CH7. 电磁波的辐射

1

§ 1 推迟势

2

一、波动方程的格林函数

在 Lorenz 规范下，电磁势满足方程：

$$\Box A^{\alpha} = -\mu_0 J^{\alpha}, \quad \partial_{\alpha} A^{\alpha} = 0$$

其中

$$\begin{cases} J^{\alpha} = (J^0, \ \vec{J}) = (\rho c, \ \vec{J}) \\ A^{\alpha} = (A^0, \ \vec{A}) = (\varphi/c, \ \vec{A}) \\ \Box = \partial_{\beta}\partial^{\beta} = \nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \end{cases}$$

- 求解麦克斯韦方程组的关键是求解如下的有源波动方程

$$\Box \psi(x) = -f(x)$$

  - 此方程的一般解是某个特解与齐次波动方程解的叠加。

3

1. 波动方程的格林函数

定义全空间中**波动方程的格林函数** $G(x;y)$：

$$\begin{cases}\Box G(x;y) = -\delta^4(x-y) \\ G(x;y)\Big|_{|\vec{x}-\vec{y}|\to\infty} = 0\end{cases}$$

$x = (ct, \vec{x})$

$y = (ct', \vec{x}')$

- **含义：时空点 y 处的点源在另一时空点 x 处激发的“势”。**
- 知道了 $G(x;y)$，方程 $\Box\psi = -f$ 的一个特解就可以写为

$$\psi(x) = \int G(x;y) f(y) d^4y$$

$d^4y = cdt'd^3x'$

格林函数的对称性

设 K 系中的规范势为

$$\boxed{A^\alpha(x) = \mu_0 \int G(x;y) J^\alpha(y) d^4y}$$

考察变换 $x' = \Lambda x + a$，其中 $\Lambda \in \mathrm{SO}(3,1)$。
K' 系中的规范势必为

$$A'^\alpha(x') = \mu_0 \int G(x';y') J'^\alpha(y') d^4y'$$

$$\begin{cases} A'^\alpha(x') = \Lambda^\alpha{}_\beta A^\beta(x) \\ J'^\alpha(y') = \Lambda^\alpha{}_\beta J^\beta(y) \\ d^4y' = d^4y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{A^\alpha(x) = \mu_0 \int G(x';y') J^\alpha(y) d^4y}$$

将其与 K 系中规范势的表达式比较，得到

$$G(x';y') = G(x;y)$$

结论：在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下

$$G(\Lambda x + a; \Lambda y + a) = G(x;y)$$

- 取 $\Lambda = I$ 以及 $a = -y$，则有 $G(x-y;0) = G(x;y)$。

  无界空间的格林函数只与两时空点的相对位置有关，记

  $$G(x;y) = G(x-y)$$

- 取 $a = 0$，则对 $\forall \Lambda \in \mathrm{SO}(3,1)$，有 $G(\Lambda x) = G(x)$。
  - 对任一转动矩阵 $R \in \mathrm{SO}(3)$，有 $G(t, R\vec{x}) = G(t, \vec{x})$。

  $G(x)$ 只是通过径向距离 $r = |\vec{x}|$ 依赖于空间坐标，即

  $$G(t,\vec{x}) = G(t,r)$$

现在我们只需专注于求解

$$\Box G(x) = -\delta^4(x), \quad G(x)\Big|_{|\vec{x}|\to\infty} = 0$$

其中，$G(x) = G(t,\vec{x}) = G(t,r)$。

- 一旦求得 $G(x)$，做变换 $x \longrightarrow x - y$ 即可获得 $G(x;y)$。
- 从现在起，我们记

$$x = (ct,\vec{x}), \quad y = (ct',\vec{x}')$$

将 $G(x;y)$ 写为 $G(t,\vec{x};t',\vec{x}')$，而 $x \longrightarrow x - y$ 也就可以写为

$$t \longrightarrow t - t', \quad \vec{x} \longrightarrow \vec{x} - \vec{x}'$$

7

2. 傅里叶变换

傅里叶变换

可积函数 $F(x)$ 的傅里叶变换 $\tilde{F}(k)$ 定义为

$$\tilde{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ikx}dx$$

- 这一定义可扩展到分布，其傅里叶变换是另一个分布。
- δ 函数 $\delta_a(x) = \delta(x-a)$ 的傅里叶变换为

$$\tilde{\delta}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)e^{-ikx}dx$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\delta}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ika}$$

8

傅里叶反变换

对于在 ∞ 处足够快衰减的光滑函数 $F(x)$ ，存在傅里叶反变换

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k)e^{ikx}dk$$

- δ 函数可如下得到

$$\delta_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}_a(k)e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ika}e^{ikx}dk$$

含义：对任何光滑函数 f，只要它在远处足够快地衰减，则

$$\delta_a(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ika}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx}f(x)$$

$$\delta_a(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ika}\tilde{f}(-k) = f(a)$$

9

傅里叶变换的导数

设光滑函数 $F(x)$ 在 ∞ 处足够快地趋于零的，则其导数 dF/dx 的傅里叶变换为

$$\widetilde{\frac{dF}{dx}}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dF(x)}{dx}e^{-ikx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)F(x)e^{-ikx}dx$$

$$\Rightarrow\quad \widetilde{\frac{dF}{dx}}(k)=ik\tilde{F}(k)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\ \leftrightarrow\ ik$$

任何常系数偏微分方程都可利用傅里叶变换转化为代数方程。

3. 亥姆霍兹方程的格林函数

格林函数 $G(x)$ 和 $\delta(x^0)$ 对 x^0 的傅立叶变换分别为

$$G_k(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{ikx^0}dx^0,\qquad \tilde{\delta}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

由此，方程 $\Box G(x)=-\delta^4(x)$ 对 x^0 作傅立叶变换，得到

$$\nabla^2G_k(\vec{x})+k^2G_k(\vec{x})=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta^3(\vec{x})$$

即 $G_k(\vec{x})$ 满足非齐次亥姆霍兹方程，符合如下条件的 $G_k(\vec{x})$ 称为全空间中**亥姆霍兹方程的格林函数**：

$$G_k(\vec{x})\Big|_{|\vec{x}|\to\infty}=0$$

亥姆霍兹方程格林函数的物理含义

亥姆霍兹方程的格林函数 $G_k(\vec{x})$ 满足方程

$$\nabla^2G_k(\vec{x})+k^2G_k(\vec{x})=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta^3(\vec{x})$$

令 $\omega=kc$，可将此方程改写为

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[G_k(\vec{x})e^{-i\omega t}\right]=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta^3(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

因此，$G_k(\vec{x})e^{-i\omega t}$ 是存在随时间振荡的如下点源时，这一非齐次波动方程的一个解：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta^3(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

4. 格林函数的求解

亥姆霍兹方程的格林函数

由于 $G_k(\vec{x}) = G_k(r)$，因而在球坐标系中，G_k 的方程可写为

$$\nabla^2 G_k + k^2 G_k = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG_k) + k^2(rG_k)\right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta^3(\vec{x})$$

- 在原点之外的区域（$\vec{x} \neq 0$），G_k 满足的方程简化为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG_k) + k^2(rG_k) = 0$$

$$\Rightarrow \quad G_k = \frac{Ae^{ikr} + Be^{-ikr}}{r}$$

13

- 系数 A, B 可由边界条件（原点处存在一个点源）确定。为此，取一个以原点为中心、半径为 r 的小球，并将 G_k 满足的如下方程在球内 V 积分

$$\nabla^2 G_k + k^2 G_k = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta^3(\vec{x})$$

➢ 对于足够小的 r，$k^2 G_k$ 的体积分为零。因而积分给出

$$\int_V dV\, \nabla^2 G_k = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \Rightarrow \quad \oint_S d\vec{\sigma}\cdot\nabla G_k = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

➢ 对于足够小的 r，$kr \ll 1$，从而 $e^{\pm ikr} \approx 1$。所以得到

$$-4\pi r^2 \cdot \frac{A+B}{r^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \Rightarrow \quad A + B = \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}}$$

14

- 由此，亥姆霍兹方程的格林函数G_k的通解为

$$G_k = a_+ G_k^{(+)} + a_- G_k^{(-)}, \quad (a_+ + a_- = 1)$$

其中

$$\begin{cases} G_k^{(+)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{+ikr}}{4\pi r} \\ G_k^{(-)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{-ikr}}{4\pi r} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_k^{(+)} e^{-i\omega t} \sim \dfrac{1}{r} e^{i(kr-\omega t)} \\ G_k^{(-)} e^{-i\omega t} \sim \dfrac{1}{r} e^{-i(kr+\omega t)} \end{cases}$$

➢ $G_k^{(+)} e^{-i\omega t}$ 描写向外发散的球面波（$r = ct$）

➢ $G_k^{(-)} e^{-i\omega t}$ 描写向内汇聚的球面波（$r = -ct$）

15

波动方程的格林函数

对 $G_k(\vec{x})$ 作傅立叶反变换，即得

$$G(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, G_k(\vec{x}) e^{-ikx^0}$$

它有两个特解

$$G^{(\pm)}(t,\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{e^{-ik(ct\mp r)}}{4\pi r} = \frac{\delta(ct\mp r)}{4\pi r}$$

亦即

$$G^{(\pm)}(t,\vec{x}) = \frac{\delta(t\mp r/c)}{4\pi c r}$$

- 在 $G^{(\pm)}(t,\vec{x})$ 中做替换

$$t \longrightarrow t - t', \quad \vec{x} \longrightarrow \vec{\mathbb{R}} \triangleq \vec{x} - \vec{x}'$$

就得到了波动方程的格林函数

$$G^{(\pm)}(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \frac{\delta(t-t'\mp \mathbb{R}/c)}{4\pi c \mathbb{R}}$$

- 对于达朗贝尔方程 $\square\psi(t,\vec{x}) = -f(t,\vec{x})$ 的特解为

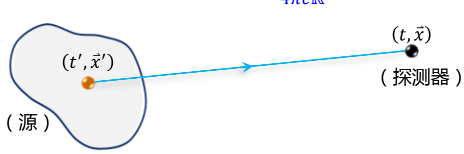
$$\psi^{(\pm)}(t,\vec{x}) = c\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int dV'\, G^{(\pm)}(t,\vec{x};t',\vec{x}') f(t',\vec{x}')$$

$$\Longrightarrow \quad \psi^{(\pm)}(t,\vec{x}) = \int \frac{f(t\mp \mathbb{R}/c,\vec{x}')}{4\pi\mathbb{R}} dV'$$

4. 推迟和超前格林函数

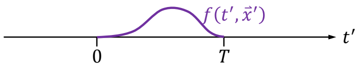
推迟格林函数

$$G^{(+)}(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \frac{\delta(t-t'-\mathbb{R}/c)}{4\pi c\mathbb{R}}$$



- t' 时刻从 $\vec{x}'$ 处的源发出的信号以光速向 $\vec{x}$ 处的观察者传播，并在 t' 之后的 $t = t' + \mathbb{R}/c > t'$ 时刻达到观测者
- 将 $G^{(+)}$ 称为**推迟格林函数**。

- 设源 $f(t',\vec{x}')$ 在时间和空间中都是定域分布的



- 设在 $t\longrightarrow-\infty$ 时，场给定为 $\psi_{\text{in}}(t,\vec{x})$，它满足齐次波动方程。该场在时间和空间中传播
- 接通源后，源产生其特有的场。因而，在任一时刻的场为

$$\psi(t,\vec{x})=\psi_{\text{in}}(t,\vec{x})+c\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int dV'\,G^{(+)}(t,\vec{x};t',\vec{x}')f(t',\vec{x}')$$

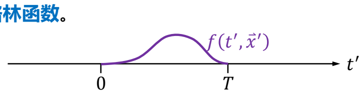
- 在源开始发射之前很久，就有一个初始信号。只有当 t 等于 $t'+|\vec{x}-\vec{x}'|/c$ 时，源才会对 $\vec{x}$ 处的场提供额外的贡献。它对场 ψ 的贡献以适当的方式延迟，因而满足因果律。

19

超前格林函数

$$G^{(-)}(t,\vec{x};t',\vec{x}')=\frac{\delta(t-t'+\mathbb{R}/c)}{4\pi c\mathbb{R}}$$

- 观察者看到效果的时间早于源发射的时间。因而将 $G^{(-)}$ 称为**超前格林函数**。



- 设在 $t\longrightarrow+\infty$ 时，场给定为 $\psi_{\text{out}}(t,\vec{x})$，当 $t\longrightarrow+\infty$ 时它会逐步建立。此情形下的完整解必须具有以下形式

$$\psi(t,\vec{x})=\psi_{\text{out}}(t,\vec{x})+c\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int dV'\,G^{(-)}(t,\vec{x};t',\vec{x}')f(t',\vec{x}')$$

- $G^{(-)}$ 保证了，在切断源之后，场 ψ 不再接受任何贡献（源就不再发出信号），所有信息都包含在 ψ_{out} 中了。

20

- 场既可以用推迟势解表示，场也可以用超前势解表示。没有令人信服的数学理由选择推迟势解或者超前势解。
- 然而，**在无限空间中，物理上不可能指定超前势解所需的最终状态条件。因此，推迟势解总是被用于研究空间局域源在其他位置产生的场：**

$$\psi(t,\vec{x})=\psi_{\text{in}}(t,\vec{x})+c\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int dV'\,G^{(+)}(t,\vec{x};t',\vec{x}')f(t',\vec{x}')$$

$$\boxed{\frac{\delta(t-t'-\mathbb{R}/c)}{4\pi c\mathbb{R}}}$$

右边两项分别表示外场以及源的贡献。

- 对于非齐次波动方程 $\Box\psi=-f$，真正重要的解是

$$\psi(t,\vec{x})=\int\frac{f(t-\mathbb{R}/c,\vec{x}')}{4\pi\mathbb{R}}dV'$$

21

二、推迟势

根据前面的讨论，给定电荷、电流分布激发的电磁势为

$$A^{\alpha}(t,\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J^{\alpha}(t-\mathbb{R}/c,\vec{x}')}{\mathbb{R}}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J^{\alpha}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}dV'$$

称其为**推迟势**。其中 t_r 称为**推迟时间**，其定义为

$$t_r\triangleq t-\mathbb{R}/c$$

- 将推迟标势和矢势分别写出为

$$\begin{cases}\varphi(t,\vec{x})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}dV'\\ \vec{A}(t,\vec{x})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}dV'\end{cases}$$

此处用到 $c^2=1/(\varepsilon_0\mu_0)$。

22

1. 洛伦兹规范条件

可证：**推迟势满足 Lorenz 规范条件。**

$$\begin{aligned}L&=\nabla\cdot\vec{A}(t,\vec{x})+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(t,\vec{x})}{\partial t}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int dV'\,\nabla\cdot\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}+\int dV'\,\frac{1}{\mathbb{R}}\frac{\partial\rho(t_r,\vec{x}')}{\partial t}\right]\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left\{\left[\frac{[\nabla'\cdot\vec{J}(t_r,\vec{x}')]_{t_r}}{\mathbb{R}}-\nabla'\cdot\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]+\frac{1}{\mathbb{R}}\frac{\partial\rho(t_r,\vec{x}')}{\partial t_r}\right\}\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left[\nabla'\cdot\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint d\vec{\sigma}'\cdot\frac{\vec{J}(t_r,\vec{x}')}{\mathbb{R}}\\&=0\end{aligned}$$

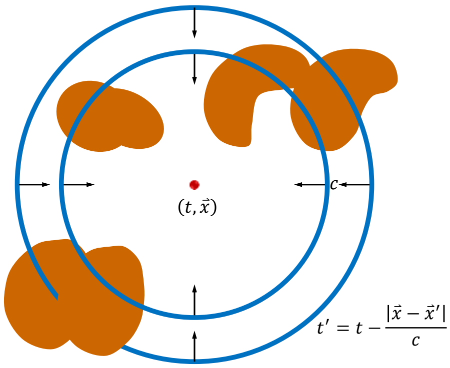
23

2. 推迟势的物理含义

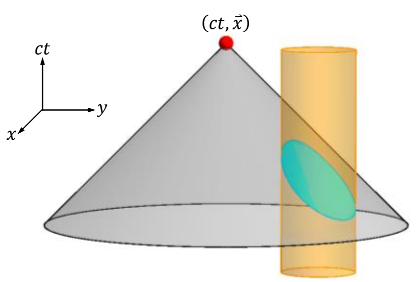
推迟势可视为是通过以下方式产生：

- 考虑一个位于 $\vec{x}$ 处的观测者。将观测者视为被一系列向着 $\vec{x}$ 处以速度 c 收缩的信息收集球面包围。
- 当一个球面经过一个带电的空间区域时，当时（t'）存在的电荷和电流密度除以 $\mathbb{R}$，并加到已经积累的电磁势上。
- 当球面在 t 时到达 $\vec{x}$ 处时，累积电磁势与观察者在该特定时间所经历的电磁势相对应。

24



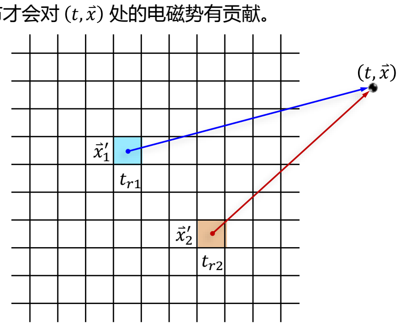
25



只有过去光锥上的源对推迟势有贡献。图中仅显示了2个空间维度，假设源仅在所示的“世界管”中非零。源对推迟势的唯一贡献来自对应于世界管与$(t, \vec{x})$的过去光锥相交的阴影区域。

26

具体计算时，为了求时空点$(t, \vec{x})$处的电磁势，可将整个空间划分为无穷多足够小的格子；对于$\vec{x}'$处的小格子，只有t_r时刻的源分布才会对$(t, \vec{x})$处的电磁势有贡献。

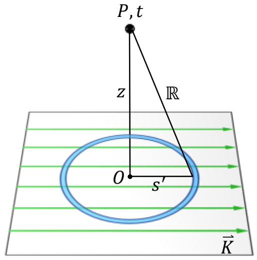


27

【例】 从$t=0$时刻开始，在电中性的xy平面上出现均匀但却随时间变化的面电流，即

$$\vec{K}(t)=\vec{K}_0(t)\Theta(t)$$

试确定该电流分布激发的电磁场。



【解】 标量势为零。矢量势为

$$\vec{A}(t,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot\int_0^\infty s'ds'\,\frac{\vec{K}(t-\mathbb{R}/c)}{\mathbb{R}}$$

由关系 $\mathbb{R}^2=s'^2+z^2$ 求微分可得 $\mathbb{R}d\mathbb{R}=s'ds'$，因而

$$\vec{A}(t,z)=\frac{\mu_0}{2}\int_{|z|}^\infty \vec{K}(t-\mathbb{R}/c)d\mathbb{R}$$

由于当 $t<\mathbb{R}/c$ 时被积函数为零，因此，

$$\vec{A}(t,z)=\frac{\mu_0}{2}\int_{|z|}^{ct}\vec{K}(t-\mathbb{R}/c)d\mathbb{R}=\frac{\mu_0 c}{2}\int_0^{t-|z|/c}\vec{K}(\xi)d\xi$$

- 电场为

$$\vec{E}(t,z)=-\partial_t\vec{A}(t,z)=-\frac{\mu_0 c}{2}\vec{K}\left(t-\frac{|z|}{c}\right)$$

- 由于

$$\vec{B}(t,z)=\nabla\times\vec{A}(t,z)=\nabla z\times\partial_z\vec{A}(t,z)=\hat{z}\times\left[-\frac{1}{c}\frac{\partial|z|}{\partial z}\partial_t\vec{A}(t,z)\right]$$

其中$\partial|z|/\partial z=\mathrm{sgn}(z)$，因而磁场为

$$c\vec{B}(t,z)=-\mathrm{sgn}(z)\,\hat{z}\times\partial_t\vec{A}(t,z)$$

即有

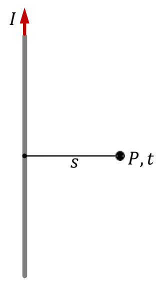
$$c\vec{B}(t,z)=\mathrm{sgn}(z)\,\hat{z}\times\vec{E}(t,z)$$

面电流激发的电磁场平行于 xy 平面，
是背离 xy 平面、沿着 $\pm z$ 方向传播的平面横电磁波。

【思考】 从 $t=0$ 时开始，电中性无限长直导线上出现均匀但却随时间变化的电流

$$I(t) = I_0(t)\Theta(t)$$

- 如果 $I_0(t) = const.$，试确定推迟势和电磁场，并给出 $s \ll ct$ 时的近似解。
- 如果 $I_0(t) = kt$，试确定推迟势和电磁场，并给出 $s \ll ct$ 时的近似解。



31

三、电磁场

下面暂记

$$f_r = f(t_r, \vec{x}'), \quad (t_r \triangleq t - \mathbb{R}/c)$$

由于

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1, \quad \nabla t_r = -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{c}$$

因而 f_r 对时间和空间的导数分别为

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} = \frac{\partial f_r}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\partial f_r}{\partial t_r}, \quad \nabla f_r = \frac{\partial f_r}{\partial t_r}\nabla t_r = -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{c}\frac{\partial f_r}{\partial t_r}$$

若记 $\dot{f}_r \triangleq \partial f_r/\partial t_r$，则上式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t} f_r = \dot{f}_r, \quad \nabla f_r = -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{c}\dot{f}_r$$

32

电场

将推迟势的表达式代入其定义中，即可得电磁场。电场为

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -\nabla\varphi(t,\vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\nabla\frac{\rho_r}{\mathbb{R}}\right)dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{J}_r}{\mathbb{R}}\right)dV'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(-\frac{\rho_r\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} - \frac{\dot{\rho}_r\hat{\mathbb{R}}}{c\mathbb{R}}\right)dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\dot{\vec{J}}_r}{\mathbb{R}}dV'$$

因而

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\rho_r\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} + \frac{\dot{\rho}_r\hat{\mathbb{R}}}{c\mathbb{R}} - \frac{\dot{\vec{J}}_r}{c^2\mathbb{R}}\right)dV'$$

33

磁场

利用电磁势的定义，磁场为

$$\vec{B}(t,\vec{x})=\nabla\times\vec{A}(t,\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla\times\frac{\vec{J}_r}{\mathbb{R}}\right)dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\left(\nabla\frac{1}{\mathbb{R}}\right)\times\vec{J}_r+\frac{1}{\mathbb{R}}\nabla\times\vec{J}_r\right]dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[-\frac{\hat{\mathbb{R}}\times\vec{J}_r}{\mathbb{R}^2}+\frac{1}{\mathbb{R}}\nabla t_r\times\dot{\vec{J}}_r\right]dV'$$

因而

$$\vec{B}(t,\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{\vec{J}_r}{\mathbb{R}^2}+\frac{\dot{\vec{J}}_r}{c\mathbb{R}}\right)\times\hat{\mathbb{R}}\,dV'$$

34

Jefimenko 公式

综上，我们就给出了任意局域电荷、电流分布激发的电磁场

$$\begin{cases}\vec{E}(t,\vec{x})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\left(\frac{\rho_r\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}+\frac{\dot{\rho}_r\hat{\mathbb{R}}}{c\mathbb{R}}-\frac{\dot{\vec{J}}_r}{c^2\mathbb{R}}\right)dV'\\[2ex]\vec{B}(t,\vec{x})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\left(\frac{\vec{J}_r}{\mathbb{R}^2}+\frac{\dot{\vec{J}}_r}{c\mathbb{R}}\right)\times\hat{\mathbb{R}}\,dV'\end{cases}$$

该结论与规范的选取无关，称为 **Jefimenko 公式**。

- 电磁场中 $\sim 1/\mathbb{R}^2$ 的项分别称为库仑场和毕奥-萨伐尔场，而 $\sim 1/\mathbb{R}$ 的项则称为辐射场。
- 体现了麦克斯韦方程组的完备性。
- 反映了源对场的贡献具有推迟效应。

35

四、时变电偶极子

1. 理想电偶极子的电荷、电流分布

静止的理想电偶极子 $\vec{p}$ 在空间任一点 $\vec{x}$ 处激发的静电势为：

$$\varphi(\vec{x})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\quad=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}$$

其电荷体密度可由静电势满足的泊松方程得到：

$$\rho(\vec{x})=-\varepsilon_0\nabla^2\varphi(\vec{x})\quad=\frac{1}{4\pi}\vec{p}\cdot\nabla\left(\nabla^2\frac{1}{r}\right)$$

从而【参考教材习题2.2】

$$\rho(\vec{x})=-\vec{p}\cdot\nabla\delta^3(\vec{x})$$

36

- 原点处随时间变化的理想电偶极子 $\vec{p}(t)$，其电荷体密度为：

$$\rho(t,\vec{x}) = -\vec{p}(t)\cdot\nabla\delta^3(\vec{x})$$

- 由连续性方程

$$\nabla\cdot\vec{J}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}) = \nabla\cdot\frac{\partial}{\partial t}[\vec{p}(t)\delta^3(\vec{x})]$$

可知，时变理想电偶极子 $\vec{p}(t)$ 的体电流密度为：

$$\vec{J}(t,\vec{x}) = \dot{\vec{p}}(t)\delta^3(\vec{x})$$

37

2. 理想电偶极子的电磁势与电磁场

- 理想电偶极子的矢量势为

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\dot{\vec{p}}(t-\mathbb{R}/c)\delta^3(\vec{x}')}{\mathbb{R}}dV' \;= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\dot{\vec{p}}_r}{r}$$

其中 $\vec{p}_r = \vec{p}(t-r/c)$。

- 类似可得标量势（请自行给出）。或根据 Lorenz 规范条件：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -c^2\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{\dot{\vec{p}}_r}{r} \;= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\frac{\vec{p}_r}{r}\right)$$

由此即可给出理想电偶极子的标量势

$$\varphi(t,\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{\vec{p}_r}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}_r\cdot\hat{r}}{r^2}+\frac{\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r}}{cr}\right)$$

38

理想电偶极子的电磁场

我们仅限于讨论原点之外（$r>0$）的电磁场。利用

$$\nabla\frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{3\hat{r}\hat{r}-\overleftrightarrow{I}}{r^3},\quad \nabla\frac{\hat{r}}{r} = -\frac{2\hat{r}\hat{r}-\overleftrightarrow{I}}{r^2}$$

以及

$$\frac{\partial\vec{p}_r}{\partial t} = \dot{\vec{p}}_r,\quad \nabla\vec{p}_r = -\frac{\hat{r}}{c}\dot{\vec{p}}_r$$

不难给出理想电偶极子的电场和磁场分别为：

$$\begin{cases}\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{3(\vec{p}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}_r}{r^3}+\dfrac{3(\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\dot{\vec{p}}_r}{cr^2}+\dfrac{(\ddot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\ddot{\vec{p}}_r}{c^2 r}\right]\\[2ex] \vec{B} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\dfrac{\dot{\vec{p}}_r}{r^2}+\dfrac{\ddot{\vec{p}}_r}{cr}\right)\times\hat{r}\end{cases}$$

39

各场区电磁场的主要特征

$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{3(\vec{p}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}_r}{r^3}+\dfrac{3(\dot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\dot{\vec{p}}_r}{cr^2}+\dfrac{(\ddot{\vec{p}}_r\cdot\hat{r})\hat{r}-\ddot{\vec{p}}_r}{c^2r}\right]\\ \vec{B}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\left(\dfrac{\dot{\vec{p}}_r}{r^2}+\dfrac{\ddot{\vec{p}}_r}{cr}\right)\times\hat{r}\end{cases}$$

如果 τ 是源变化的特征时间，场区可方便地划分为

- **近区（$r\ll c\tau$）**： $E\sim\dfrac{1}{r^3}$， $cB\sim\dfrac{1}{r^2}$ 且 $\dfrac{E}{cB}\sim\dfrac{c\tau}{r}\gg 1$
- **过渡区（$r\sim c\tau$）**：电磁场没有哪项占优。
- **远区（$r\gg c\tau$）**： $E\sim\dfrac{1}{r}$， $cB\sim\dfrac{1}{r}$ 且 $\dfrac{E}{cB}\sim 1$

40

3. 定向电偶极子的能流密度

考察定向电偶极子，$\vec{p}(t)=p(t)\hat{z}$。此时磁场可写为

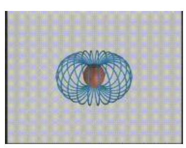
$$\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\left(\frac{\dot{p}_r}{r}+\frac{\ddot{p}_r}{c}\right)\frac{\sin\theta}{r}\hat{\phi}$$

因此，坡印廷矢量 $\vec{S}=\varepsilon_0c^2\vec{E}\times\vec{B}$ 只有 $\hat{r}$ 和 $\hat{\theta}$ 方向的分量：

$$\hat{r}\cdot\vec{S}=\varepsilon_0c^2(\hat{r}\times\vec{E})\cdot\vec{B},\quad \hat{\theta}\cdot\vec{S}=\varepsilon_0c^2(\hat{\theta}\times\vec{E})\cdot\vec{B}$$

其中

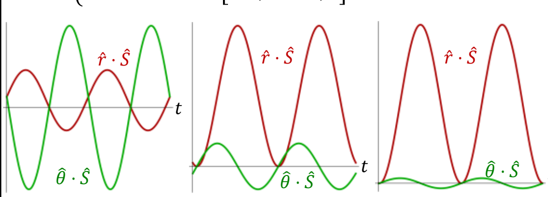
$$\begin{cases}\hat{r}\times\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{p_r}{r^2}+\dfrac{\dot{p}_r}{cr}+\dfrac{\ddot{p}_r}{c^2}\right)\dfrac{\sin\theta}{r}\hat{\phi}\\ \hat{\theta}\times\vec{E}=-\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{p_r}{r}+\dfrac{\dot{p}_r}{c}\right)\dfrac{\cos\theta}{r^2}\hat{\phi}\end{cases}$$



41

由此，经过适当化简后坡印廷矢量的两个非零分量可写为

$$\begin{cases}\hat{r}\cdot\vec{S}=\dfrac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{p_r^2}{2r^3}+\dfrac{p_r\dot{p}_r}{cr^2}+\dfrac{\dot{p}_r^2}{c^2r}\right)+\dfrac{\ddot{p}_r^2}{c^3}\right]\dfrac{\sin^2\theta}{r^2}\\ \hat{\theta}\cdot\vec{S}=-\dfrac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{p_r}{r}+\dfrac{\dot{p}_r}{c}\right)^2\right]\dfrac{\sin 2\theta}{r^3}\end{cases}$$



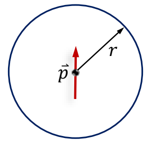
近区　　过渡区　　远区

42

考察以电偶极子所在处为球心、半径为 r 的球面。

单位时间由该球面流出去的电磁场能量为

$$\frac{dW}{dt} = \oint \vec{S}\cdot d\vec{\sigma} = \oint S_r r^2 d\Omega$$



将前面的结果代入，积分给出

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{p_r^2}{2r^3} + \frac{p_r\dot{p}_r}{cr^2} + \frac{\dot{p}_r^2}{c^2 r}\right) + \frac{\ddot{p}_r^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- 如果 $\vec{p}$ 随时间周期性变化，那么，将上式对时间在一个周期内积分，全导数项对 dW/dt 的贡献为零。
  - 如果 $\vec{p}(t)$ 仅在 $t \in [0, T]$ 范围内不为零，则上式对时间在 $[0, T]$ 范围内的积分也仅有第二项有贡献。

43