§3 分离变量法

一、概述

本节讨论利用分离变量方法求解拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$，设 φ 满足合适的边界条件。分离变量法的要点是

- 根据边界条件的对称性，选择合适坐标系 (u_1, u_2, u_3)：

$$\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3)$$

- 寻找拉普拉斯方程的如下形式的解（分离变量解），将偏微分方程的求解转化为常微分方程的求解：

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = F(u_1)G(u_2)H(u_3)$$

- 分离变量解构成了相应解域内的正交完备函数系，拉普拉斯方程的一般解可以写为其线性组合。
- 合适的边界条件可唯一确定组合系数，从而得到问题的解。

二、直角坐标系

直角坐标系中，拉普拉斯方程写为：

$$\nabla^2\varphi = \partial_x^2\varphi + \partial_y^2\varphi + \partial_z^2\varphi = 0$$

按照分离变量法的精神，我们尝试求如下形式的解：

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

对此种形式的解，拉普拉斯方程化简为：

$$\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}}_{\alpha^2} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}}_{\beta^2} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}}_{\gamma^2} = 0$$

分离参数 α、β 和 γ 须满足 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$。

1. 直角坐标系下的分离变量解

每个二阶常微分方程有两个独立解，一般解是其线性组合。

- 以方程 $X''(x)=\alpha^2 X(x)$ 为例

$$\begin{cases}\alpha^2>0 & \Rightarrow\ X_\alpha\sim\{\cosh\alpha x,\ \sinh\alpha x\}\sim\{e^{\alpha x},\ e^{-\alpha x}\}\\ \alpha^2=-a^2<0 & \Rightarrow\ X_\alpha\sim\{\cos ax,\ \sin ax\}\\ \alpha^2=0 & \Rightarrow\ X_\alpha\sim\{1,\ x\}\end{cases}$$

- 对一组确定参数 (α,β,γ)，拉普拉斯方程的解为：

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)=X_\alpha(x)Y_\beta(y)Z_\gamma(z),\quad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0)$$

4

2. 直角坐标系下的一般解

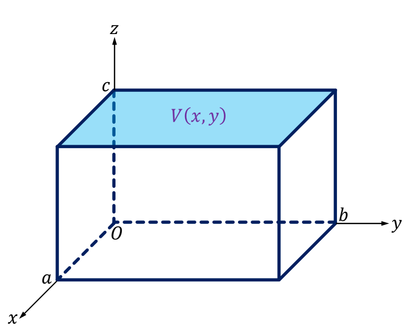
拉普拉斯方程的一般解为：

$$\varphi(x,y,z)=\sum_{\alpha\beta\gamma}X_\alpha(x)Y_\beta(y)Z_\gamma(z)\delta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

- 分离参数 α、β 和 γ 可实、可虚。
- 参数 α、β 和 γ 的类型及取值范围，以及组合系数的数值，可利用定界条件确定
  - 边界条件既包括边界条件（无穷远处表现为渐近条件），还可能包括正则条件（如单值性、有界性 等）。

5

【例】尺寸为 $a\times b\times c$ 的长方形盒子，上表面（$z=c$）维持电势为 $V(x,y)$，其余五个面电势维持为零。试求盒内的电势分布。



6

【解】用于定解的边界条件有

① $\varphi(0,y,z)=0$; ② $\varphi(a,y,z)=0$;
③ $\varphi(x,0,z)=0$; ④ $\varphi(x,b,z)=0$;
⑤ $\varphi(x,y,0)=0$; ⑥ $\varphi(x,y,c)=V(x,y)$.

设 $\varphi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$，则盒内电势满足

$$\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi}=\underbrace{\boxed{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}}_{-\alpha^2}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}}_{-\beta^2}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}}_{\gamma^2=\alpha^2+\beta^2}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X=\boxed{A_\alpha\cos\alpha x}+B_\alpha\sin\alpha x\\ Y=\boxed{C_\beta\cos\beta y}+D_\beta\sin\beta y\\ Z=\boxed{E_\gamma\cosh\gamma z}+F_\gamma\sinh\gamma z\end{cases}$$

①③⑤ $\Rightarrow A_\alpha=C_\beta=E_\gamma=0$
② $\Rightarrow \alpha a=m\pi,\quad m=1,2,\cdots$
④ $\Rightarrow \beta b=n\pi,\quad n=1,2,\cdots$

符合于齐次边界条件的一般解为

$$\varphi=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\frac{\sinh(\gamma_{mn}z)}{\sinh(\gamma_{mn}c)}$$

其中

$$\gamma_{mn}=\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$

利用边界条件⑥，得到

$$V(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\Rightarrow\quad A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a dx\int_0^b dy\ V(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

如果 $V(x,y)=V_0$，则

$$A_{mn}=\frac{4V_0}{ab}\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}dx\int_0^b\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$
$$=V_0\cdot\frac{2}{m\pi}[1-(-1)^m]\cdot\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

故仅当 m、n 均为奇数时才有 $A_{mn}\neq0$，此时

$$A_{mn}=\frac{16V_0}{mn\pi^2},\quad m,n=1,3,5,\cdots$$

因此，盒内电势为

$$\varphi=\sum_{m,n\ \mathrm{odd}}\varphi_{mn}=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{m,n\ \mathrm{odd}}\frac{1}{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\frac{\sinh(\gamma_{mn}z)}{\sinh(\gamma_{mn}c)}$$

对于立方体（$a=b=c$），有

$$\varphi_{mn}=\frac{16V_0}{mn\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\frac{\sinh(\gamma_{mn}z)}{\sinh(\gamma_{mn}a)}$$

因此，立方体中心的电势（严格解为 $\varphi_0=V_0/6$，WHY？）为

$$\varphi_0=\sum_{m,n\ \mathrm{odd}}V_{mn}=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{m,n\ \mathrm{odd}}\frac{1}{mn}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\frac{\sinh(\gamma_{mn}a/2)}{\sinh(\gamma_{mn}a)}$$

取求和中前面的若干项作为近似，所得结果的相对误差为

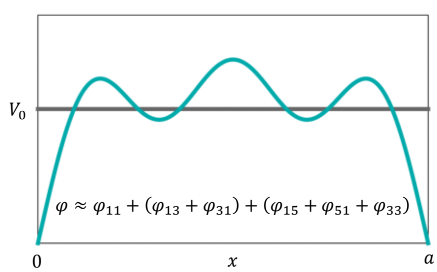
$\varphi_0\approx V_{11}\quad\longrightarrow\quad 4\%$

$\varphi_0\approx V_{11}+(V_{13}+V_{31})\quad\longrightarrow\quad 0.3\%$

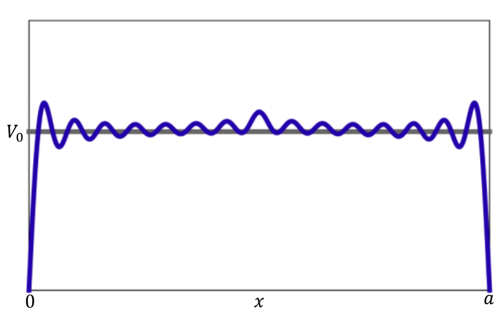
$\varphi_0\approx V_{11}+(V_{13}+V_{31})+(V_{15}+V_{51}+V_{33})\quad\longrightarrow\quad 0.02\%$

考察上表面中线上各点的电势（严格解为 V_0）：

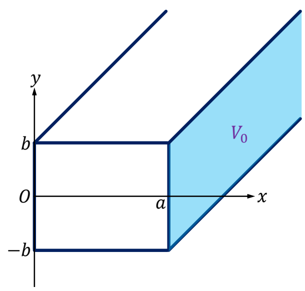
$$\varphi\left(x,\frac{a}{2},a\right)=\sum_{m,n\ \mathrm{odd}}\varphi_{mn}=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{m,n\ \mathrm{odd}}\frac{1}{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi}{2}$$



$$\varphi\left(x,\frac{a}{2},a\right)=\sum_{m,n\ \mathrm{odd}}\varphi_{mn},\quad m+n=2,4,\cdots,30,\quad (共120项)$$



【思考】由导体板围成的无限长长方形管子，四块导体板彼此绝缘，其中三板维持电势为零，另一板维持电势为常数 V_0。试求管内的电势。



13

三、柱坐标系

设静电势与 z 坐标无关，从而拉普拉斯方程在柱坐标系中写为

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

按照分离变量法的精神，我们尝试求如下形式的解：

$$\varphi(s,\phi) = R(s)\Phi(\phi)$$

对此种形式的解，拉普拉斯方程化简为：

$$s^2\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi} = \underbrace{\boxed{\frac{s}{R}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dR}{ds}\right)}}_{m^2} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}}}_{-m^2} = 0$$

其中 m 可取实数或虚数。

14

对于分离变量解，拉普拉斯方程约化为两个常微分方程

$$s\frac{d}{ds}\left(s\frac{dR}{ds}\right) = m^2R,\quad \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi$$

其解为

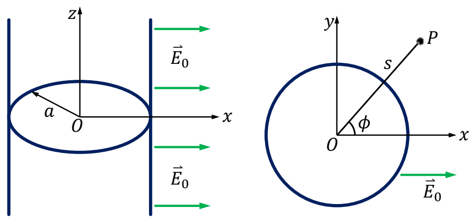
$$\begin{cases} m = 0 & \Longrightarrow \quad R\sim\{1,\ \ln s\}, \quad \Phi\sim\{1,\ \phi\} \\ m \neq 0 & \Longrightarrow \quad R\sim\{s^m,\ s^{-m}\}, \quad \Phi\sim\{\cos m\phi,\ \sin m\phi\} \end{cases}$$

一般解为

$$\varphi(s,\phi) = (A_0 + B_0\ln s)(C_0 + D_0\phi) + \sum_{m\neq 0}(A_m s^m + B_m s^{-m})(C_m\cos m\phi + D_m\sin m\phi)$$

15

【例】半径为 a 的无限长导体圆柱置于垂直于轴线的均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，导体圆柱单位长度所带电量为 λ。求柱外的静电势。



本问题中 $\phi \in [0, 2\pi]$，故电势的单值性要求一般解为：

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln s + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m s^m + B_m s^{-m})(C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

$$\varphi = A_0 - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln s + \sum_{m=1}^{\infty} (s^m - a^{2m} s^{-m})\ (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

方法一：定界条件有

① 导体圆柱的表面为等势面 $\Longrightarrow$ $B_m = -A_m a^{2m}, \quad (m \neq 0)$

② 导体圆柱单位长度所带电量为 λ

$$\lambda = -\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot a d\phi = -\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \frac{B_0}{a} \cdot a d\phi \Longrightarrow B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$$

③ 渐近条件：当 $s \longrightarrow \infty$ 时 $\varphi \longrightarrow -\vec{E}_0 \cdot \vec{x} = -E_0 s \cos\phi$。

由此可得 $C_1 = -E_0$，而 $C_{m\neq 1} = 0 = D_m$。因而柱外电势为

$$\varphi(s, \phi) = A_0 - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln s - E_0 \left(s - \frac{a^2}{s}\right) \cos\phi$$

方法二：当 $s \longrightarrow \infty$ 时电势满足如下渐近条件

$$\varphi \longrightarrow -\vec{E}_0 \cdot \vec{x} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln s = -E_0 s \cos\phi - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln s$$

因此，不妨设柱外电势为：

$$\varphi(s, \phi) = -E_0 s \cos\phi - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln s + \frac{B}{s} \cos\phi$$

该解自动满足边界条件。而圆柱表面等势，即 $\varphi(s = a, \phi) = const.$ 对任意 ϕ 都成立，要求 $B = E_0 a^2$。因此，柱外电势为

$$\varphi(s, \phi) = -E_0 s \cos\phi - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln s + \frac{E_0 a^2}{s} \cos\phi$$

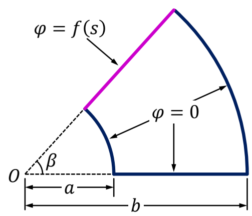
$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln s - \left(1 - \frac{a^2}{s^2}\right) \vec{E}_0 \cdot \vec{x}$$

【思考】半径为 R 的无限长圆柱体表面上分布有面电荷密度：

$$\sigma(\phi) = \sigma_0 \sin 5\phi$$

其中 σ_0 为常数。试求空间的电势分布。

【思考】求如图所示的无限长管子内部的电势。



四、球坐标系

球坐标系中，拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 写为：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

对形如 $\varphi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ 的解，拉普拉斯方程化简为：

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}}_{l(l+1)} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]}}_{-l(l+1)} = 0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = l(l+1)R,\quad \mathbb{L}^2 Y = -l(l+1)Y$$

其中 $\mathbb{L}^2 \triangleq \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

- 径向函数 $R(r)$ 满足方程：

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = l(l+1)R$$

其一般解为：

$$R(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

- $Y(\theta,\phi)$ 满足方程：

$$\mathbb{L}^2 Y = -l(l+1)Y$$

该方程的单值、有限解为球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 的线性组合，其中 $l = 0,1,2,3,\cdots$，而 m 为满足 $|m| \le l$ 的整数。

在球坐标系中，拉普拉斯方程满足“单值、有限”的一般解为：

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^{l}+\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

也可将其利用缔合勒让德多项式表示为：

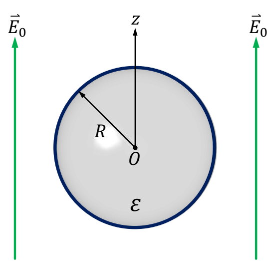
$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(A_{l}r^{l}+\frac{B_{l}}{r^{l+1}}\right)P_{l}^{m}(\cos\theta)(C_m\cos m\phi + D_m\sin m\phi)$$

对于具有轴对称性的问题，取对称轴为 z 轴，则静电势不依赖于方位角 ϕ ，此情形下拉普拉斯方程的通解简化为：

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_{l}r^{l}+\frac{B_{l}}{r^{l+1}}\right)P_{l}(\cos\theta)$$

22

【例】半径为 R、相对介电常数为 ε 的介质球置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，球外为真空。试求全空间的电势和电场分布。



23

方法一：设球内、外的电势分别为 φ_1、φ_2。

$$\varphi_1 = \frac{3}{\varepsilon+2}E_0 r\cos\theta\,,\quad \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{R^3}{r^2}E_0\cos\theta$$

① φ_1 有限 $\Rightarrow$ $B_l = 0$

② φ_2 满足渐近条件：$\varphi_2|_{r\to\infty} = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$

$\Rightarrow$ $C_1 = -E_0$, $C_{m\neq1} = 0$

③ 边值关系：在 $r = R$ 处

$$\begin{cases}\varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A_1 R = -E_0 R + \dfrac{D_1}{R^2},\ \ \varepsilon A_1 R = -E_0 R - \dfrac{2D_1}{R^2} \\ A_l R^l = \dfrac{D_l}{R^{l+1}},\ \ \varepsilon A_l R^l = -\dfrac{D_l}{R^{l+1}},\ \ (l\neq1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ A_1 = -\frac{3}{\varepsilon+2}E_0,\quad D_1 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0R^3,\quad A_{l\neq1} = 0 = D_{l\neq1}$$

24

方法二：根据 φ_1 的有限性及 φ_2 的渐近条件，令

$$\begin{cases} \varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \\ \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{cases}$$

不妨进一步假设

$$\varphi_1 = A\frac{r}{R}\cos\theta, \quad \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + B\frac{R^2}{r^2}\cos\theta$$

代入 $r = R$ 处边值关系 $\varphi_1 = \varphi_2$ 和 $\varepsilon\,\partial\varphi_1/\partial r = \partial\varphi_2/\partial r$ 给出

$$\begin{cases} A = -E_0 R + B \\ \varepsilon A = -E_0 R - 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{\varepsilon+2} E_0 R \\ B = \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0 R \end{cases}$$

25

因此，球内、外的电势为

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\dfrac{3}{\varepsilon+2} E_0 r\cos\theta = -\dfrac{3}{\varepsilon+2}\vec{E}_0\cdot\vec{x} \\ \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\dfrac{R^3}{r^2} E_0\cos\theta = -\left(1 - \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\dfrac{R^3}{r^3}\right)\vec{E}_0\cdot\vec{x} \end{cases}$$

介质球内的电场为

$$\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3}{\varepsilon+2}\vec{E}_0 = \left(1 - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)\vec{E}_0$$

介质球的极化强度为

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}_1 = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E}_1 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} 3\varepsilon_0\vec{E}_0$$

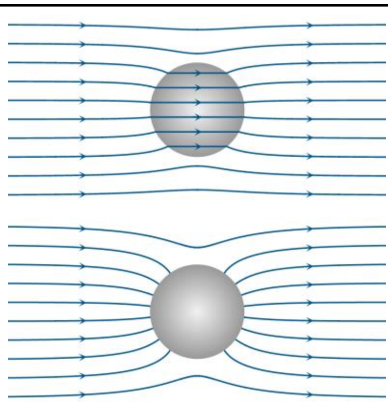
介质球的总电偶极矩为

$$\vec{p} = \frac{4\pi R^3}{3}\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_0, \quad \text{where } \alpha = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} 4\pi R^3$$

26

均匀电场中的电介质球

均匀电场中的导体球



27

【例】将半径为 R、相对介电常数为 ε 的小介质球从无穷远处移至外场 $\vec{E}_0(\vec{x})$中。试求此过程外界做功。

【方法一】小介质在外场中均匀极化，其所受静电力为

$$\vec{F} \approx \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_0 \approx \alpha\varepsilon_0\vec{E}_0\cdot\nabla\vec{E}_0$$

外界做功为

$$A = -\int_{\infty}^{\vec{x}}\vec{F}\cdot d\vec{l} \approx -\alpha\varepsilon_0\int_{\infty}^{\vec{x}}(\vec{E}_0\cdot\nabla\vec{E}_0)\cdot d\vec{l}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0\int_{\infty}^{\vec{x}}\nabla E_0^2\cdot d\vec{l}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0[E_0^2(\vec{x}) - \boxed{E_0^2(\infty)}]$$

$$\Longrightarrow \quad A \approx -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0E_0^2(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}_0$$

【方法二】设 ρ_0 是激发外场 $(\varphi_0, \vec{E}_0)$ 的外部电荷密度。介质球到达最终位置处时，总电势设为 φ，极化电荷密度设为 ρ'，ρ' 激发的电势记为 φ'。外界做功等于静电能的增量：

$$A = \Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}\int\rho_0\varphi dV - \frac{1}{2}\int\rho_0\varphi_0 dV$$

此处积分区域选为全空间。利用 $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ 可将 A 表示为

$$A = \frac{1}{2}\int\rho_0\varphi' dV = \frac{1}{2}\int\rho'\varphi_0 dV = -\frac{1}{2}\int\varphi_0\nabla\cdot\vec{P}dV$$

因此，利用分部积分给出

$$A = -\frac{1}{2}\int\nabla\cdot(\varphi_0\vec{P})dV + \frac{1}{2}\int\vec{P}\cdot\nabla\varphi_0 dV$$

最后，利用高斯定理以及 $\vec{E}_0 = -\nabla\varphi_0$，得到

$$A = -\frac{1}{2}\int\vec{P}\cdot\vec{E}_0 dV$$

这就是在给定电场中移动介质做功的一般表达式。

- 对小介质球，在其所处区域，$\vec{E}_0$几乎均匀，介质球几乎是均匀极化的，因而

$$A \approx \left(-\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}_0\right)\cdot\frac{4\pi R^3}{3}$$

由此得到

$$A \approx -\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}_0 = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0E_0^2(\vec{x})$$

【方法三】 设 $(\vec{E}_0,\vec{D}_0)$ 和 $(\vec{E},\vec{D})$ 分别为初、末态的场。外界做功等于静电能的增量：

$$A=\frac{1}{2}\int(\vec{D}\cdot\vec{E}-\vec{D}_0\cdot\vec{E}_0)dV$$

$$=\frac{1}{2}\int[(\vec{D}-\vec{D}_0)\cdot\vec{E}+(\vec{D}-\vec{D}_0)\cdot\vec{E}_0]dV$$

$$+\boxed{\frac{1}{2}\int(\vec{D}_0\cdot\vec{E}-\vec{D}\cdot\vec{E}_0)dV}$$

可证第一个体积分为零。以 $(\vec{D}-\vec{D}_0)\cdot\vec{E}$ 为例，证明如下

$$(\vec{D}-\vec{D}_0)\cdot\vec{E}=-(\vec{D}-\vec{D}_0)\cdot\nabla\varphi\ =-\nabla\cdot[\varphi(\vec{D}-\vec{D}_0)]+\varphi\nabla\cdot(\vec{D}-\vec{D}_0)$$

由于外场不变，$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\vec{D}_0=\rho_0$，因而 $\varphi\nabla\cdot(\vec{D}-\vec{D}_0)=0$；

由高斯定理，$\nabla\cdot[\varphi(\vec{D}-\vec{D}_0)]$ 的体积分等于零。

因此，外界做功可以写为

$$A=\frac{1}{2}\int(\vec{D}_0\cdot\vec{E}-\vec{D}\cdot\vec{E}_0)dV$$

将其中的电位移用电场表示出来

$$\vec{D}_0=\varepsilon_0\vec{E}_0,\quad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

得到

$$A=-\frac{1}{2}\int\vec{P}\cdot\vec{E}_0dV$$

这就是在给定电场中移动介质做功的一般表达式。 对小介质球

$$A\approx\left(-\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}_0\right)\cdot\frac{4\pi R^3}{3}=-\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}_0=-\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0E_0^2(\vec{x})$$

【思考】 设电荷仅分布于半径为 R 的球面上，球面上的电势为

$$V=V_0\cos 3\theta$$

其中 V_0 为常数。试求

（1）空间的电势分布；

（2）球面上的面电荷分布。

【思考】 内、外半径分别为 a 和 b、相对介电常数为 ε 的均匀介质球壳置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中。试求球壳内的电场分布以及球壳的电偶极矩。

§4 格林函数方法

34

George Green (1793-1841)

- 在其父亲的面粉厂当学徒之前只接受了一年的教育。
- 直到30岁，格林才加入诺丁汉图书馆，通过Laplace、Lagrange、Legendre和Poisson的作品了解到高等数学。
- 1828年，格林自行发表了72页的文章“*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*”，供当地知名人士订阅。它几乎没有受到关注，沮丧的格林又回到了磨坊。
- 40岁，以本科生身份进入剑桥大学，1837年毕业， 1841年去世，4年间迅速发表了六篇关于流体力学、声学和光学的论文。几乎完全不为人知。
- 1845年，Thomson 从剑桥大学毕业后发现了这篇文章的副本。1850年，他安排在德国出版。此后不久， Riemann 创造了“格林函数”一词。

35

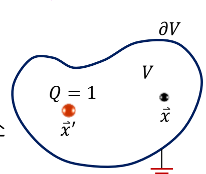
一、第一类格林函数

区域 V 内的**第一类格林函数** $G(\vec{x},\vec{x}')$ 的定义是：

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'), & (\vec{x},\vec{x}' \in V) \\ G(\vec{x}_S,\vec{x}') = 0, & (\vec{x}_S \in \partial V,\ \vec{x}' \in V) \end{cases}$$

- 物理含义：

  接地导体壳 $S = \partial V$ 内任一给定点 $\vec{x}'$ 处放置一个单位点电荷时，壳内 $\vec{x}$ 处的电势 $\varphi(\vec{x}) = G(\vec{x},\vec{x}')$。



36

1. 格林函数的对称性

考察格林第二公式：

$$\int_V dV\ (\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)=\oint_{\partial V} d\sigma\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$$

令 $\varphi=G(\vec{x},\vec{x}_1')$ 及 $\psi=G(\vec{x},\vec{x}_2')$，由于

$$\nabla^2\varphi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_1'),\quad \nabla^2\psi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_2')$$

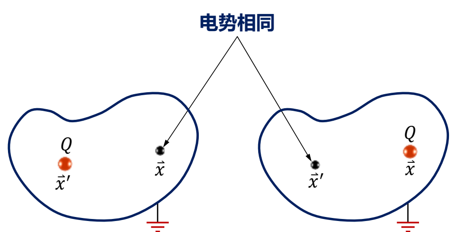
且格林第二公式右侧的面积分为零，因而得到

$$G(\vec{x}_1',\vec{x}_2')=G(\vec{x}_2',\vec{x}_1')$$

即有

$$G(\vec{x},\vec{x}')=G(\vec{x}',\vec{x})$$

37



38

2. 第一类格林函数与Dirichlet边界问题

对于第一类边界问题：

$$\nabla^2\varphi(\vec{x})=-\rho(\vec{x})/\varepsilon_0,\quad \varphi(\vec{x}_S)=f(\vec{x}_S)$$

其解可以写为：

$$\varphi(\vec{x})=\int_V dV'\ \varphi(\vec{x}')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')=-\varepsilon_0\int_V dV'\ \varphi(\vec{x}')\nabla'^2G(\vec{x},\vec{x}')$$

利用格林第二公式【其中 $\varphi=\varphi(\vec{x}')$，$\psi=G(\vec{x},\vec{x}')$】

$$\int_V dV'\ \varphi\nabla'^2\psi=\int_V dV'\ \psi\nabla'^2\varphi+\oint_{\partial V} d\sigma'\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n'}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)$$

就得到

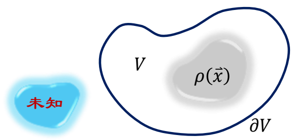
$$\varphi(\vec{x})=\int_V dV'\rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')-\varepsilon_0\oint_{\partial V} d\sigma'\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial n'}-\boxed{G}\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)$$

39

第一类边界问题的解为：

$$\varphi(\vec{x})=\int_V dV'\,\rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')-\varepsilon_0\oint_{\partial V}d\sigma'\,\varphi(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}$$

- **体积分不仅仅表示体电荷分布对静电势的贡献。**



40

- 总可以将第一类格林函数表示为：

$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|}+F(\vec{x},\vec{x}')$$

其中，F 满足 $\nabla^2F(\vec{x},\vec{x}')=0$ 及合适的边界条件。

- 可以将第一类边界问题的解表示为：

$$\varphi(\vec{x})=\boxed{\int_V dV'\,\frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|}}$$

V 内的电荷对 $\varphi(\vec{x})$ 的贡献

$$\boxed{+\int_V dV'\,\rho(\vec{x}')F(\vec{x},\vec{x}')-\varepsilon_0\oint_{\partial V}d\sigma'\,\varphi(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}}$$

可能存在于 S 上及 S 外的电荷对 $\varphi(\vec{x})$ 的贡献

41

二、第二类格林函数

区域 V 内的**第二类格林函数** $G(\vec{x},\vec{x}')$ 的定义是：

$$\begin{cases}\nabla^2G(\vec{x},\vec{x}')=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'), & (\vec{x},\vec{x}'\in V)\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial n}G(\vec{x}_S,\vec{x}')=-\dfrac{1}{\varepsilon_0 S}, & (\vec{x}_S\in\partial V,\ \vec{x}'\in V)\end{cases}$$

- 第二类格林函数同样满足对称性：

$$G(\vec{x},\vec{x}')=G(\vec{x}',\vec{x})$$

- 利用第二类格林函数可以给出如下**第二类边界问题**的解：

$$\nabla^2\varphi(\vec{x})=-\rho(\vec{x})/\varepsilon_0,\quad \frac{\partial}{\partial n}\varphi(\vec{x}_S)=g(\vec{x}_S)$$

42

证明

第二类边界问题的解可以写为：

$$\varphi(\vec{x})=\int_V dV'\,\varphi(\vec{x}')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')=-\varepsilon_0\int_V dV'\,\varphi(\vec{x}')\nabla'^2 G(\vec{x},\vec{x}')$$

利用格林第二公式【其中 $\varphi=\varphi(\vec{x}')$，$\psi=G(\vec{x},\vec{x}')$】

$$\int_V dV'\,\varphi\nabla'^2\psi=\int_V dV'\,\psi\nabla'^2\varphi+\oint_{\partial V} d\sigma'\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n'}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)$$

得到

$$\varphi(\vec{x})=\int_V dV'\,\rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')-\varepsilon_0\oint_{\partial V} d\sigma'\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial n'}-G\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)$$

$$=\langle\varphi\rangle_S+\int_V dV'\,\rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')+\varepsilon_0\oint_{\partial V} d\sigma'\,G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'}$$

43

三、无界空间的格林函数

以后只讨论第一类格林函数。

对于无界空间，$G(\vec{x},\vec{x}')$ 表示全空间仅仅 $\vec{x}'$ 处有一单位点电荷时，在 $\vec{x}$ 点激发的静电势。

- 不难看出

$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\mathbb{R}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

就是无界空间的格林函数，即它是如下问题的解：

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\quad G(\vec{x},\vec{x}')\Big|_{r\to\infty}=0$$

44

无界空间的边界问题

对于无界空间的第一类边界问题：

$$\nabla^2\varphi(\vec{x})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x}),\quad \varphi(\vec{x})\Big|_{r\to\infty}=0$$

其解为

$$\varphi(\vec{x})=\int_V dV'\,\rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')-\varepsilon_0\oint_{\partial V} d\sigma'\,\varphi(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}$$

即

$$\varphi(\vec{x})=\int_V dV'\,\rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{x}')dV'}{\mathbb{R}}$$

- 此式适用的条件是
  - 电势以无穷远处作为参考点；
  - 全空间的电荷分布已知，且是局域的。

45

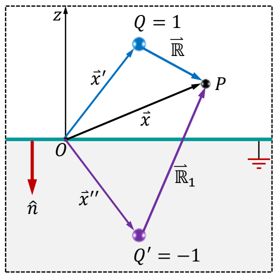
三、上半空间的格林函数

利用电像法，上半空间的格林函数为

$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathbb{R}}-\frac{1}{\mathbb{R}_1}\right)$$

其中

$$\begin{cases}\vec{\mathbb{R}}=\vec{x}-\vec{x}'\\ \vec{\mathbb{R}}_1=\vec{x}-\vec{x}''\end{cases}\qquad \begin{cases}\vec{x}=(x,\quad y,\quad z)\\ \vec{x}'=(x',\quad y',\quad z')\\ \vec{x}''=(x',\quad y',\quad -z')\end{cases}$$



46

- 当 $z'=0$ 时

$$\mathbb{R}=\mathbb{R}_1=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}\triangleq R$$

由于边界上外法向指向 x_3 轴负方向，因而

$$-\varepsilon_0\frac{\partial G}{\partial n'}\bigg|_{z'=0}=\varepsilon_0\frac{\partial G}{\partial z'}\bigg|_{z'=0}=\frac{z}{2\pi R^3}$$

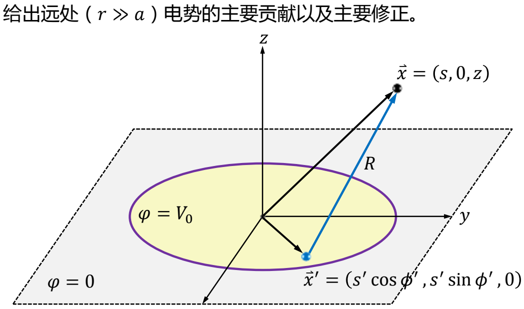
- 上半空间第一类边值问题的解为

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z'>0}\rho(\vec{x}')\left(\frac{1}{\mathbb{R}}-\frac{1}{\mathbb{R}_1}\right)dV'+\frac{z}{2\pi}\int\frac{\varphi(x',y',0)d\sigma'}{R^3}$$

若上半空间并无电荷分布，则上式中的体积分为零；此情形下，第二项表示可能存在于如下区域的电荷在上半空间激发的电势：（1）$z'=0$ 平面上，以及（2）下半空间。

47

【例】半径为 a 的圆周将无限导体平板切割为彼此绝缘的两部分，圆内电势为 V_0，圆外电势为零。求上半空间的电势分布，给出远处（$r\gg a$）电势的主要贡献以及主要修正。



48

【解】采用柱坐标。由对称性可知，电势并不依赖于方位角 ϕ，又由于上半空间并无电荷，故

$$\varphi(s,z)=\frac{z}{2\pi}\int\frac{\varphi(x_1',x_2',0)d\sigma'}{R^3}=\frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^a\frac{s'ds'}{R^3}$$

其中

$$R=\sqrt{(s-s'\cos\phi')^2+(0-s'\sin\phi')^2+z^2}$$
$$=\sqrt{r^2+s'^2-2ss'\cos\phi'}$$

为求远处电势的近似解，令 $\epsilon=s'/r\ll 1$ 及 $\lambda=s/r$，从而

$$R=r\sqrt{1+\Delta},\quad \text{where } \Delta=\epsilon^2-2\epsilon\lambda\cos\phi'$$

49

首先按照小量 Δ 做展开，得到

$$\frac{1}{R^3}=\frac{1}{r^3}(1+\Delta)^{-3/2}=\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\Delta+\frac{15}{8}\Delta^2-\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{r^3}\left[1-\frac{3}{2}(\epsilon^2-2\epsilon\lambda\cos\phi')+\frac{15}{8}(\epsilon^2-2\epsilon\lambda\cos\phi')^2-\cdots\right]$$

保留至小量 ϵ 的二级项，给出

$$\frac{1}{R^3}\approx\frac{1}{r^3}\left[1-\frac{3}{2}(\epsilon^2-2\epsilon\lambda\cos\phi')+\frac{15}{8}(-2\epsilon\lambda\cos\phi')^2\right]$$
$$=\frac{1}{r^3}\left[1+\epsilon\cdot 3\lambda\cos\phi'+\epsilon^2\cdot\frac{3}{2}(5\lambda^2\cos^2\phi'-1)\right]$$

零阶项给出电势的主要贡献。而由于一阶项对 ϕ' 的积分为零，因而主要修正项由二阶项给出。

50

将 $\epsilon=s'/r$ 代入前面的结果，即

$$\frac{1}{R^3}\approx\frac{1}{r^3}\left[1+\frac{s'}{r}\cdot 3\lambda\cos\phi'+\frac{s'^2}{r^2}\cdot\frac{3}{4}(5\lambda^2-2+5\lambda^2\cos 2\phi')\right]$$

因而

$$\varphi(s,z)=\frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^a\frac{s'ds'}{R^3}$$
$$\approx\frac{V_0 z}{2\pi r^3}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}a^2+\frac{a^4}{4r^2}\cdot\frac{3}{4}(5\lambda^2-2)\right]$$

将 $\lambda=s/r$ 代入，得到

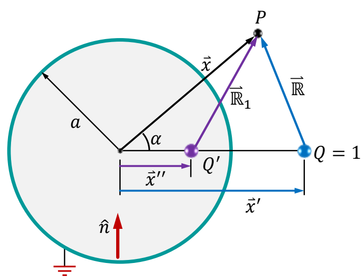
$$\varphi(s,z)\approx\frac{V_0 a^2 z}{2r^3}\left[1+\frac{3a^2}{8r^2}\left(5\frac{s^2}{r^2}-2\right)\right]$$

51

四、球外空间的格林函数

$$Q' = -\frac{a}{r'}$$

$$\vec{x}'' = \frac{a^2}{r'^2}\vec{x}'$$



利用电像法，球外空间的 Green 函数可以写为

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathbb{R}} - \frac{a/r'}{\mathbb{R}_1}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathbb{R}} - \frac{1}{\mathbb{R}_2}\right)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbb{R} = |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha} \\ \mathbb{R}_1 = |\vec{x} - \vec{x}''| = \left|\vec{x} - \dfrac{a^2}{r'^2}\vec{x}'\right| = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{a^2}{r'}\right)^2 - \dfrac{2a^2 r}{r'}\cos\alpha} \\ \mathbb{R}_2 = \dfrac{r'}{a}|\vec{x} - \vec{x}''| = \left|\dfrac{r'}{a}\vec{x} - \dfrac{a}{r'}\vec{x}'\right| = \sqrt{\left(\dfrac{rr'}{a}\right)^2 + a^2 - 2rr'\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \hat{r}\cdot\hat{r}' = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$$

- 当 $r' = a$ 时

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_2 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha} \triangleq R$$

由于边界上外法向指向球内，因而

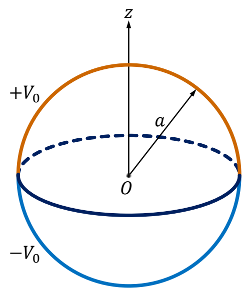
$$-\varepsilon_0\frac{\partial G}{\partial n'}\bigg|_{r'=a} = \varepsilon_0\frac{\partial G}{\partial r'}\bigg|_{r'=a} = \frac{r^2 - a^2}{4\pi a R^3}$$

- 球外第一类边值问题的解为

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r'>a}\rho(\vec{x}')\left(\frac{1}{\mathbb{R}} - \frac{1}{\mathbb{R}_2}\right)dV' + \frac{r^2 - a^2}{4\pi a}\oint_{r'=a}\frac{\varphi(\vec{x}')d\sigma'}{R^3}$$

将上式右边第一项的积分区域改为 $r' < a$，第二项的 $r^2 - a^2$ 改为 $a^2 - r^2$，就是球内第一类边值问题的解。

【例】半径为 a 的导体球壳被切成两半，彼此绝缘，分别加上电势 $\pm V_0$。证明远处的电场为偶极子场，并给出电偶极矩的表达式。



55

【解】球外的电势为

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{V_0(r^2-a^2)}{4\pi a}\cdot a^2\cdot\int_0^{2\pi} d\phi'\left[\int_0^{\pi/2}\sin\theta' d\theta' - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta' d\theta'\right]\frac{1}{R^3}$$

当 $r \gg a$ 时，保留至 a/r 的二阶小量，有

$$\frac{a(r^2-a^2)}{R^3} = \frac{a(r^2-\boxed{a^2})}{(r^2+\boxed{a^2}-2ar\cos\alpha)^{3/2}} \approx \frac{a}{r}\left(1+\frac{3a}{r}\cos\alpha\right)$$

其中

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

易见：一阶小量的积分相互抵消，而对二阶小量的积分有贡献的只有 $\cos\alpha$ 的第一项。

56

因此

$$\varphi(r,\theta) \approx \frac{3V_0a^2}{4\pi r^2}\cdot 2\pi\cdot\left[\int_0^{\pi/2} d\theta' - \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta'\right]\cos\theta\sin\theta'\cos\theta'$$

积分给出

$$\varphi(r,\theta) \approx \frac{3V_0a^2}{2r^2}\cos\theta\,,\quad (r \gg a)$$

或者将其写为

$$\varphi \approx \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad (r \gg a)$$

其中

$$\vec{p} \triangleq 6\pi\varepsilon_0 V_0 a^2\hat{z}$$

57

【方法二】勒让德多项式构成了区间$[-1,1]$的正交完备函数系。令 $x=\cos\theta$，球面上的电势可以写为

$$V(x)=V_0\,\mathrm{sgn}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}A_lP_l(x)$$

其中 A_l 可利用 $P_l(x)$ 的正交性给出

$$\frac{2}{2l+1}A_l=V_0\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}(x)\,P_l(x)dx$$

所以，l 为偶数时 $A_l=0$，而l为奇数时

$$A_l=(2l+1)V_0\int_0^1 P_l(x)dx$$

譬如

$$A_1=\frac{3}{2}V_0,\quad A_3=-\frac{7}{8}V_0$$

58

所以

$$V(x)=\sum_{l=1,3,\cdots}A_lP_l(x)=\frac{3}{2}V_0P_1(x)-\frac{7}{8}V_0P_3(x)+\cdots$$

球外电势为

$$\varphi_2(\vec{x})=\sum_{l=1,3,\cdots}A_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}P_l(\cos\theta)$$

当 $r\gg a$ 时

$$\varphi_2\approx\frac{3}{2}V_0\left(\frac{a}{r}\right)^2P_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}V_0\left(\frac{a}{r}\right)^4P_3(\cos\theta)$$

即有

$$\varphi_2\approx\frac{3V_0a^2}{2r^2}\cos\theta-\frac{7V_0a^4}{16r^4}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

59

球内电势为

$$\varphi_1(\vec{x})=\sum_{l=1,3,\cdots}A_l\left(\frac{r}{a}\right)^{l}P_l(\cos\theta)$$

当 $r\ll a$ 时

$$\varphi_1\approx\frac{3}{2}V_0\left(\frac{r}{a}\right)P_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}V_0\left(\frac{r}{a}\right)^3P_3(\cos\theta)$$

即有

$$\varphi_1\approx\frac{3V_0r}{2a}\cos\theta-\frac{7V_0r^3}{16a^3}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

60

格林函数按照本征函数展开

【背景】量子力学中，被限制在区域 V 内运动的粒子，其定态解 $\psi_n(\vec{x})$ 满足如下条件：

$$\begin{cases} \nabla^2\psi_n(\vec{x}) = -\lambda_n\psi_n(\vec{x}), & (\vec{x}\in V) \\ \psi_n(\vec{x}_S\in\partial V) = 0, & (\vec{x}_S\in\partial V) \end{cases}$$

- λ_n 称为**本征值**（它与能量本征值成正比），而 $\psi_n(\vec{x})$ 则称为**本征函数**。可以证明：
  - **本征值只能取分离的正实数值。**
  - **本征函数构成了区域 V 内的完备函数系。**正交归一化后

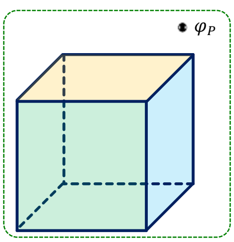
$$\int_V \psi_n^*(\vec{x})\psi_m(\vec{x})d^3x = \delta_{nm}, \quad \sum_n \psi_n^*(\vec{x}')\psi_n(\vec{x}) = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

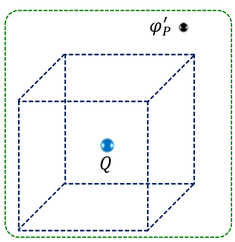
61

【思考】区域 V 内的第一类格林函数可以用本征函数展开为

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_n \frac{\psi_n^*(\vec{x}')\psi_n(\vec{x})}{\lambda_n}$$

【思考】在边长为 a 的立方体表面设计面电荷分布，使其在立方体外激发的电场与置于立方体中心的点电荷 Q 的电场相同。





62