§3 磁标势

一、概述

当空间中存在介质时，静磁场的基本方程为

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f,\quad \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

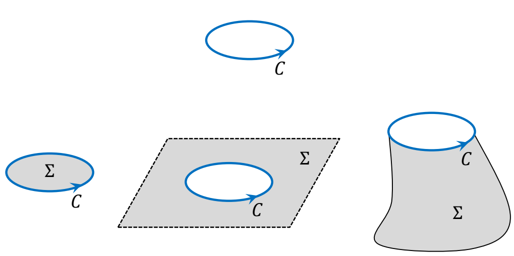
- 如果全空间皆无传导电流（例如永磁体），则

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{x})=0,\quad (\forall\vec{x})$$

此情形下，**H** 矢量可以用标量势 ψ 描述，称为**磁标势**：

$$\vec{H}(\vec{x})=-\nabla\psi(\vec{x})$$

- 如果空间中有传导电流，尽管在挖去传导电流的区域 V 内 $\vec{H}$ 无旋，但是，为了能用单值磁标势描述场，我们还应要求 V 是单连通的。



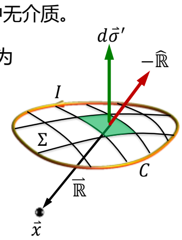
全空间挖去以载流线圈为边界的曲面后，仍是一个单连通区域。

二、传导电流的场

下面以载流线圈激发的磁场为例，说明用磁标势描述传导电流激发的磁场的可能性及其条件。设空间中无介质。

由 BSL 定律知，载流线圈激发的 **H** 矢量为

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} = \frac{I}{4\pi}\oint_C d\vec{l}' \times \frac{\widehat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$



利用 Stokes 定理可得：

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi}\int_\Sigma (d\vec{\sigma}' \times \nabla') \times \frac{\widehat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

$$= \frac{I}{4\pi}\int_\Sigma \left[\left(\nabla' \frac{\widehat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right)\cdot d\vec{\sigma}' - \left(\nabla' \cdot \frac{\widehat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right) d\vec{\sigma}'\right]$$

4

由此得到

$$\vec{H}(\vec{x}) = \nabla\left[\frac{I}{4\pi}\int_\Sigma \frac{-\widehat{\mathbb{R}}\cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}\right] + I\int_\Sigma \delta(\vec{x}-\vec{x}')d\vec{\sigma}'$$

其中，Σ 是载流线圈所围的任一指定曲面。

如果场点 $\vec{x}$ 不在所选曲面 Σ 上，则上式第二个积分为零，此时 **H** 矢量可以用标量势描述。

为了用磁标势描述传导电流激发的 H 矢量，解域 V 应是不包含传电流的单连通区域。

5

- 曲面 Σ 相对于场点 $\vec{x}$ 所张立体角：

$$\Omega(\vec{x}) = \int_\Sigma \frac{-\widehat{\mathbb{R}}\cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}$$

- 磁标势：

$$\psi(\vec{x}) \triangleq -\frac{I}{4\pi}\Omega(\vec{x})$$

- **H** 矢量：

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\nabla\psi(\vec{x})$$

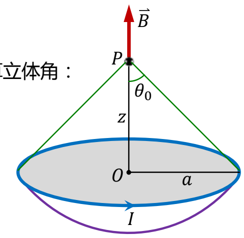
- 磁感应强度：

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega(\vec{x})$$

6

【例】圆环电流轴线上的磁场。

【解】取以圆环为边界的球冠计算立体角：



$$\Omega(z) = -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin\theta \, d\theta$$

$$= -2\pi(1-\cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow \quad \Omega(z) = -2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

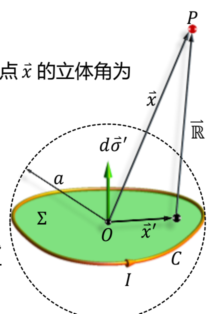
由于对称轴上的 $\vec{B}$ 平行于对称轴，因而

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\Omega}{dz}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

7

【例】小载流线圈在远处的场。

【解】载流线圈所围曲面相对于场点 $\vec{x}$ 的立体角为



$$\Omega(\vec{x}) = \int_\Sigma \frac{-\hat{\mathbb{R}}\cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}$$

由于 $r \gg a$，因而

$$\vec{\mathbb{R}} = \vec{x} - \vec{x}' \approx \vec{x} = r\hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega(\vec{x}) \approx -\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\int_\Sigma d\vec{\sigma}' = -\frac{\vec{\Sigma}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(\vec{x}) = -\frac{I}{4\pi}\Omega(\vec{x}) = \frac{\vec{m}\cdot\hat{r}}{4\pi r^2}, \quad (r \gg a)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{x}) = -\mu_0\nabla\psi(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}], \quad (r \gg a)$$

8

三、磁化电流的场

如果介质的磁化状态（即 $\vec{M}$）已知，则磁化电流分布为

$$\vec{J}' = \nabla\times\vec{M}, \quad \vec{K}' = \hat{n}\times\left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1\right)$$

而磁化电流激发的场满足方程

$$\nabla\times\vec{H} = 0, \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$$

- 利用 **H** 矢量的定义，可将场方程改写为

$$\nabla\times\vec{H} = 0, \quad \nabla\cdot\vec{H} = -\nabla\cdot\vec{M} \triangleq \rho^*$$

在介质界面上，场方程写为边值关系：

$$\hat{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = 0, \quad \hat{n}\cdot\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right) = \hat{n}\cdot\left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right) \triangleq \sigma^*$$

9

● 由于 **H** 矢量在全空间每一点皆无旋，故可用磁标势描述之：

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\nabla\psi(\vec{x}), \quad (\forall\vec{x})$$

● 在均匀介质内，磁标势满足 Poisson 方程

$$\nabla^2\psi = \nabla\cdot\vec{M} = -\rho^*$$

在介质界面上，ψ 满足边值关系：

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \hat{n}\cdot(\vec{M}_1 - \vec{M}_2) = \sigma^*$$

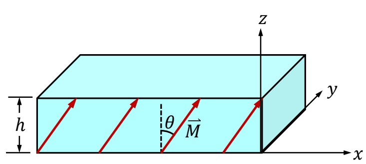
● 一旦求解出磁标势，**H** 矢量就知道了，而磁感应强度则为：

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

10

【例】厚为 h 的无限大磁介质板被均匀磁化，试求磁化电流产生的磁场 $\vec{B}$。已知磁化强度为

$$\vec{M} = M(\hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta)$$



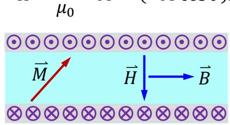
11

电流观点

$$\begin{cases} \vec{K}_1' = +\vec{M}\times\hat{z} = (-M\sin\theta)\hat{y} \triangleq -\vec{K}' \\ \vec{K}_2' = -\vec{M}\times\hat{z} = (+M\sin\theta)\hat{y} \triangleq +\vec{K}' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{B} = \mu_0\vec{K}'\times\hat{z} = (\mu_0 M\sin\theta)\hat{x}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = (-M\cos\theta)\hat{z}$$



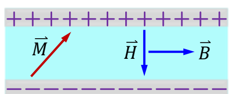
12

磁荷观点

$$\begin{cases}\sigma_1^* = +\vec{M}\cdot\hat{z} = +M\cos\theta \triangleq +\sigma^* \\ \sigma_2^* = -\vec{M}\cdot\hat{z} = -M\cos\theta \triangleq -\sigma^*\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{H} = -\sigma^*\hat{z} = (-M\cos\theta)\hat{z}$$

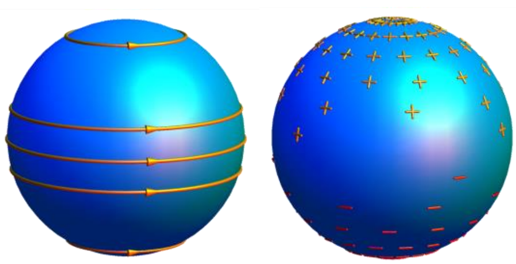
$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) = (\mu_0 M\sin\theta)\hat{x}$$



13

【例】 求半径为 R、均匀磁化介质球产生的磁场 $\vec{B}$。已知

$$\vec{M} = M\hat{z}$$



$\vec{K}' = \vec{M}\times\hat{r} = (M\sin\theta)\hat{\phi}$ $\qquad$ $\sigma^* = \vec{M}\cdot\hat{r} = M\cos\theta$

14

【解】 球内、球外的磁标势 ψ_1 和 ψ_2 均满足 Laplace 方程，而在界面处（$r = R$）则满足边值关系：

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \hat{r}\cdot\vec{M} = M\cos\theta$$

由对称性，拉普拉斯方程在球坐标系下的一般解为

$$\psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

根据边值关系的特点，不妨设

$$\psi_1 = A\frac{r}{R}\cos\theta, \quad \psi_2 = A\frac{R^2}{r^2}\cos\theta$$

如此磁标势自动连续，而由第二个边值关系易得

$$A = \frac{1}{3}MR$$

15

将 A 代入磁标势的表达式，得到

$$\psi_1 = \frac{1}{3}\vec{M}\cdot\vec{x}, \quad \psi_2 = \left(\frac{1}{3}\vec{M}\cdot\vec{x}\right)\frac{R^3}{r^3} = \frac{\vec{m}\cdot\hat{r}}{4\pi r^2}$$

其中，$\vec{m}$ 是介质球的总磁矩

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\vec{M}$$

H 矢量为

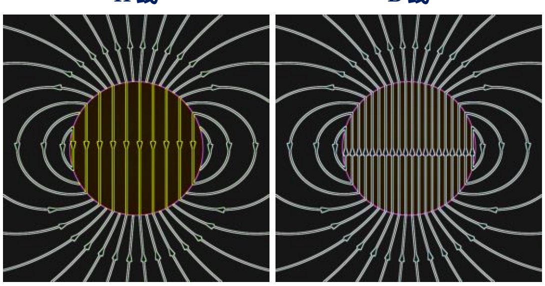
$$\vec{H}_1 = -\nabla\psi_1 = -\frac{1}{3}\vec{M}, \quad \vec{H}_2 = -\nabla\psi_2 = \frac{1}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}]$$

磁感应强度为

$$\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}, \quad \vec{B}_2 = \mu_0\vec{H}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}]$$

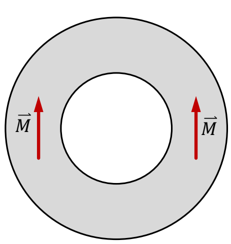
16

H 线 **B 线**



17

【思考】求内外半径分别为 a 和 b 的均匀磁化介质球壳产生的磁场 $\vec{B}$。已知磁化强度为 $\vec{M}$。

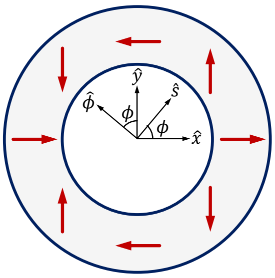


18

【思考】内外半径分别为a、b的无限长磁化柱壳，磁化强度为

$$\vec{M} = M(\hat{s}\cos\phi + \hat{\phi}\sin\phi) = M(\hat{x}\cos 2\phi + \hat{y}\sin 2\phi)$$

试求磁标势以及磁感应强度的空间分布。



19

四、简单介质情形下的总场

当空间中分布有简单介质时，**在不含传导电流的区域**，磁场满足方程

$$\nabla \times \vec{H} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B}(\vec{x}) = \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x})$$

- 利用本构关系，在均匀介质内部，**H** 矢量满足方程：

$$\nabla \times \vec{H} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

在介质界面上，场方程写为边值关系：

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0, \quad \hat{n} \cdot (\mu_2\vec{H}_2 - \mu_1\vec{H}_1) = 0$$

20

- 在不含传导电流的单连通区域 V 内，**H** 矢量可用磁标势描述：

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\nabla\psi(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in V)$$

- 在均匀介质内，磁标势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\psi = 0$$

在介质界面上，ψ 满足边值关系：

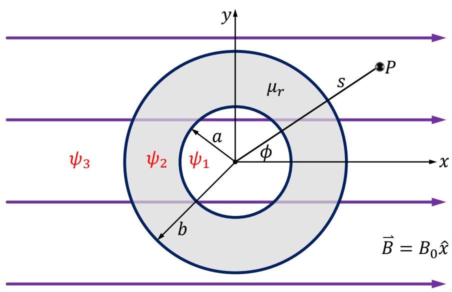
$$\psi_1 = \psi_2, \quad \mu_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n} = \mu_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n}$$

- 一旦求解出磁标势，**H** 矢量就知道了，而磁感应强度则为：

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

21

【例】 内、外半径分别为 a 和 b 的无限长磁介质柱壳处在均匀外磁场 $\vec{B}_0$ 中，$\vec{B}_0$ 垂直于柱壳轴线（设为 z 轴）。已知介质的相对磁导率为 μ_r。试求空腔内的磁场。



22

【解】 本问题中 $\phi\in[0,2\pi]$，故磁标势的单值性要求一般解为：

$$\psi=(a_0+b_0\ln s)+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m s^m+b_m s^{-m})(c_m\cos m\phi+d_m\sin m\phi)$$

设壳内、壳中、壳外的磁标势分别为 ψ_1、ψ_2 和ψ_3。用以定解的边界条件包含

（1）边值关系：
$$\begin{cases} s=a: \quad \psi_2=\psi_1, \quad \mu_r\dfrac{\partial\psi_2}{\partial s}=\dfrac{\partial\psi_1}{\partial s} \\ s=b: \quad \psi_2=\psi_3, \quad \mu_r\dfrac{\partial\psi_2}{\partial s}=\dfrac{\partial\psi_3}{\partial s} \end{cases}$$

（2）ψ_1 的有限性

（3）ψ_3 的渐近条件：$\psi_3\longrightarrow -\vec{H}_0\cdot\vec{x}=-\dfrac{B_0}{\mu_0}s\cos\phi$，$(s\longrightarrow\infty)$

23

根据此渐近条件的特点，不妨设：

$$\begin{cases} \psi_1=A\dfrac{s}{a}\cos\phi \\ \psi_2=\left(C_1\dfrac{s}{a}+C_2\dfrac{a}{s}\right)\cos\phi \\ \psi_3=-\dfrac{B_0}{\mu_0}s\cos\phi+D\dfrac{b}{s}\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_s\psi_1=\dfrac{A}{a}\cos\phi \\ \partial_s\psi_2=\left(\dfrac{C_1}{a}-\dfrac{C_2 a}{s^2}\right)\cos\phi \\ \partial_s\psi_3=-\left(\dfrac{B_0}{\mu_0}+\dfrac{Db}{s^2}\right)\cos\phi \end{cases}$$

由 $s=a$ 处的边值关系可得：

$$C_1=\frac{\mu_r+1}{2\mu_r}A,\quad C_2=\frac{\mu_r-1}{2\mu_r}A$$

而由 $s=b$ 处的边值关系则可得：

$$C_1\frac{b}{a}+C_2\frac{a}{b}=-\frac{B_0}{\mu_0}b+D,\quad \mu_r\left(C_1\frac{b}{a}-C_2\frac{a}{b}\right)=-\frac{B_0}{\mu_0}b-D$$

24

由此可得：

$$A=-\frac{4\mu_r a B_0/\mu_0}{(\mu_r+1)^2-(\mu_r-1)^2(a^2/b^2)}$$

因而，壳内的磁标势为：$\psi_1=A\frac{s}{a}\cos\phi=\frac{A}{a}x$

而壳内的磁感应强度为：

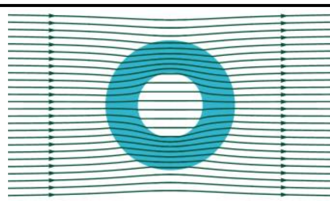
$$\vec{B}_1=-\mu_0\nabla\psi_1=-\frac{\mu_0 A}{a}\hat{x}=\frac{4\mu_r}{(\mu_r+1)^2-(\mu_r-1)^2(a^2/b^2)}\vec{B}_0$$

$$\xrightarrow{\mu_r\gg 1}\quad \vec{B}\approx\frac{1}{1-a^2/b^2}\frac{4\vec{B}_0}{\mu_r}\quad\xrightarrow{b\gg a}\quad \vec{B}\approx\frac{4\vec{B}_0}{\mu_r}$$

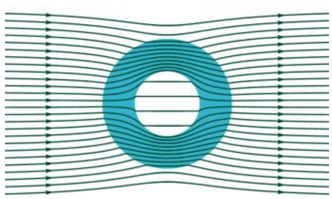
磁导率越大、壳壁越厚，屏蔽效果越好。

25

$b=2a,\quad \mu_r=2$

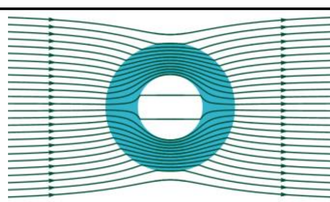


$b=2a,\quad \mu_r=5$

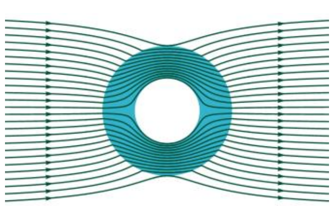


26

$b=2a,\quad \mu_r=10$



$b=2a,\quad \mu_r=50$



27