

CH5. 静电场

§ 1 静电场的基本规律

§ 2 多极展开

§ 3 格林函数法

§ 4 分离变量法

1

概述

电动力学的基本方程是

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 j^\beta, \quad \partial_\alpha \bar{F}^{\alpha\beta} = 0, \quad \frac{dp^\alpha}{d\tau} = e F^{\alpha\beta} u_\beta$$

● 这些方程可以用三维矢量等价地表述为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon_0, & \nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= e \vec{E} \cdot \vec{v}, & \frac{d\vec{p}}{dt} &= e \vec{E} + e \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

● 静态情形下, 麦克斯韦方程组中电场和磁场解耦

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon_0, & \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

2

麦克斯韦方程组也可用电磁势等价地表示为

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = -\mu_0 j^\beta$$

● 电磁势与电磁场满足关系

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \Leftrightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

同一电磁场的电磁势可以相差一个规范变换

$$\vec{A}^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \psi \Leftrightarrow \vec{\varphi} = \varphi - \partial_t \psi, \quad \vec{\vec{A}} = \vec{A} + \nabla \psi$$

● 静态情形下, 场的基本方程也可用电磁势表示为

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_0, \quad \nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}$$

电磁势与电磁场的关系退化为

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

规范变换退化为

$$\vec{\varphi} = \varphi + C, \quad \vec{\vec{A}} = \vec{A} + \nabla \psi$$

3

§1 静电场的基本规律

4

一、静电场的基本方程

- 静电场的基本方程是

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

- 静电场的基本方程也可等价地用标势表示为

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}) / \epsilon_0$$

这一方程称为**泊松方程**。

- 在无源区域，静电势满足**拉普拉斯方程**：

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = 0$$

5

静电势与静电场

静电场的标势又称为静电势，其与静电场满足关系：

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla \varphi(\vec{x})$$

即有

$$\varphi(\vec{x}) = -\int_P^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

其中 P 称为电势的参考点。

- 相对于不同参考点的静电势，至多相差一个常数。
- 对于局域分布电荷，通常约定： $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$ 。

6

电势与电势能

静电势实际上就是单位电荷的电势能。处在外场 $\varphi_e(\vec{x})$ 中的点电荷 q ，当其位于处时所具有的电势能为：

$$U(\vec{x}) = q\varphi_e(\vec{x})$$

【物理含义】将 q 从参考点无限缓慢地移动至给定位置 \vec{r} 的过程中，外界抵抗静电力所做的功。

- 一般地，某个带电体 $\rho(\vec{x})$ 处在外场 $\varphi_e(\vec{x})$ 中的电势能为

$$U = \int \varphi_e dq = \int \rho(\vec{x})\varphi_e(\vec{x})dV$$

7

1. 存在导体时的基本方程

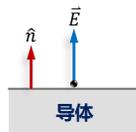
若空间中存在导体，则达到静电平衡时

- 在导体内部，场方程写为 $\vec{E} = 0$ 。

➤ 导体表面自动地是静电场的边界。

- 在导体表面外侧，场方程表现为边界条件：

$$\hat{n} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \hat{n} \times \vec{E} = 0$$



其中， \vec{E} 是导体表面外侧的电场，法向 \hat{n} 是指向导体外部。

➤ 边界条件可以用静电势等价地表示为

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S, \quad \varphi|_S = \text{const.}$$

➤ 导体表面的感应电荷并不能事先人为指定。

8

2. 存在介质时的基本方程

当空间中存在简单介质时，静电场的基本方程为

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad \nabla \times \vec{E} = 0, \quad \vec{D}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})$$

其中， $\vec{D} \triangleq \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 。

- 在介质交界面处，场方程表现为边值关系：

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f, \quad \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

➤ 介质内部和界面处的极化电荷并不能事先人为指定。

- 静电场仍可用静电势描述：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

9

介质中静电势的基本方程

将 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 代入高斯定律，可将介质中静电场的基本方程写为

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\vec{x})\nabla\varphi(\vec{x})] = -\rho_f(\vec{x})$$

对于分区均匀的简单介质：

- 在每一种介质中静电势满足泊松方程：

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{\rho_f(\vec{x})}{\varepsilon}$$

- 在介质界面处静电势满足边值关系：

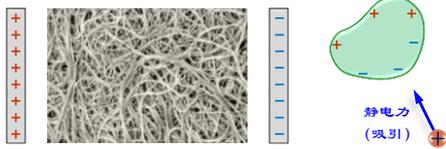
$$\left(\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right)_S = \sigma_f, \quad \varphi_1|_S = \varphi_2|_S$$

10

二、静电能

假设初始时空间中无自由电荷，而介质已经存在且固定于给定位置。在建立自由电荷过程中外界需要做多大的功？

【问题】 设在某个阶段，空间中已经积累了一定的自由电荷，空间中任一点 \vec{r} 处的自由电荷密度为 $\rho_0(\vec{r})$ ，电势为 $\varphi(\vec{r})$ 。现将每一点 \vec{r} 处的自由电荷密度增加无穷小量 $\delta\rho_0(\vec{r})$ ，外界需要抵抗静电力做多大功？



11

移动自由电荷做功

$$\delta A = \iiint_V \varphi \delta\rho_0 dV \quad \leftarrow \quad V = \text{全空间}$$

$$= \iiint_V \varphi \nabla \cdot (\delta\vec{D}) dV \quad \leftarrow \quad \nabla \cdot \delta\vec{D} = \delta\rho_0$$

$$= \iiint_V [\nabla \cdot (\varphi\delta\vec{D}) - \delta\vec{D} \cdot \nabla\varphi] dV \quad \leftarrow \quad \nabla \cdot (\varphi\vec{f}) = \varphi\nabla \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \nabla\varphi$$

$$= \oint_{\partial V} \varphi\delta\vec{D} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{E} \cdot \delta\vec{D} dV \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{数学高斯定理} \\ \text{以及 } \vec{E} = -\nabla\varphi \end{array}$$

$$= \iiint_V \vec{E} \cdot \delta\vec{D} dV \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{对局域电荷分布} \\ \varphi \sim 1/r, D \sim 1/r^2 \end{array}$$

12

极化功

移动自由电荷 $\delta\rho_0(\vec{r})$ 的过程中，外界抵抗静电力做的功为

$$\delta A = \iiint \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

电源由于做功而在空间单位体积内消耗的能量为：

$$\delta a = \vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} + \vec{E} \cdot \delta \vec{P}$$

- 右边第一项与过程无关：

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} = \delta \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right)$$

- 右边第二项为电源对单位体积介质做的极化功，即**极化功密度**，它通常与过程有关

$$\delta a' = \vec{E} \cdot \delta \vec{P}$$

13

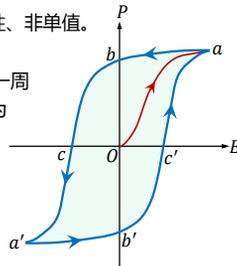
非线性损耗介质

此类介质， \vec{P} 与 \vec{E} 的关系为非线性、非单值。

- 对于铁电体，沿电滞回线循环一周外界对单位体积介质所做的功为

$$a' = \oint \delta a' = \oint \vec{E} \cdot \delta \vec{P}$$

= 电滞回线所围面积



这部分能量既不改变电场的能量，又不改变介质的极化状态，而是转化为热能，称为**电滞损耗**。

14

线性无损耗介质

对于**简单介质**（线性、各向同性），本构方程为

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi(\vec{r}) \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

因而

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{P} = \vec{E} \cdot \delta (\chi \epsilon_0 \vec{E}) = \chi \epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} = \vec{P} \cdot \delta \vec{E}$$

即有

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{P} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \delta \vec{P} + \vec{P} \cdot \delta \vec{E}) = \delta \left(\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E} \right)$$

- 对于**简单介质**，极化功与过程无关。

➢ 此结论对于线性、各向异性介质也成立。

15

多个带电体的自能与互能

多个带电体的静电能等于每一个带电体的自能与两两带电体之间的互能之和：

$$W = \sum_i W_i + \sum_{i < j} W_{ij} = W_{\text{自}} + W_{\text{互}}$$

- 设 Q_i 是带电体 i 的总电量, $\varphi^{(i)}$ 是带电体 i 产生的电势, 而 φ_i 则是带电体 i 之外的其他带电体产生的电势。则

$$W_{\text{自}} = \sum_i W_i = \frac{1}{2} \sum_i \int \varphi^{(i)} dq_i, \quad W_{\text{互}} = \sum_{i < j} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \int \varphi_i dq_i$$

- 当所有带电体尺度 \ll 它们间的距离时, 就给出了点电荷系统的相互作用能：

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i$$

22

4. 麦克斯韦应力张量

在静电情形下, 动量流密度张量写为

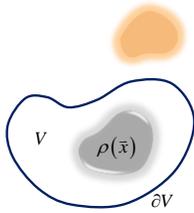
$$\vec{T} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{I} - \epsilon_0 \vec{E} \vec{E} = w(\vec{I} - 2\hat{E}\hat{E})$$

为了求某个带电体受到的静电力

$$\vec{F} = \int \vec{E} dq$$

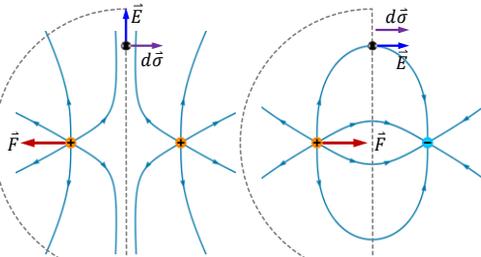
可任选一个将该带电体包含在内、且不含其它电荷的区域 V , 则有：

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{T} \\ &= + \oint_{\partial V} w [2\hat{E}(\hat{E} \cdot d\vec{\sigma}) - d\vec{\sigma}] \end{aligned}$$



23

$$\vec{F} = - \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{T} = \oint_{\partial V} w [2\hat{E}(\hat{E} \cdot d\vec{\sigma}) - d\vec{\sigma}]$$



左侧电荷受到向左的力, 即为排斥力。

左侧电荷受到向右的力, 即为吸引力。

24

三、唯一性定理

【问题】 设区域 V 内分布有给定的简单介质, 即 $\varepsilon(\vec{x} \in V)$ 已知, 并假设 V 内部的自由电荷分布 $\rho_f(\vec{x} \in V)$ 已知。在 $S = \partial V$ 上提何种边界条件可以保证区域 V 内电场的唯一性?

- 边界可能是人为划定的, 也可能是导体的表面, 还可能是无穷远处 (此时通常将边界条件称为渐近条件)。
 - 边界条件可能是人为指定的, 也可能来自场方程。
 - **总是约定边界法向 \hat{n} 指向求解区域 V 的外部。**
- 问题的由来:
 - 仅仅场方程不足以确定区域内部的电场;
 - 存在导体和电介质时, 不可能事先给定所有的电荷分布。

25

1. 合适的边界条件

- 设有两个解 φ' 和 φ'' 同时满足
 - 区域内部的自由电荷分布:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi') = -\rho_f = \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi'')$$
 - 区域边界上合适的边界条件
- 二者之差 $\Phi = \varphi' - \varphi''$ 满足
 - 区域内部无自由电荷分布:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = 0$$
 - 区域边界上的齐次边界条件

26

- 合适的边界条件应使得:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V dV \varepsilon (\nabla \Phi)^2 = \int_V dV [\varepsilon \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi)] \\ &= \int_V dV \nabla \cdot (\Phi \varepsilon \nabla \Phi) \end{aligned}$$

因此, 合适的边界条件就是满足如下关系的边界条件:

$$\oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot (\Phi \varepsilon \nabla \Phi) = \oint_{\partial V} d\sigma \left(\Phi \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) = 0$$

譬如, 可选择 $\Phi = \varphi' - \varphi''$ 满足:

$$\Phi|_S = 0 \quad \text{or} \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = 0 \quad \text{or} \quad \dots$$

27

2. Dirichlet 边界条件

在已知 $\rho_f(\vec{x} \in V)$ 的前提下，区域 V 内的电场 $\vec{E}(\vec{x})$ 和电势 $\varphi(\vec{x})$ 可由 **Dirichlet 边界条件** (第一类) 唯一确定：

$$\varphi(\vec{x}_S) = f(\vec{x}_S), \quad (\vec{x}_S \in S)$$

- $f(\vec{x}_S)$ 原则上可以是任意已知函数。
- 若 ∂V 的一部分是某个导体的表面，则 f 在该部分边界上 **必须为常数** (静电解的存在性)。
- 给定 ∂V 上的电势，也就给定了 ∂V 上电场的切向分量。
- Dirichlet 边界条件是否等价于给定 $\vec{E}_\tau|_S$?

(电场的切向分量决定了其旋度的法向分量)

28

3. Neumann 边界条件

在已知 $\rho_f(\vec{x} \in V)$ 的前提下，区域 V 内的电场 $\vec{E}(\vec{x})$ 可由 **Neumann 边界条件** (第二类) 唯一确定：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\vec{x}_S) = g(\vec{x}_S), \quad (\vec{x}_S \in S)$$

- 由此确定的 $\varphi(\vec{x})$ 可相差任一常数。
- Neumann 边界条件等价于

$$E_n(\vec{x}_S) = -g(\vec{x}_S)$$

【思考】 $g(\vec{x} \in S)$ 是否可以任意已知函数? $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = -\int_V \rho_f dV$

【思考】 是否总是有可能提出合适的 Neumann 边界条件?

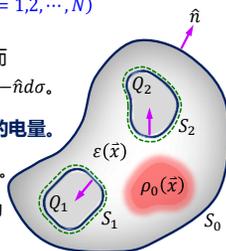
29

4. 导体边界条件

若 $S = \partial V$ 均为导体表面，则在已知 $\rho_f(\vec{x} \in V)$ 的前提下，区域 V 内的电场 $\vec{E}(\vec{x})$ 可通过给定诸内导体表面的总电量唯一确定：

$$Q_k = \oint_{S_k} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma}, \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

- 按约定， \hat{n} 指向区域 V 外部，因而 \hat{n} 指向各导体内部的，从而 $d\vec{\sigma} = -\hat{n}d\sigma$ 。
- Q_k 是 S_k 上电量，而非内导体 k 的电量。
- 由此确定的 $\varphi(\vec{x})$ 可相差任一常数。
- S_0 和每个 S_k 上的电势都应分别为某个常数。



30

证明

符合条件的两解之差 $\Phi = \varphi' - \varphi''$ 满足

$$\begin{cases} \oint_{S_k} d\sigma \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) = 0 = \oint_{S_0} d\sigma \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \\ \Phi|_{S_k} = c_k, \quad \Phi|_{S_0} = c_0 \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} d\sigma \left(\Phi \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) &= \oint_{S_0} d\sigma \left(\Phi \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \sum_k \oint_{S_k} d\sigma \left(\Phi \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \\ &= c_0 \oint_{S_0} d\sigma \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \sum_k c_k \oint_{S_k} d\sigma \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

31

【例】 考察无界空间的Dirichlet边界问题（设电荷局域分布）：

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x})|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

显然

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{x}') dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

符合于所给电荷分布和渐近条件，因而是唯一正确的解。

● 此式适用的条件是

- 电势以无穷远处作为参考点；
- 全空间的电荷分布已知，且是局域的。

32

● 由此解可得给定电荷分布激发的静电场：

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla \varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{x}') dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\mathbb{R}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} dq$$

➢ 此结论也可由亥姆霍兹定理直接给出：

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\nabla' \cdot \vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\nabla' \times \vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}') dV' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathbb{R}} \rho(\vec{x}') dV' \end{aligned}$$

➢ 此结论还可利用后面的格林函数法给出。

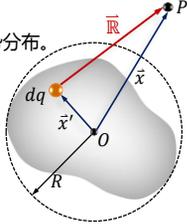
33

一、静电势的多极展开

设局域电荷分布在半径为 R 的球内，其所激发的静电势为：

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad \text{where } dq = \rho(\vec{x}') dV'$$

- 本节关注远场区 ($r = |\vec{x}| \gg R$) 的电势分布。
- 为了获得近似解，我们以 R/r 或者说 $\epsilon = r'/r$ 为小量 (其中 $r' = |\vec{x}'|$)，然后按该小量做泰勒展开。



37

$1/|\mathbb{R}|$ 按照 r'/r 展开

我们知道

$$\frac{1}{|\mathbb{R}|} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = e^{-\vec{x}' \cdot \nabla} \frac{1}{r} = \left[1 - \vec{x}' \cdot \nabla + \frac{1}{2!} (\vec{x}' \vec{x}' : \nabla \nabla) + \dots \right] \frac{1}{r}$$

由于

$$\vec{\nabla} : \nabla \nabla \frac{1}{r} = \nabla^2 \frac{1}{r} = 0, \quad (r \neq 0)$$

因此

$$\frac{1}{|\mathbb{R}|} = \frac{1}{r} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{6} (3\vec{x}' \vec{x}' - r'^2 \vec{\nabla} \vec{\nabla}) : \nabla \nabla \frac{1}{r} + \dots$$

【注】 $\vec{x}' \vec{x}'$ 和 $3\vec{x}' \vec{x}' - r'^2 \vec{\nabla} \vec{\nabla}$ 都是对称张量，而后者还是无迹的。

38

静电势的展开

利用前面的结果，远场区静电势可以近似为：

$$\varphi(\vec{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla \frac{1}{r} \right]$$

其中

$$Q \triangleq \int dq, \quad \vec{p} \triangleq \int \vec{x}' dq, \quad \vec{D} \triangleq \int (3\vec{x}' \vec{x}' - r'^2 \vec{\nabla} \vec{\nabla}) dq$$

分别称为电荷分布的**总电量**、**电偶极矩矢量**和**电四极矩张量**。

- \vec{D} 是对称、无迹张量。
- 总可以找到**一个坐标系 (主轴系)**，使得

$$D = \text{diag}\{D_1, D_2, D_3\} \quad \text{where } D_1 + D_2 + D_3 = 0$$

39

● 利用

$$\begin{cases} \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{\vec{x}}{r^3} \\ \nabla \nabla \frac{1}{r} = \frac{3\hat{r}\hat{r} - \vec{I}}{r^3}, (r \neq 0) \end{cases}$$

以及 $\text{tr} \vec{D} = \vec{D} \cdot \vec{I} = 0$, 可将电势写为 $\varphi \approx \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$, 其中

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \varphi_1 = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi_2 = \frac{\hat{r} \cdot \vec{D} \cdot \hat{r}}{8\pi\epsilon_0 r^3}$$

分别为点电荷、电偶极子和电四极子激发的静电势。

40

静电场的展开

由 $\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\varphi(\vec{x})$, 远场区静电场可以近似为:

$$\vec{E} \approx \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\nabla\varphi_0 - \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2$$

三项分别为点电荷、电偶极子和电四极子的静电势。不难证明

$$\vec{E}_0 = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{E}_1 = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \vec{E}_2 = \frac{5(\hat{r} \cdot \vec{D} \cdot \hat{r})\hat{r} - 2\vec{D} \cdot \hat{r}}{8\pi\epsilon_0 r^4}$$

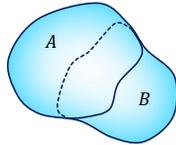
$$\begin{aligned} -\nabla \frac{\vec{x} \cdot \vec{D} \cdot \vec{x}}{r^5} &= -\left[(\vec{x} \cdot \vec{D} \cdot \vec{x}) \nabla \frac{1}{r^5} + \frac{1}{r^5} \nabla (\vec{x} \cdot \vec{D} \cdot \vec{x}) \right] \\ &= -\left[(\vec{x} \cdot \vec{D} \cdot \vec{x}) \frac{-5\hat{r}}{r^6} + \frac{1}{r^5} (\vec{D} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{D}) \right] \\ &= \frac{5(\hat{r} \cdot \vec{D} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^4} - \frac{2\vec{D} \cdot \hat{r}}{r^4} \end{aligned}$$

41

二、电多极矩的性质

● 叠加原理

$$\begin{cases} Q_{A+B} = Q_A + Q_B \\ \vec{p}_{A+B} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \\ \vec{D}_{A+B} = \vec{D}_A + \vec{D}_B \end{cases}$$



【思考】若带电体中正、负电荷两分别为 Q_+ 和 Q_- , 则

$$\vec{p} = Q_+ \vec{x}_+ + Q_- \vec{x}_-, \quad \text{where } \vec{x}_\pm \triangleq \int \vec{x}' dq_\pm / Q_\pm$$

● 请自行证明:

- \vec{p} 与原点的选择有关, 除非 $Q = 0$ 。
- \vec{D} 与原点的选择有关, 除非 $Q = 0 = \vec{p}$ 。

42

- 若电荷分布关于坐标原点对称，则其电偶极矩为零

$$\rho(\vec{x}) = \rho(-\vec{x}) \Rightarrow \vec{p} = 0$$

【证明】 \vec{p} 作为矢量，在反演变换下其分量变为：

$$p'_1 = -p_1, \quad p'_2 = -p_2, \quad p'_3 = -p_3$$

而对称性意味着：

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = p_3$$

所以 $\vec{p} = 0$ 。

- 如果体系的电荷分布具有球对称性，则其电四极矩为零：

$$\rho(\vec{x}) = \rho(r) \Rightarrow \vec{D} = 0$$

【证明】球对称性意味着：在主轴系下， $D \propto I$ ；
无迹意味着 D 的三个对角元只能等于零。

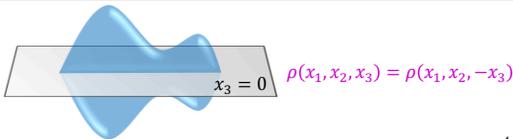
43

- 若 $x_3 = 0$ 平面是电荷分布对称平面，则

➢ \vec{p} 没有 x_3 轴方向的分量，即 $\vec{p} = p_1 \hat{x}_1 + p_2 \hat{x}_2$

➢ x_3 轴为 \vec{D} 的主轴之一，即 $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}$

【思考】请利用 p_i 和 D_{ij} 的变化规律以及对称性证明此结论。



44

- 若 x_3 轴是电荷分布的 $n(n=2,3,\dots)$ 次对称轴，则

➢ $\vec{p} = p \hat{x}_3$ ，且 x_3 轴为 \vec{D} 的主轴之一。

➢ 若 $n \geq 3$ ，则垂直于 x_3 轴的任一轴皆为主轴，并有

$$D = \text{diag}\{D_1, D_2, D_3\} \quad \text{where } D_1 = D_2 = -D_3/2$$

【思考】请证明此结论。



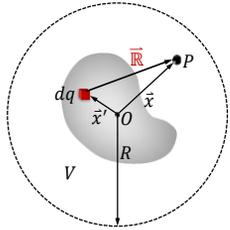
【注】 x_3 轴是电荷分布的 n 次对称轴意指（其中 $\theta_n = 2\pi/n$ ）

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \rho(x_1 \cos \theta_n - x_2 \sin \theta_n, x_1 \sin \theta_n + x_2 \cos \theta_n, x_3)$$

45

【思考】 设 V 是将所有电荷都包含进来的任一球体，证明

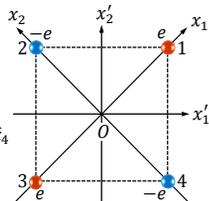
$$\vec{p} = -3\epsilon_0 \int_V \vec{E}(\vec{x}) d^3x$$



46

【例】 边长为 a 的正方形四个顶点处正负相间放置四个等量异号点电荷，试计算其电四极矩。

【解】 总电量以及电偶极矩为零。如图建主轴系，各点电荷位矢为



$$\vec{x}_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 = -\vec{x}_3, \quad \vec{x}_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \hat{x}_2 = -\vec{x}_4$$

因此

$$\vec{D} = 2e \left(3\vec{x}_1\vec{x}_1 - \frac{a^2}{2}\vec{I} \right) - 2e \left(3\vec{x}_2\vec{x}_2 - \frac{a^2}{2}\vec{I} \right) = 6e(\vec{x}_1\vec{x}_1 - \vec{x}_2\vec{x}_2)$$

$$\Rightarrow \vec{D} = 3ea^2(\hat{x}_1\hat{x}_1 - \hat{x}_2\hat{x}_2)$$

【思考】 写出带撇系中电四极矩的分量 D'_i ， D'_i 与 D 有何关系？

47

【例】 总电量为 Q 的均匀带电椭球体，三个半轴长分别为 a_1, a_2, a_3 。求其相对于中心的电四极矩。

【解】 椭球体积及电荷分布体密度分别为

$$V = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{3}, \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi a_1 a_2 a_3}$$

以椭球的几何主轴作为坐标轴建（主轴）系，则

$$D_1 = \rho \int (3x_1^2 - r^2) d^3x = \frac{3Q}{4\pi a_1 a_2 a_3} \int (2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) d^3x$$

做变量代换： $x_i = a_i x'_i$ ，上式写为

$$D_1 = \frac{3Q}{4\pi} \int_{r' \leq 1} (2a_1^2 x_1'^2 - a_2^2 x_2'^2 - a_3^2 x_3'^2) d^3x'$$

48

由于 $x_1'^2, x_2'^2, x_3'^2$ 的积分相同, 均为

$$\frac{1}{3} \int_{r' \leq 1} r'^2 d^3x' = \frac{1}{3} \int_0^1 r'^4 dr' \int d\Omega = \frac{4\pi}{15}$$

因此

$$D_1 = \frac{Q}{5} (2a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)$$

类似有

$$D_2 = \frac{Q}{5} (2a_2^2 - a_3^2 - a_1^2)$$

$$D_3 = \frac{Q}{5} (2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2)$$

49

旋转椭球

对于旋转椭球: $a_1 = a_2 = a, a_3 = b$, 有

$$D_3 = \frac{2Q}{5} (b^2 - a^2), \quad D_1 = D_2 = -\frac{1}{2} D_3$$

从而

$$\vec{D} = -\frac{1}{2} D_3 (\hat{x}_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \hat{x}_2) + D_3 \hat{x}_3 \hat{x}_3 = \frac{1}{2} D_3 (3\hat{x}_3 \hat{x}_3 - \vec{I})$$

采用球坐标系, 有

$$\varphi_2 = \frac{\hat{r} \cdot \vec{D} \cdot \hat{r}}{8\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{D_3}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

50

由于 $\vec{p} = 0$, 因此 $\varphi_1 = 0$ 。所以, 考虑主要贡献及主要修正项后, 远场区的电势近似为

$$\varphi \approx \varphi_0 + \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q(b^2 - a^2)}{40\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

而电场则为

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \approx \vec{E}_0 + \vec{E}_2$$

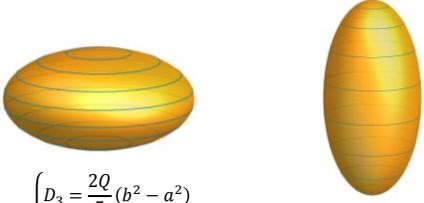
其中

$$\vec{E}_0 = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{E}_2 = -\frac{3Q(b^2 - a^2)}{40\pi\epsilon_0 r^4} [\hat{r}(3 \cos^2 \theta - 1) + \theta \sin 2\theta]$$

51

长椭球与扁椭球

扁椭球： $a > b$ 长椭球： $a < b$



$$\begin{cases} D_3 = \frac{2Q}{5}(b^2 - a^2) \\ \vec{E}_2 = \frac{3Q(b^2 - a^2)}{40\pi\epsilon_0 r^4} [\hat{r}(3\cos^2\theta - 1) + \hat{\theta}\sin 2\theta] \end{cases}$$

52

三、外电场中的小带电体

任一空间坐标的函数可如下泰勒展开：

$$f(\vec{x} + \vec{x}') = e^{\vec{x}' \cdot \nabla} f(\vec{x}) = \left[1 + \vec{x}' \cdot \nabla + \frac{1}{2!} \vec{x}' \vec{x}' : \nabla \nabla + \dots \right] f(\vec{x})$$

如果

$$\vec{T} : \nabla \nabla f(\vec{x}) = \nabla^2 f(\vec{x}) = 0$$

则其泰勒展开可写为

$$f(\vec{x} + \vec{x}') = \left[1 + \vec{x}' \cdot \nabla + \frac{1}{6} (3\vec{x}' \vec{x}' - r'^2 \vec{T}) : \nabla \nabla + \dots \right] f(\vec{x})$$

因而

$$\int f(\vec{x} + \vec{x}') dq = \left[Q + \vec{p} \cdot \nabla + \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla + \dots \right] f(\vec{x})$$

53

1. 电势能

带电体在外场 φ_e 中的电势能为

$$U = \int \varphi_e(\vec{x} + \vec{x}') dq$$

如果在带电体内并无激发外场的电荷，从而

$$\nabla^2 \varphi_e(\vec{x}) = 0$$

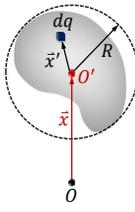
那么，小带电体在外场中的电势能近似为

$$U \approx Q\varphi_e(\vec{x}) + \vec{p} \cdot \nabla \varphi_e(\vec{x}) + \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla \varphi_e(\vec{x})$$

亦即

$$U \approx Q\varphi_e(\vec{x}) - \vec{p} \cdot \vec{E}_e(\vec{x}) - \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \vec{E}_e(\vec{x}) = U_0 + U_1 + U_2$$

其中

$$U_0 = Q\varphi_e, \quad U_1 = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e, \quad U_2 = -\frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \vec{E}_e$$


54

2. 静电力

带电体在外场中受到的静电力为

$$\vec{F} = \int \vec{E}_e(\vec{x} + \vec{x}') dq$$

如果在带电体内部并无激发外场的电荷，从而

$$\nabla^2 \vec{E}_e = -\nabla^2 [\nabla \varphi_e(\vec{x})] = -\nabla [\nabla^2 \varphi_e(\vec{x})] = 0$$

那么，小带电体在外场中受到的静电力近似为：

$$\begin{aligned} \vec{F} &\approx Q \vec{E}_e(\vec{x}) + \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_e(\vec{x}) + \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla \vec{E}_e(\vec{x}) \\ &= -\nabla U_0(\vec{x}) - \nabla U_1(\vec{x}) - \nabla U_2(\vec{x}) \end{aligned}$$

【注】 最后一个等号用到带电体的电荷分布不变及 $\nabla \times \vec{E}_e = 0$ 。

55

3. 静电力矩

带电体在外场中受到的（相对于 O' 点）静电力矩为

$$\vec{\tau} = \int \vec{x}' \times \vec{E}_e(\vec{x} + \vec{x}') dq$$

将 $\vec{E}_e(\vec{x} + \vec{x}')$ 按照 \vec{x}' 做泰勒展开，保留至线性项，得到

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &\approx \int \vec{x}' \times \vec{E}_e(\vec{x}) dq + \int \vec{x}' \times [\vec{x}' \cdot \nabla \vec{E}_e(\vec{x})] dq \\ &= \left(\int \vec{x}' dq \right) \times \vec{E}_e(\vec{x}) + \left[\left(\int \vec{x}' \vec{x}' dq \right) \cdot \nabla \right] \times \vec{E}_e(\vec{x}) \end{aligned}$$

因此，利用 $(\vec{l} \cdot \nabla) \times \vec{E}_e = \nabla \times \vec{E}_e = 0$ 就得到

$$\vec{\tau} \approx \vec{p} \times \vec{E}_e(\vec{x}) + \frac{1}{3} (\vec{D} \cdot \nabla) \times \vec{E}_e(\vec{x}) = \vec{p} \times \vec{E}_e + \frac{1}{3} \nabla \cdot (\vec{D} \times \vec{E}_e)$$

56

四、电势在球坐标系中展开

1. 正交完备函数系

设 $\{\psi_n(x)\}$ 区间 $[a, b]$ 上的**正交完备函数系**。

• **正交归一**是指： $\int_a^b \psi_n^*(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm}$

• **完备**是指任一行为良好的函数 $f(x)$ 可以表示为其线性组合：

$$f(x) = \sum_n C_n \psi_n(x), \quad \text{where } C_n \triangleq \int_a^b \psi_n^*(x) f(x) dx$$

完备性可表示为： $\sum_n \psi_n^*(x') \psi_n(x) = \delta(x - x')$

【注】 $\sum_n a_n \psi_n(x) = \sum_n b_n \psi_n(x) \Leftrightarrow a_n = b_n$

57

正弦函数

下面的函数构成了区间 $[0, a]$ 上正交归一的完备函数系：

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{正交性条件: } \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \delta_{nm} \\ \text{完备性条件: } \sum_n \sin \frac{n\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = \frac{a}{2} \delta(x - x') \end{array} \right.$$

58

勒让德多项式

勒让德多项式可由罗德里格斯公式 (Rodriguez) 定义

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

其中 $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ，而 $|x| \leq 1$ 。

• 几个低阶的勒让德多项式为

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{【注】 } P_{2n}(x) \text{ 为偶函数,} \\ P_{2n+1}(x) \text{ 为奇函数.} \end{array}$$

59

• 勒让德多项式构成了区间 $[-1, 1]$ 上的正交完备函数系：

$$\triangleright \text{正交条件: } \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

$$\triangleright \text{完备条件: } \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x - x')$$

• 勒让德多项式是在区间 $[-1, 1]$ 上、如下定义的 Sturm-Liouville 本征值问题的本征函数

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right] + l(l+1)P(x) = 0 \\ P(+1) \text{ and } P(-1) \text{ are finite} \end{array} \right.$$

60

球谐函数

球谐函数定义如下

$$Y_{lm}(\Omega) = Y_{lm}(\theta, \phi) \triangleq \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

其中 $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, 而 m 为满足 $|m| \leq l$ 的整数。

- $P_l^m(x)$ 称为**缔合勒让德多项式**

$$P_l^m(x) \triangleq \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

- 球谐函数具有对称性：

$$Y_{l,-m}(\Omega) = (-1)^m Y_{lm}^*(\Omega)$$

61

$\ell = 0$	$m = 0$	$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$Y_{10} \sim \cos \theta = \frac{z}{r}$
$\ell = 1$	$m = 1$	$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$	$Y_{1\pm 1} \sim \sin \theta e^{\pm i\phi}$
	$m = 0$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$= \frac{x \pm iy}{r}$
$\ell = 2$	$m = -1$	$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$	$Y_{20} \sim 3 \cos^2 \theta - 1$
	$m = 2$	$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$	$= \frac{3z^2 - r^2}{r^2}$
	$m = 1$	$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$	$Y_{2\pm 1} \sim \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$
	$m = 0$	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$= \frac{z(x \pm iy)}{r^2}$
	$m = -1$	$Y_{2,-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi}$	$Y_{2\pm 2} \sim \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$
	$m = -2$	$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$	$= \frac{(x \pm iy)^2}{r^2}$

62

- 球谐函数是单位球面上的正交、归一、完备的函数系：

➢ **正交条件：**

$$\int Y_{l'm'}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

➢ **完备条件：**

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi')$$

- 球谐函数是如下定义的本征值问题的本征函数

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \\ Y(\theta, \phi) \text{ is finite and single-valued} \end{cases}$$

63

2. 电势在球坐标系中展开

相对距离可以写为 $\mathbb{R} = |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 - 2rr'\hat{r} \cdot \hat{r}' + r'^2}$ 。根据 r' 与 r 的大小关系，我们将 $1/\mathbb{R}$ 分别写为

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathbb{R}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2(r'/r)\hat{r} \cdot \hat{r}' + (r'/r)^2}}, & \text{when } r'/r < 1 \\ \frac{1}{\mathbb{R}} = \frac{1}{r'\sqrt{1 - 2(r/r')\hat{r} \cdot \hat{r}' + (r/r')^2}}, & \text{when } r/r' < 1 \end{cases}$$

或将二者统一写为

$$\frac{1}{\mathbb{R}} = \frac{1}{r_>\sqrt{1 - 2(\hat{r} \cdot \hat{r}')t + t^2}}, \quad \text{where } t \triangleq \frac{r_<}{r_>} < 1$$

这里， $r_>$ ($r_<$) 是 r 和 r' 中的较大 (小) 者。采用球坐标系，有

$$\hat{r} \cdot \hat{r}' = \cos \alpha = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

64

1/ \mathbb{R} 按勒让德多项式展开

可证明如下泰勒展开：

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x), \quad \text{where } 0 < t < 1, |x| \leq 1$$

上式左边的函数则称为勒让德多项式的**生成函数**。

• 由此，我们有

$$\frac{1}{\mathbb{R}} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}')$$

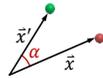
65

1/ \mathbb{R} 按球谐函数展开

可证明：勒让德多项式 $P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}')$ 可展开为：

$$P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

其中， (θ, ϕ) 和 (θ', ϕ') 分别是 \hat{r} 和 \hat{r}' 的极角与方位角。因而



$$\hat{r} \cdot \hat{r}' = \cos \alpha = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

• 由此，我们有

$$\frac{1}{\mathbb{R}} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)$$

66

3. 静电势在球外展开

如果电荷分布在半径为 R 的球内，则球外任一点的电势可写为

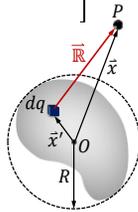
$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \right] dq\end{aligned}$$

即有

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}(\Omega)$$

其中

$$B_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int r'^l Y_{lm}^*(\Omega') dq$$



67

- 如果电荷分布具有绕着极轴的转动对称性，即 $\rho(\vec{x}) = \rho(r, \theta)$ ，则电势也不会依赖于方位角 ϕ ，从而

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} B_{l0} \frac{Y_{l0}(\Omega)}{r^{l+1}}$$

其中

$$B_{l0} = \frac{4\pi}{2l+1} \int r'^l Y_{l0}^*(\Omega') dq, \quad Y_{l0}(\Omega) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

因此，此情形下球外电势可以表示为：

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}}, \quad B_l = \int r'^l P_l(\cos \theta') dq$$

68

4. 静电势在球内展开

如果电荷分布在半径为 R 的球外，则球内任一点的电势可写为

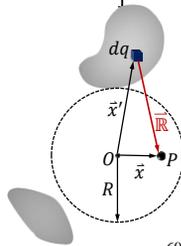
$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r}{r'}\right)^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \right] dq$$

即有

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\Omega)$$

其中

$$A_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int \frac{Y_{lm}^*(\Omega')}{r'^{l+1}} dq$$



69

- 如果电荷分布具有绕着极轴的转动对称性，即 $\rho(\vec{x}) = \rho(r, \theta)$ ，则电势也不会依赖于方位角 ϕ ，从而

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} A_{l0} r^l Y_{l0}(\Omega)$$

其中

$$A_{l0} = \frac{4\pi}{2l+1} \int \frac{Y_{l0}^*(\Omega')}{r'^{l+1}} dq, \quad Y_{l0}(\Omega) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$$

因此，此情形下球内电势可以表示为：

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), \quad A_l = \int \frac{P_l(\cos\theta')}{r'^{l+1}} dq$$

70

【例】 已知电荷全部分布于半径为 R 的球面上，且球面上的电势为：

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \sin\theta \cos\theta \cos\phi$$

试求全空间的电势分布。

【解】 球面上的电势可以表示为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} (C_+ Y_{2,1} + C_- Y_{2,-1})$$

其中， C_{\pm} 为常数。



$$Y_{2\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{5}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\phi}$$

71

由唯一性定理，不妨令球内电势 φ_1 和球外电势 φ_2 分别为：

$$\begin{cases} \varphi_1(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{r^2}{R^2} (A_+ Y_{2,1} + A_- Y_{2,-1}), & (r < R) \\ \varphi_2(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{R^3}{r^3} (B_+ Y_{2,1} + B_- Y_{2,-1}), & (r > R) \end{cases}$$

由 $r = R$ 的边界条件并利用球谐函数的正交性，得到

$$A_+ = B_+ = C_+, \quad A_- = B_- = C_-$$

因此

$$\begin{cases} \varphi_1(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \sin\theta \cos\theta \cos\phi, & (r < R) \\ \varphi_2(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{r^3} \sin\theta \cos\theta \cos\phi, & (r > R) \end{cases}$$

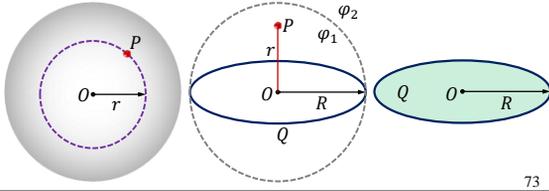
72

【思考】 试利用多极展开方法计算球对称电荷分布 $\rho = \rho(r)$ 在空间各点激发的电势。

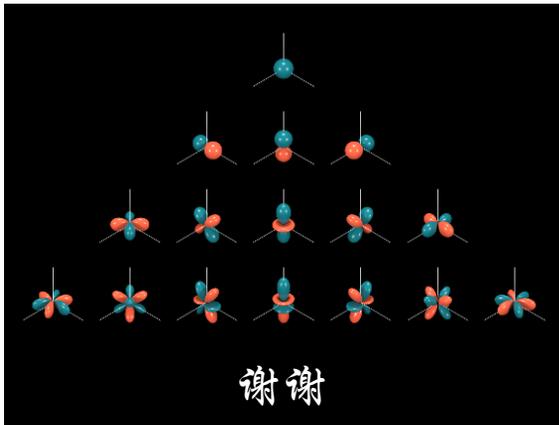
【思考】 求球面上的面电荷分布 $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ 激发的电势分布。

【思考】 已知电荷仅分布于半径为 R 的球面上，且球面上电势为 $V = V_0 \cos 3\theta$ 。试求球面上的电荷分布。

【思考】 求均匀带电圆环/盘在空间各点激发的电势。



73



谢谢
