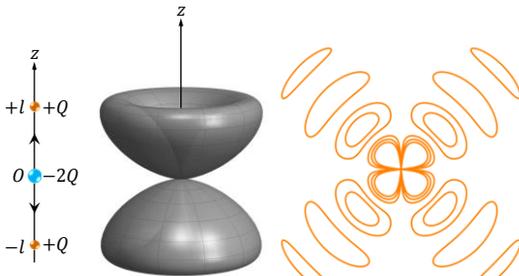
$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \oint |\langle \vec{S} \rangle| r^2 d\Omega \\ &= \frac{\omega^4 I_m^2 R^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta (1 - \sin^2 \theta \sin^2 2\phi) \\ &= \frac{\omega^4 I_m^2 R^4}{20\pi \epsilon_0 c^5} = \frac{4}{5\epsilon_0 c} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 I_m^2 = \frac{4}{5} \pi^3 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 I_m^2 \triangleq \frac{1}{2} R_r I_m^2 \end{aligned}$$

辐射电阻：

$$R_r \triangleq \frac{8\pi^3}{5} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 \approx 1.87 \times 10^4 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 (\Omega)$$

50

【例】计算图示场源的辐射场与辐射功率，其中 $Q = Q_0 e^{-i\omega t}$ 。



51
