CH6 静磁场

§1 静磁场的基本规律

§2 静磁场的多极展开

§3 磁标势

1

§1 静磁场的基本规律

2

一、静磁场的基本方程

- 静磁场的基本方程为

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

  - 激发静磁场的电流必然是稳恒电流：$\nabla\cdot\vec{J}=0$

- 静磁场的基本方程也可等价地用磁矢势表示为

$$\nabla^2\vec{A}-\nabla(\nabla\cdot\vec{A})=-\mu_0\vec{J}$$

  - 在库仑规范下，磁矢势满足方程

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J},\quad \nabla\cdot\vec{A}=0$$

即 $\vec{A}$ 的每一个笛卡尔分量都满足**泊松方程**。

3

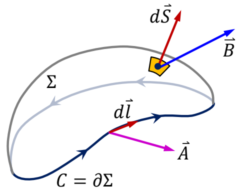
1. 磁场与磁矢势

磁场与磁矢势满足关系：

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x})$$

即有

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$



- 描述同一磁场的磁矢势由规范变换相联系

$$\vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \nabla\psi(\vec{x})$$

- **$\vec{B}$ 为轴矢量，$\vec{A}$ 为极矢量。**

4

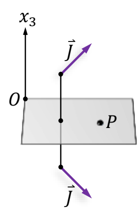
对称平面上的磁场与磁矢势

设 $x_3 = 0$ 平面是电流分布的对称平面，即

$$J_1(\vec{x}') = J_1(\vec{x}), \quad J_2(\vec{x}') = J_2(\vec{x}), \quad J_3(\vec{x}') = -J_3(\vec{x})$$

其中

$$\vec{x}' = (x_1', x_2', x_3') = (x_1, x_2, -x_3)$$



下面考察在正交变换 $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}'$ 下，对称平面上任一点 P 处 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的变换规律。

【注意】 P点的坐标满足 $\vec{x}' = \vec{x}$。

5

- 由于 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 分别为极矢量和轴矢量，因而

$$\begin{cases} A_1' = +A_1, \quad A_2' = +A_2, \quad A_3' = -A_3 \\ B_1' = -B_1, \quad B_2' = -B_2, \quad B_3' = +B_3 \end{cases}$$

- 而 $x_3 = 0$ 是电流分布的对称平面，又意味着

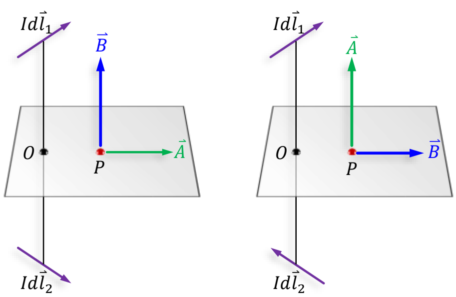
$$\begin{cases} A_1' = +A_1, \quad A_2' = +A_2, \quad A_3' = +A_3 \\ B_1' = +B_1, \quad B_2' = +B_2, \quad B_3' = +B_3 \end{cases}$$

- 因此，对称平面上的 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 必满足

$$A_3 = 0, \quad B_1' = B_2' = 0$$

在电流分布的对称平面上，
$\vec{A}$ 没有法向分量，而 $\vec{B}$ 只有法向分量。

6



7

边值关系

- 在面电流附近，场方程可写为边值关系的形式：

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0,\quad \hat{n}\times\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=\mu_0\vec{K}$$

- 在库仑规范下，磁矢势的边值关系为：

$$\vec{A}_2=\vec{A}_1,\quad \hat{n}\times\left(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1\right)=\mu_0\vec{K}$$

  - $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 意味着 $\vec{A}$ 的切向分量连续。
  - $\nabla\cdot\vec{A}=0$ 意味着 $\vec{A}$ 的法向分量连续。

8

局域电流分布的磁矢势

对局域电流分布，类比静电势，不难看出如下 $\vec{A}$ 满足泊松方程

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

- 上式给出的 $\vec{A}(\vec{x})$ 确实满足库仑规范条件 $\nabla\cdot\vec{A}=0$。

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{A}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]+\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int d\vec{\sigma}'\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{0}{\mathbb{R}}=0\end{aligned}$$

9

局域电流分布的磁场

利用前面得到的磁矢势表达式可得，局域电流激发的磁场为

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla\frac{1}{\mathbb{R}}\times\vec{J}(\vec{x}')$$

由此就给出了**BSL定律**：

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

- 这一结论也可直接由亥姆霍兹定理得到。

10

【例】试求截面均匀的无限长密绕螺线管的磁感应强度。设单位长度线圈的匝数为 n，每匝线圈中的电流强度为 I。

【解】由对称性，空间任一点 $\vec{r}$ 处的 $\vec{B}$ 都平行于 z 轴。而根据BSL定律，$\vec{r}$ 处 $\vec{B}$ 的 z 分量为（其中 $\vec{K}=n\vec{I}$）：

$$B=\hat{z}\cdot\vec{B}=\hat{z}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{\vec{K}\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}d\sigma'$$

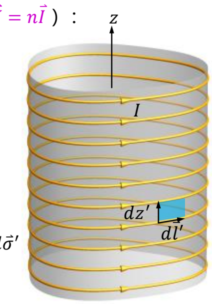
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{\left(\hat{z}\times\vec{K}\right)\cdot\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}d\sigma'$$

其中 $d\sigma'=dz'dl'$，而 $\vec{K}\parallel d\vec{l}'$，因而

$$\left(\hat{z}\times\vec{K}\right)d\sigma'=\left(\hat{z}\times\vec{K}\right)dz'dl'$$

$$=K\left(\hat{z}dz'\times d\vec{l}'\right)=-Kd\vec{\sigma}'$$

此处，$d\vec{\sigma}'$ 指向螺线管外部。



将结果代入 B 的表达式给出

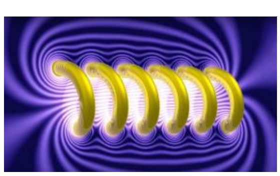
$$B=\frac{\mu_0K}{4\pi}\iint\frac{-\hat{\mathbb{R}}\cdot d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}^2}=\frac{\mu_0K}{4\pi}\iint d\Omega=\frac{\mu_0K}{4\pi}\Omega$$

其中 Ω 是螺线管相对于场点 $\vec{r}$ 所张立体角：

当 $\vec{r}$ 在螺线管内时，$\Omega=4\pi$；

当 $\vec{r}$ 在螺线管外时，$\Omega=0$。

$$\begin{cases}\vec{B}_{内}=\mu_0K\hat{z}=\mu_0nI\hat{z}\\ \vec{B}_{外}=0\end{cases}$$



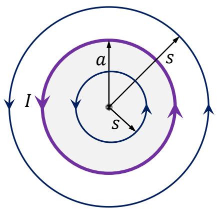
12

【例】试求无限长圆截面螺线管的矢量势。

【解】由对称性知 $\vec{A}=A(s)\hat{\phi}$。设螺线管内、外的磁矢势分别为 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$。取如图所示半径为 s 的圆形回路，由于

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}=A\cdot 2\pi s$$

$$\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\begin{cases}\mu_0 nI\cdot\pi s^2, & s<a\\ \mu_0 nI\cdot\pi a^2, & s>a\end{cases}$$



所以

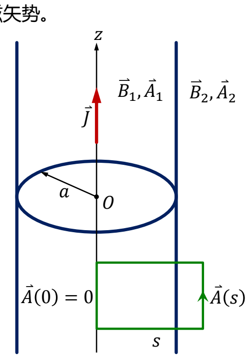
$$\begin{cases}A_1=\dfrac{1}{2}\mu_0 nIs, & s<a\\ A_2=\dfrac{1}{2}\mu_0 nI\dfrac{a^2}{s}, & s>a\end{cases}$$

不存在使得螺线管外的磁矢势为零规范变换。

【例】计算无限长均匀柱电流的磁矢势。

【解】由安培环路定律可得

$$\begin{cases}\vec{B}_1=\dfrac{\mu_0 Is}{2\pi a^2}\hat{\phi}, & (s<a)\\ \vec{B}_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}, & (s>a)\end{cases}$$



由对称性知 $\vec{A}=A(s)\hat{z}$ ，从而

$$\nabla\times\vec{A}=[\nabla A(s)]\times\hat{z}=-\frac{dA}{ds}\hat{\phi}$$

将磁场 $\vec{B}$ 的表达式代入 $\vec{A}$ 的定义 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 中，得到

$$\frac{dA_1}{ds}=-\frac{\mu_0 Is}{2\pi a^2},\quad \frac{dA_2}{ds}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

积分得到

$$A_1=-\frac{\mu_0 Is^2}{4\pi a^2}+C_1,\quad A_2=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln s+C_2$$

不妨取 $C_1=0$，而由 $s\longrightarrow a$ 时 $A_2=A_1$ 得到

$$C_2=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}(1-2\ln a)$$

因此

$$A_1=-\frac{\mu_0 Is^2}{4\pi a^2},\quad A_2=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1+2\ln\frac{s}{a}\right)$$

2. 存在介质时的基本方程

当空间中存在简单介质时，静电场的基本方程为

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f,\quad \vec{B}(\vec{x})=\mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x})$$

其中，$\vec{H}\triangleq\vec{B}/\mu_0-\vec{M}$。

- 在介质交界面处，场方程表现为边值关系：

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0,\quad \hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{K}_f$$

- 静磁场仍可用磁矢势描述：

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

16

二、磁能

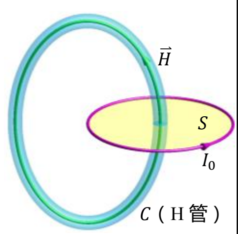
假设初始时空间中无传导电流，而磁介质已经存在且固定于给定位置。在建立传导电流或磁场过程中外界需要做多大的功？

- 考察某载流线圈。
  - 沿着H线，安培环路定理写为

$$I_0=\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\oint_C Hdl$$

  - 穿过电流所围曲面的磁通量为

$$\Phi=\iint_\Sigma\vec{B}\cdot d\vec{\sigma}=\iint_\Sigma Bd\sigma_\perp$$



穿过 $d\vec{\sigma}$ 的磁通量等于穿过 H 管任一截面的磁通量。

17

磁化功

在 dt 时间内，电流变化导致磁场由 B 变为了$B+\delta B$，因而，电源抵抗感应电动势做功为

$$\delta A=-I_0\mathcal{E}dt=I_0d\Phi=\oint_C Hdl\cdot\iint_S\delta Bd\sigma_\perp=\iiint\vec{H}\cdot\delta\vec{B}dV$$

电源由于做功而在空间单位体积内消耗的能量为：

$$\delta a=\vec{H}\cdot\delta\vec{B}$$

利用$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$，可将其写为

$$\delta a=\mu_0\vec{H}\cdot\delta\vec{H}+\mu_0\vec{H}\cdot\delta\vec{M}$$

$$=\underbrace{\delta\left(\frac{1}{2}\mu_0H^2\right)}_{\text{宏观磁能密度}}+\underbrace{\mu_0\vec{H}\cdot\delta\vec{M}}_{\text{磁化功密度}}$$

18

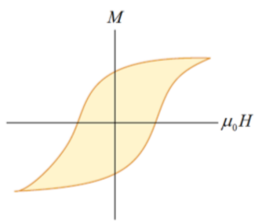
非线性损耗介质

对铁磁质，磁滞回线显示 H 与 M 的关系是非线性、非单值的。

沿电滞回线循环一周外界对单位体积介质所做的功为

$$a' = \oint \delta a' = \oint \mu_0 \vec{H} \cdot \delta \vec{M}$$

=磁滞回线所围面积



这部分能量既不改变电场的能量，又不改变介质的极化状态，而是转化为热能，称为**电滞损耗**。

线性无损耗介质

对于简单介质（线性、各向同性），本构方程为

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m(\vec{r})\vec{H}(\vec{r})$$

因而

$$\vec{H} \cdot \delta\vec{M} = \vec{H} \cdot \delta(\chi_m \vec{H}) = (\chi_m \vec{H}) \cdot \delta\vec{H} = \vec{M} \cdot \delta\vec{H}$$

即可将磁化功密度写为

$$\mu_0 \vec{H} \cdot \delta\vec{M} = \frac{1}{2}\mu_0(\vec{H} \cdot \delta\vec{M} + \vec{M} \cdot \delta\vec{H}) = \delta\left(\frac{1}{2}\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M}\right)$$

- 对于简单介质，磁化功与过程无关。
  - 此结论对于线性、各向异性介质也成立。

- 对于简单介质，建立传导电流的过程中，外界抵抗感应电动势做的功与过程无关

$$\delta a = \vec{H} \cdot \delta\vec{B} = \delta\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M}\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \delta A = \iiint \delta\left(\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}\right) dV = \delta \iiint \left(\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}\right) dV$$

传导电流或磁场建立过程中外界抵抗感应电动势做的总功为

$$A = \iiint \left(\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}\right) dV$$

- 外界做功转化为场的能量，**磁场的能量** W 和**能量密度** w 为

$$W = \iiint w dV = \iiint \left(\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}\right) dV, \quad \left(w \triangleq \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}\right)$$

1. 用电流表示的静磁能

利用 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$，静磁能可以表示为（积分在全空间进行）

$$W = \frac{1}{2}\iiint \vec{B}\cdot\vec{H}dV = \frac{1}{2}\iiint(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}dV$$

$$= \frac{1}{2}\iiint[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + (\nabla\times\vec{H})\cdot\vec{A}]dV$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\oint d\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})} + \frac{1}{2}\int\vec{J}_f\cdot\vec{A}dV$$

由于当 $r\longrightarrow\infty$ 时有 $\vec{A}\sim 1/r$ 以及 $\vec{B}\sim 1/r^2$，因此

$$W = \frac{1}{2}\int\vec{J}_f\cdot\vec{A}dV$$

可以认为静磁能是属于传导电流的。

22

2. 载流线圈系统的静磁能

对于载流线圈系统。设 I_k 是线圈 C_k 的电流强度，则总磁能为

$$W = \frac{1}{2}\int\vec{J}\cdot\vec{A}dV = \frac{1}{2}\int\vec{A}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}\sum_i I_i\oint_{C_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

因此

$$W = \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$

其中，**Φ_i 是穿过线圈 $C_i = \partial\Sigma_i$ 的总磁通量**

$$\Phi_i = \int_{\Sigma_i}\vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = \oint_{C_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

23

- 由于穿过线圈 C_i 的磁通量与各线圈电流满足线性关系

$$\Phi_i = \sum_j M_{ij}I_j$$

这里，$M_{ij} = M_{ji}$称为**感应系数**：对角元$L_i = M_{ii}$称为**自感系数**；非对角元$M_{i\neq j}$则称为**互感系数**。因而，载流线圈系统的总磁能可以写为

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j}M_{ij}I_iI_j$$

或将其写为

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i L_iI_i^2}_{\text{自感磁能}} + \underbrace{\sum_{i<j}M_{ij}I_iI_j}_{\text{互感磁能}}$$

24

3. 电流在外场中的磁能

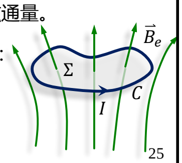
对于两个载流线圈构成的系统，总磁能为

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

- 称 $W_{12} = M I_1 I_2$ 为两带电体之间的**互能**。
- 若将线圈1视为研究对象，而将线圈2视为外部，则也称 $W_{12} = M I_1 I_2$ 为线圈1在外场中的磁能。
  - ➢ $M I_2$ 是线圈2激发的磁场穿过线圈1的磁通量。
- **一般地，载流线圈在外场 $\vec{B}_e$ 中的磁能**为：

$$W_e = I\Phi_e$$

  - ➢ Φ_e是外磁场穿过线圈C的磁通量。



25

- 由于

$$\Phi_e = \int_\Sigma \vec{B}_e \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{A}_e \cdot d\vec{l}$$

因而也可将 W_e 写为

$$W_e = I\oint_C \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{A}_e \cdot d\vec{I}$$

- 由此可得，**电流分布 $\vec{J}$ 处在外磁场 $\vec{B}_e$ 中的磁能**为

$$W_e = \int \vec{A}_e \cdot d\vec{I} = \int \vec{J} \cdot \vec{A}_e dV$$

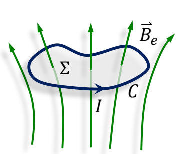
26

4. 载流线圈受到的安培力

处在外磁场 $\vec{B}_e$ 中的载流线圈 C，其受到的安培力可以写为

$$\vec{F} = I\oint_C d\vec{l} \times \vec{B}_e = I\iint_\Sigma (d\vec{\sigma} \times \nabla) \times \vec{B}_e$$

$$= I\iint_\Sigma (\nabla \vec{B}_e) \cdot d\vec{\sigma} - \boxed{I\iint_\Sigma (\nabla \cdot \vec{B}_e) d\vec{\sigma}}$$



即安培力可以写为

$$\vec{F} = I\nabla\Phi_e = \nabla W_e \qquad \text{安培力指向磁通量增加最快的方向}$$

【注】一般电流分布受到的安培力仍可写为 $\vec{F} = \nabla W_e$，其中

$$W_e = \int \vec{A}_e \cdot d\vec{I} = \int \vec{J} \cdot \vec{A}_e dV$$

27

电流的力学势能

将电流分布受到的安培力写为

$$\vec{F} = -\nabla U$$

其中 $U = -W_e$ 称为该电流分布处在外场中的**力学势能**。即有

$$U(\vec{x}) \triangleq -\int_{\infty}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

【物理含义】维持电流不变的情形下，在外场 $\vec{B}_e$ 中移动电流，外界抵抗安培力所做的功即是该电流分布的力学势能。

28

【例】两个彼此相距无穷远的线圈 C_1 和 C_2，分别载有电流 I_1 和 I_2。维持两线圈电流不变，将两线圈分别无限缓慢地移至给定位置，此过程中外界需要抵抗什么力做功？分别做多大的功？

【解】将线圈1移至给定位置，外界无需做功。维持两线圈电流不变，并维持线圈1在给定位置不动，将线圈2移至给定位置，外界需要抵抗如下的力做功：

- 线圈1上的感生电动势：$A_{感} = \int_0^{\infty} I_1 \frac{d(MI_2)}{dt} dt \quad = MI_1I_2$
- 线圈2上的动生电动势：$A_{动} = \int_0^{\infty} I_2 \frac{d(MI_1)}{dt} dt \quad = MI_1I_2$
- 线圈2上的安培力：$A_{安} = -\int_0^{\infty} I_2 \frac{d(MI_1)}{dt} dt \ = -MI_1I_2$

29

5. 麦克斯韦应力张量

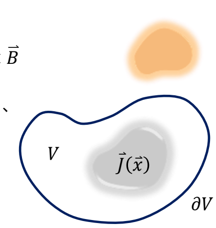
在静磁情形下，**动量流密度张量**写为

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2 \overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 c^2 \vec{B}\vec{B} = w\left(\overleftrightarrow{I} - 2\hat{B}\hat{B}\right)$$

为了求某个载流导体受到的安培力

$$\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) dV = \int d\vec{I} \times \vec{B}$$

可任选一个将该载流导体包含在内、且不含其它电流的区域V，则有：

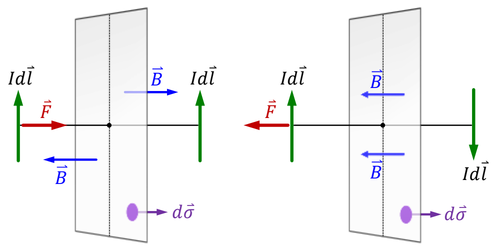


$$\vec{F} = -\oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{T}$$

$$= +\oint_{\partial V} w\left[2\hat{B}\left(\hat{B} \cdot d\vec{\sigma}\right) - d\vec{\sigma}\right]$$

30

$$\vec{F} = -\oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{T} = +\oint_{\partial V} w\left[2\hat{B}\left(\hat{B} \cdot d\vec{\sigma}\right) - d\vec{\sigma}\right]$$



31

§2 静磁场的多极展开

32

一、关于局域电流的推论

为了后面的应用，首先给出关于局域电流分布的两个推论。

【注】这里并不局限于稳恒电流。

【注】若非特别说明，下面的体积分区域皆指将所有电荷、电流包含在内的某个指定区域 V（譬如可将 V 取为全空间）。

- 首先，利用连续性方程 $\nabla \cdot \vec{J}(t, \vec{x}) = -\partial_t \rho(t, \vec{x})$ 可得

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\vec{J}\vec{x}) = (\nabla \cdot \vec{J})\vec{x} + (\vec{J} \cdot \nabla)\vec{x} \\ \nabla \cdot (\vec{J}\vec{x}\vec{x}) = (\nabla \cdot \vec{J})\vec{x}\vec{x} + (\vec{J} \cdot \nabla\vec{x})\vec{x} + \vec{x}(\vec{J} \cdot \nabla\vec{x}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot (\vec{J}\vec{x}) = (-\partial_t \rho)\vec{x} + \vec{J} \\ \nabla \cdot (\vec{J}\vec{x}\vec{x}) = -(\partial_t \rho)\vec{x}\vec{x} + \vec{J}\vec{x} + \vec{x}\vec{J} \end{cases}$$

33

关于局域电流的第一个推论

利用$\nabla\cdot(\vec{J}\vec{x}) = (-\partial_t\rho)\vec{x}+\vec{J}$，不难给出

$$\int dV\,\vec{J} = \int dV\,\frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{x} + \int dV\,\nabla\cdot(\vec{J}\vec{x})$$
$$= \frac{d}{dt}\int dV\,\rho\vec{x} + \boxed{\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}\vec{x}}$$

由此就得到关于局域电流分布的第一个推论：

$$\int dV\,\vec{J} = \dot{\vec{p}}$$

其中$\vec{p}$为电荷分布的电偶极矩：

$$\vec{p} \triangleq \int dV\,\rho\vec{x} = \int \vec{x}\,dq$$

34

关于局域电流的第二个推论

利用$\nabla\cdot(\vec{J}\vec{x}\vec{x}) = -(\partial_t\rho)\vec{x}\vec{x}+\vec{J}\vec{x}+\vec{x}\vec{J}$，不难给出

$$\int dV\,\vec{J}\vec{x} = \frac{1}{2}\int dV\,(\vec{J}\vec{x}-\vec{x}\vec{J}) + \frac{1}{2}\int dV\,(\vec{J}\vec{x}+\vec{x}\vec{J})$$
$$= \frac{1}{2}\int dV\,(\vec{J}\vec{x}-\vec{x}\vec{J})\cdot\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{2}\int dV\,\frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{x}\vec{x} + \frac{1}{2}\int dV\,\nabla\cdot(\vec{J}\vec{x}\vec{x})$$
$$= \frac{1}{2}\int dV\,(\vec{J}\vec{x}-\vec{x}\vec{J})\cdot\hat{x}_k\hat{x}_k + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int dV\,\rho\vec{x}\vec{x} + \boxed{\frac{1}{2}\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}\vec{x}\vec{x}}$$
$$= \frac{1}{2}\int dV\,(\vec{x}\times\vec{J})\times\hat{x}_k\hat{x}_k$$
$$+\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\int dV\,\rho\left(3\vec{x}\vec{x}-r^2\overleftrightarrow{I}\right) + \frac{1}{6}\frac{d}{dt}\int dV\,\rho r^2\overleftrightarrow{I}$$

35

定义

$$\begin{cases} \vec{m} \triangleq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int dV\,(\vec{x}\times\vec{J}) & \textbf{磁偶极矩} \\ \overleftrightarrow{D} \triangleq \displaystyle\int dV\,\rho\left(3\vec{x}\vec{x}-r^2\overleftrightarrow{I}\right) & \textbf{电四极矩} \\ g \triangleq \displaystyle\int dV\,\rho r^2 & \end{cases}$$

由此就给出了关于局域电流分布的第二个推论：

$$\int dV\,\vec{J}\vec{x} = \vec{m}\times\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{6}\dot{\overleftrightarrow{D}} + \frac{1}{6}\dot{g}\overleftrightarrow{I}$$

36

关于稳恒电流的两个推论

对于稳恒电流，由于$\nabla\cdot\vec{J}=0=\partial_t\rho$，因而有

$$\dot{\vec{p}}=0,\quad \dot{\vec{D}}=0,\quad \dot{g}=0$$

所以，前面的两个推论就写为了

$$\begin{cases}\int dV\,\vec{J}=0\\ \int dV\,\vec{J}\vec{x}=\vec{m}\times\vec{I}\end{cases}$$

二、磁偶极矩

任一给定的电流分布，其在某一时刻的磁偶极矩定义为

$$\vec{m}\triangleq\frac{1}{2}\int dV\,(\vec{x}\times\vec{J})$$

或者将其写为

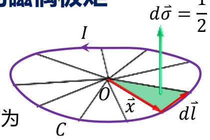
$$\vec{m}\triangleq\frac{1}{2}\int\vec{x}\times d\vec{I}$$

其中 $d\vec{I}=\vec{J}dV,\vec{K}d\sigma$ 或 $\vec{I}dl=Id\vec{l}$。

- 叠加原理：$\vec{m}_{A+B}=\vec{m}_A+\vec{m}_B$。
- 对于稳恒电流，$\vec{m}$ 与原点的选择无关。
- 对于运动点电荷 e，由于 $\vec{J}(t,\vec{x})=e\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_e)$，因而
$$\vec{m}\triangleq\frac{1}{2}e\vec{x}_e\times\vec{v}$$

载流线圈的磁偶极矩

$$d\vec{\sigma}=\frac{1}{2}\vec{x}\times d\vec{l}$$



载流线圈 C 的磁偶极矩为

$$\vec{m}\triangleq\frac{1}{2}I\oint_C\vec{x}\times d\vec{l}$$

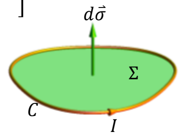
或者利用斯托克斯定理将其改写为

$$\vec{m}=-\frac{1}{2}I\int_\Sigma(d\vec{\sigma}\times\nabla)\times\vec{x}$$

$$=-\frac{1}{2}I\left[\int_\Sigma(\nabla\vec{x})\cdot d\vec{\sigma}-\int_\Sigma(\nabla\cdot\vec{x})d\vec{\sigma}\right]$$

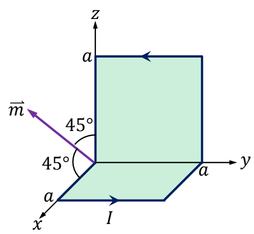
从而

$$\vec{m}=I\vec{\Sigma},\quad \text{where }\vec{\Sigma}=\int_\Sigma d\vec{\sigma}$$



其中，**Σ 可以是以 C 为边界的任一曲面。**

【例】 求图示载流线圈的磁偶极矩。



【解】 $\vec{m} = Ia^2(\hat{x} + \hat{z})$。方向如图，大小为 $m = \sqrt{2}Ia^2$。

40

轨道磁矩与轨道角动量

- 带电粒子系统的**轨道磁矩**为

$$\vec{m}_L = \frac{1}{2}\sum_n e_n \vec{x}_n \times \vec{v}_n = \sum_n \frac{e_n}{2m_n} \vec{x}_n \times m_n \vec{v}_n = \sum_n \frac{e_n}{2m_n} \vec{L}_n$$

其中，$\vec{L}_n = \vec{x}_n \times m_n \vec{v}_n$ 是粒子 n 的**轨道角动量**。

- 如果各粒子具有相同的荷质比，即 $e_n/m_n = e/m = const.$，则轨道磁矩 $\vec{m}_L$ 与轨道角动量 $\vec{L} = \sum_n \vec{L}_n$ 之间满足关系

$$\vec{m}_L = \frac{e}{2m}\vec{L} = g\frac{e}{2m}\vec{L}$$

其中的 g 称为 **Lande（朗德）g−因子**。此处 $g = 1$。

41

自旋磁矩与自旋角动量

电子的**自旋磁矩**与**自旋角动量**之间也满足类似的关系：

$$\vec{m}_S = g\left(-\frac{e}{2m_e}\right)\vec{L}_S, \quad \text{where } L_S = \frac{1}{2}\hbar$$

- 狄拉克预言：电子的朗德因子为 $g = 2$。
- 电子、μ子、τ子目前都被视为基本粒子，对这些自旋为$\hbar/2$的所谓狄拉克粒子，狄拉克方程预言（m 为相应粒子的质量）

$$\vec{m}_S = g\left(-\frac{e}{2m}\right)\vec{L}_S, \quad g = 2$$

- 电子、μ子、τ子并非单纯的狄拉克粒子，而是被起源于量子扰动的虚粒子云所包围，由此导致其朗德因子并不严格等于2。

42

对于电子、 μ子，实验测量值分别为

$$g_{\text{electron}} = 2.002\,319\,304\,374 \pm 0.000\,000\,000\,008$$

$$g_{\text{muon}} = 2.002\,331\,840\,4 \pm 0.000\,000\,003\,0$$

与理论计算给出的结果完美吻合。电子 g–因子的精度相当于测量地月距离时仅有1.5 mm的误差。

【例】半径为 a、均匀带有电量 Q 的球壳绕某直径以常角速度 $\vec{\omega}$ 转动。试计算磁偶极矩以及磁矢势和磁场的分布。

【解】电流面密度为

$$\vec{K}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi a^2}\vec{\omega}\times\vec{x} \;= \frac{Q}{4\pi a}\vec{\omega}\times\hat{r}$$

44

磁偶极矩

由于 $d\sigma = a^2 d\Omega$，因而（下面的 $\hat{r} = n_k \hat{x}_k$）

$$\vec{m} \triangleq \frac{1}{2}\oint_S \vec{x}\times\vec{K}d\sigma = \frac{Qa^2}{8\pi}\oint \hat{r}\times(\vec{\omega}\times\hat{r})d\Omega$$

$$= \frac{Qa^2}{8\pi}\left[\oint \vec{\omega}d\Omega - \oint(\vec{\omega}\cdot\hat{r})\hat{r}d\Omega\right]$$

$$= \frac{Qa^2}{8\pi}\left[4\pi\vec{\omega} - \left(\omega_i \underbrace{\oint n_i n_k d\Omega}_{\frac{4\pi}{3}\delta_{ik}}\right)\hat{x}_k\right]$$

因此

$$\vec{m} = \frac{1}{3}Qa^2\vec{\omega}$$

45

磁矢势

由于

$$\vec{K}(\vec{x}')d\sigma' = \frac{Q}{4\pi a}\vec{\omega} \times \hat{r}'d\sigma' = \frac{3}{4\pi a^3}\vec{m} \times d\vec{\sigma}'$$

将其代入磁矢势的表达式，得到

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{K}(\vec{x}')d\sigma'}{\mathbb{R}} = \frac{3\mu_0}{4\pi a^3}\vec{m} \times \left[\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}}\right]$$

其中

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}} = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\nabla' \frac{1}{\mathbb{R}}\right) dV' = -\nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varepsilon_0 dV'}{\mathbb{R}}$$

＝ “电荷密度”为 ε_0 的均匀带电球体在 $\vec{x}$ 处激发的电场。

46

即有（其中 $\rho = \varepsilon_0$ ）

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{d\vec{\sigma}'}{\mathbb{R}} = \begin{cases} \dfrac{\rho\vec{x}}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\vec{x}}{3}, & (r < a) \\ \dfrac{\rho a^3\vec{x}}{3\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{a^3\vec{x}}{3r^3}, & (r > a) \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} \vec{A}_1(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi a^3}\vec{m} \times \vec{x}, & (r < a) \\ \vec{A}_2(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m} \times \vec{x}, & (r > a) \end{cases}$$

47

磁感应强度

由于

$$\nabla \times (\vec{m} \times \vec{x}) = 2\vec{m}$$

以及

$$\nabla \times \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{r^3} = \frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3}, \quad (\vec{x} \neq 0)$$

因此，由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 就得到磁感应强度：

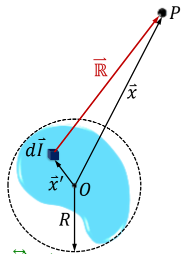
$$\begin{cases} \vec{B}_1(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0\vec{m}}{2\pi a^3}, & (r < a) \\ \vec{B}_2(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}], & (r > a) \end{cases}$$

48

三、磁矢势的多极展开

局域电流分布激发的磁矢势为：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$



在球外，由于

$$\frac{1}{\mathbb{R}}=e^{-\vec{x}'\cdot\nabla}\frac{1}{r}=\frac{1}{r}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\cdots$$

$$=\frac{1}{r}+\frac{1}{r^3}\vec{x}'\cdot\vec{x}+\cdots$$

因而

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\boxed{\int dV'\,\vec{J}(\vec{x}')}+\frac{1}{r^3}\overbrace{\boxed{\left[\int dV'\,\vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\right]\cdot\vec{x}}}^{(\vec{m}\times\overleftrightarrow{I})\cdot\vec{x}}+\cdots\right\}$$

49

因此，局域电流在球外激发的磁矢势可以写为

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\vec{m}\times\overleftrightarrow{I})\cdot\vec{x}+\cdots=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m}\times(\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{x})+\cdots$$

由此得到

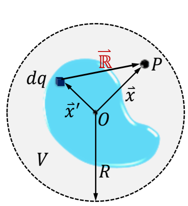
$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m}\times\vec{x},\quad (r\gg R)$$

而根据前面的例子，有

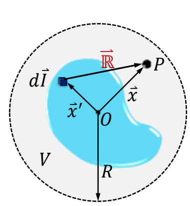
$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}],\quad (r\gg R)$$

50

【思考】 设 V 是将所有电荷、电流都包含进来的任一球体，则



$$\vec{p}=-3\varepsilon_0\int_V\vec{E}(\vec{x})d^3x$$



$$\vec{m}=\frac{3}{2\mu_0}\int_V\vec{B}(\vec{x})d^3x$$

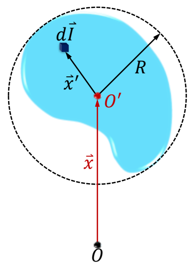
51

四、外磁场中的小载流导体

下面讨论小载流导体在给定外磁场$\vec{B}_e(\vec{x})$中的磁能、力学势能以及其受到的力和力矩。

假设在小电流系统所处区域，并无激发外磁场的电流，从而

$$\nabla \times \vec{B}_e(\vec{x}) = 0$$



52

1. 在外场中的磁能及力学势能

小载流导体在外场中的磁能为

$$W_e = \int dV' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{A}_e(\vec{x} + \vec{x}')$$

$$= \int dV' \vec{J}(\vec{x}') \cdot [\vec{A}_e(\vec{x}) + \vec{x}' \cdot \nabla \vec{A}_e(\vec{x})]$$

$$= \boxed{\left[\int dV' \vec{J}(\vec{x}')\right]} \cdot \vec{A}_e(\vec{x}) + \left\{\left[\int dV' \vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\right] \cdot \nabla\right\} \cdot \vec{A}_e(\vec{x})$$

$$= [(\vec{m} \times \vec{I}) \cdot \nabla] \cdot \vec{A}_e(\vec{x})$$

$$= [\vec{m} \times (\vec{I} \cdot \nabla)] \cdot \vec{A}_e(\vec{x})$$

53

因此

$$W_e = (\vec{m} \times \nabla) \cdot \vec{A}_e = \vec{m} \cdot (\nabla \times \vec{A}_e)$$

即小载流导体在**外场中的磁能**为

$$W_e = \vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

而如前所言，小载流导体在**外场中的力学势能**为 W_e 的负值：

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

其含义是：在维持电流不变的情形下移动载流导体，外界抵抗安培力所做的功。而载流导体所受安培力为：

$$\vec{F} = -\nabla U = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e$$

54

2. 在外场中受到的安培力

小载流导体在外磁场中受到的安培力也可直接利用定义给出：

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int dV'\,\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(\vec{x}+\vec{x}') \\ &= \int dV'\,\vec{J}(\vec{x}') \times [\vec{B}_e(\vec{x}) + \vec{x}'\cdot\nabla\vec{B}_e(\vec{x})] \\ &= \boxed{\left[\int dV'\,\vec{J}(\vec{x}')\right]} \times \vec{B}_e(\vec{x}) + \left\{\left[\int dV'\,\vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\right]\cdot\nabla\right\} \times \vec{B}_e(\vec{x}) \\ &= [(\vec{m}\times\overleftrightarrow{I})\cdot\nabla] \times \vec{B}_e(\vec{x}) \\ &= [\vec{m}\times(\overleftrightarrow{I}\cdot\nabla)] \times \vec{B}_e(\vec{x})\end{aligned}$$

55

因此得到

$$\vec{F} = (\vec{m}\times\nabla)\times\vec{B}_e = (\nabla\vec{B}_e)\cdot\vec{m} - (\nabla\cdot\vec{B}_e)\vec{m}$$

由于磁场无源，且假设在载流导体所在区域没有外部电流，故

$$\vec{F} = \vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_e$$

- 对于小载流线圈，由于$\vec{m} = I\vec{\Sigma}$，从而其在外磁场所受力为

$$\vec{F} = I\vec{\Sigma}\cdot\nabla\vec{B}_e = I\nabla(\vec{B}_e\cdot\vec{\Sigma})$$

亦即

$$\vec{F} = I\nabla\Phi_e$$

安培力指向磁通量增加最快的方向。
上式实际上对于一般的载流线圈也是严格成立的。

56

3. 安培力矩

小载流导体在外磁场中受到的安培力矩（相对于 O' 点）为

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \int dV'\,\vec{x}' \times [\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(\vec{x}+\vec{x}')] \\ &= \int dV'\,\vec{x}' \times [\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(\vec{x})] \\ &= \left[\int dV'\vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\right]\cdot\vec{B}_e(\vec{x}) - \boxed{\left[\int dV'\vec{J}(\vec{x}')\cdot\vec{x}'\right]}\vec{B}_e(\vec{x})\end{aligned}$$

最后一个积分实际上等于零，因而

$$\vec{\tau} = \vec{m}\times\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{B}_e(\vec{x})$$

即有

$$\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}_e$$

57

关于 $\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{x}$ 积分为零的证明

【方法一】

$$\nabla\cdot(\vec{J}r^2) = \boxed{(\nabla\cdot\vec{J})r^2} + (\vec{J}\cdot\nabla)r^2 = 2(\vec{J}\cdot\nabla\vec{x})\vec{x} = 2\vec{J}\cdot\vec{x}$$

$$\Rightarrow \int dV\,\vec{J}\cdot\vec{x} = \frac{1}{2}\int dV\,\nabla\cdot(\vec{J}r^2) = \frac{1}{2}\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}r^2 = 0$$

【方法二】

$$\int dV\,\vec{J}\cdot\vec{x} = \mathrm{tr}\left[\int dV\,\vec{J}\vec{x}\right] = \mathrm{tr}\left[\int dV\,\frac{\vec{J}\vec{x}+\vec{x}\vec{J}}{2}\right] + \boxed{\mathrm{tr}\left[\int dV\,\frac{\vec{J}\vec{x}-\vec{x}\vec{J}}{2}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\int dV\,\nabla\cdot(\vec{J}\vec{x}\vec{x})\right] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}\vec{x}\vec{x}\right] = 0$$

58