§6 诺特定理

1

一、概述

场系统的诺特定理表述为：系统的每一个连续对称性都对应一个守恒流，从而对应一个守恒荷。

- 拉格朗日密度在场变换下的不变性或规范不变性，称为场系统的**对称性**。
  - 场的变换可以是场空间内部的变化，例如
    $$A^\alpha(x) \quad \longrightarrow \quad A'^\alpha(x) = A^\alpha(x) + \partial^\alpha\psi(x)$$
  - 场的变换也可以是由时空坐标改变所诱导出的，例如
    $$x^\alpha \quad \longrightarrow \quad x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha$$
    可诱导出矢量场 $A^\alpha(x)$ 的如下变换
    $$A^\alpha(x) \quad \longrightarrow \quad A'^\alpha(x') = \Lambda^\alpha{}_\beta A^\beta(x)$$

2

- 依赖于某些参数的场变换，如果这些参数可以连续取值，并且当这些参数取合适的数值时场是不变的，则这样的变换称为**连续变换**。
  - 譬如，以 ϵ 为参数的如下变换
    $$A^\alpha(x) \quad \longrightarrow \quad A'^\alpha(x) = A^\alpha(x) + \epsilon\partial^\alpha\psi(x)$$
    通常将无穷小的变换记为
    $$A^\alpha(x) \quad \longrightarrow \quad A'^\alpha(x) = A^\alpha(x) + \delta A^\alpha(x)$$
  - 又如，正规洛伦兹变换（6个参数）或时空平移（4个参数）诱导的场变换。
- 系统的**连续对称性**指的就是拉格朗日密度在场的连续变换下的不变性或规范不变性。
  - 连续变换也就是存在无穷小形式的变换。

3

二、内部对称性与守恒定律

考察张量场 $\varphi_I(x)$ 的无穷小改变

$$\varphi_I(x) \quad\longrightarrow\quad \varphi_I'(x) = \varphi_I(x) + \delta\varphi_I(x)$$

由此引起的拉格朗日密度的改变为

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &\triangleq \mathcal{L}(\varphi'(x), \partial\varphi'(x), x) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x)\\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}\delta\varphi_I + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\delta(\partial_\mu\varphi_I)\\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\delta\varphi_I\right] + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\right]\delta\varphi_I\end{aligned}$$

利用拉格朗日方程，得到

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\delta\varphi_I\right]$$

4

- 若变换 $\varphi_I'(x) = \varphi_I(x) + \delta\varphi_I(x)$ 下 $\mathcal{L}$ 是**不变**的，即

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

则 $\delta\varphi_I$ 是体系的一种对称性，与之相联系的守恒流为

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\delta\varphi_I$$

- 若变换 $\varphi_I'(x) = \varphi_I(x) + \delta\varphi_I(x)$ 下 $\mathcal{L}$ 是**规范不变**的，即

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu C^\mu$$

则 $\delta\varphi_I$ 也是体系的一种对称性，与之相联系的守恒流为

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\delta\varphi_I - C^\mu$$

5

【例】考察复标量场 $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$，其中 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 均为实标量场。无源情形下，该场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + \kappa^2\varphi^*\varphi\right)$$

- 运动方程为

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^*} \triangleq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} = 0$$

由此就给出复标量场 $\varphi(x)$ 满足的Klein-Gordon方程：

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu - \kappa^2\right)\varphi(x) = 0$$

6

整体规范变换

显然，拉格朗日密度在如下定义的整体规范变换下是不变的：

$$\varphi(x) \longrightarrow e^{i\theta}\varphi(x), \quad \varphi^*(x) \longrightarrow e^{-i\theta}\varphi^*(x)$$

- 由于

$$\delta\varphi(x) = i\theta\varphi(x), \quad \delta\varphi^*(x) = -i\theta\varphi^*(x)$$

因而守恒流为

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\delta\varphi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\delta\varphi^*$$

乘上合适的倍数后，可使其具有电流密度的量纲

$$\mathcal{J}^\mu(x) = -\hbar c\{[\partial^\mu\varphi^*(x)]\varphi(x) - \varphi^*(x)[\partial^\mu\varphi(x)]\}$$

7

【例】设 $A_\mu(x)$ 为电磁势，考察规范变换

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\psi(x)$$

在规范变换下，电磁场拉格朗日密度的改变为

$$\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}_f + \delta\mathcal{L}_{pf} = \delta\mathcal{L}_{pf}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta\mathcal{L} = J^\mu\delta A_\mu = J^\mu\partial_\mu\psi$$

$$\Longrightarrow \quad \delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\psi J^\mu) - \psi\partial_\mu J^\mu$$

因此，如果 $\mathcal{L}$ 是规范不变的，则必须有

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

拉格朗日密度的规范不变性意味着电荷守恒。

8

三、无穷小的庞加莱变换

无穷小庞加莱变换为

$$x'^\alpha = x^\alpha + \Omega^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha$$

其中，$\Omega^\alpha{}_\beta$ 和 a^α 均为无穷小参数，且

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}, \quad \text{where } \omega \triangleq g\Omega$$

- 定义**坐标的变分**

$$\delta x^\alpha \triangleq x'^\alpha - x^\alpha$$

  - 显然

$$\delta x^\alpha = \Omega^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \delta x_\alpha = \omega_{\alpha\beta}x^\beta + a_\alpha$$

  - 由于 $\partial_\alpha\delta x^\alpha = \Omega^\alpha{}_\beta\partial_\alpha x^\beta = \Omega^\alpha{}_\alpha$，因而

$$\partial_\alpha\delta x^\alpha = 0$$

9

1. 场的变分

- 坐标变分导致张量场 φ_I 的如下改变：

$$\delta\varphi_I(x) \triangleq \varphi_I'(x') - \varphi_I(x)$$

其中，$x' = x + \delta x$。将 $\delta\varphi_I$ 称为场 φ_I 的**全变分**。

  - $\delta\varphi_I$ 包含张量变换引起的场本身的改变，也包含时空坐标变换引起的场的改变。

- 张量场 φ_I 的**形式变分**定义为

$$\bar{\delta}\varphi_I(x) \triangleq \varphi_I'(x) - \varphi_I(x)$$

  - $\bar{\delta}\varphi_I$ 反映同一时空坐标处张量变换引起的场的改变。
  - $\delta\varphi_I$ 和 $\bar{\delta}\varphi_I$ 总是指的其定义式右边 δx 的线性项。

10

场的形式变分与全变分之间的关系

由于

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\varphi_I(x) &= \varphi_I'(x) - \varphi_I(x)\\ &= -[\varphi_I'(x') - \varphi_I'(x)] + [\varphi_I'(x') - \varphi_I(x)]\\ &= -\delta x_\mu \partial^\mu \varphi_I'(x) + \delta\varphi_I(x)\end{aligned}$$

因此，场的两种变分之间满足关系（不再明显写出自变量 x）

$$\bar{\delta}\varphi_I = \delta\varphi_I - \delta x_\mu \partial^\mu \varphi_I$$

- 标量场的全变分：$\delta\varphi(x) = 0$
- 矢量场的全变分：$\delta A_\alpha = \omega_{\alpha\beta} A^\beta$
- 张量场的全变分：$\delta T_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} T^{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}\omega_{\beta\nu} T^{\mu\nu}$

11

2. 拉格朗日密度的变分

坐标变分导致场的拉格朗日密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x)$ 的如下变分：

$$\delta\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x) \triangleq \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'\varphi'(x'), x') - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x)$$

将其拆为两项之和：

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= [\mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'\varphi'(x'), x') - \mathcal{L}(\varphi'(x), \partial\varphi'(x), x)]\\ &\quad + [\mathcal{L}(\varphi'(x), \partial\varphi'(x), x) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x)]\\ &= \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}\bar{\delta}\varphi_I + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_I)}\partial_\nu(\bar{\delta}\varphi_I)\right]\end{aligned}$$

注：$\partial_\nu\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}$ 对 x^ν 的全偏导数：固定其他时空坐标对 x^ν 求偏导数。而非固定与场相关的量 $(\varphi, \partial\varphi)$，对 x^ν 求偏导数。

12

利用莱布尼兹法则，有：

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} + \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_I)} \bar{\delta}\varphi_I \right] + \boxed{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_I} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_I)} \right]} \bar{\delta}\varphi_I$$

利用 $\partial_\alpha \delta x^\alpha = 0$ 以及场的拉格朗日方程，$\mathcal{L}$ 的变分写为：

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \left[\mathcal{L}\delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_I)} \bar{\delta}\varphi_I \right]$$

最后利用 $\bar{\delta}\varphi_I = \delta\varphi_I - \delta x_\mu \partial^\mu \varphi_I$，可将其写为

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \left[\mathcal{L}\delta x^\nu - (\partial^\mu \varphi_I) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_I)} \delta x_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_I)} \delta\varphi_I \right]$$

13

将上式简写为

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \{ [g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \Pi^{\nu I}\partial^\mu \varphi_I]\delta x_\mu + \Pi^{\nu I}\delta\varphi_I \}$$

这里引入了记号

$$\Pi^{\nu I} \triangleq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_I)}$$

定义二阶张量

$$\begin{cases} T^{\mu\nu} \triangleq g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \Pi^{\nu I}\partial^\mu \varphi_I \\ \mathcal{J}^\nu \triangleq T^{\mu\nu}\delta x_\mu + \Pi^{\nu I}\delta\varphi_I \end{cases}$$

则拉格朗日密度的变分最终写为了

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \mathcal{J}^\nu$$

14

3. 对称性与守恒定律

若时空坐标变换 $x_\alpha \longrightarrow x'_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha$ 下拉格朗日密度是不变的

$$\delta\mathcal{L} = 0 \iff \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'\varphi'(x'), x') = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x)$$

则称这一变换是场系统的一种对称变换。

诺特定理：若时空坐标变换 $x_\alpha \longrightarrow x'_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha$ 下场系统的拉格朗日密度不变，则 $\mathcal{J}^\nu$ 为守恒流

$$\partial_\nu \mathcal{J}^\nu = 0$$

其中

$$\begin{cases} T^{\mu\nu} \triangleq g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \Pi^{\nu I}\partial^\mu \varphi_I \\ \mathcal{J}^\nu \triangleq T^{\mu\nu}\delta x_\mu + \Pi^{\nu I}\delta\varphi_I \end{cases}$$

15

四、时空平移不变性

- 由于在时空平移变换 $x_\alpha \longrightarrow x'_\alpha = x_\alpha + a_\alpha$ 下

$$\mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'\varphi'(x'), x') = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x + a)$$

因此，$\mathcal{L}$ 在平移变换下是不变的等价于说

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x + a) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x)$$

仅当 $\mathcal{L}$ 不明显依赖于时空坐标 x 时，它才是平移不变的。

- 在时空平移变换下 $\delta\varphi_I = 0$。因而

$$\mathcal{J}^\nu = T^{\mu\nu}\delta x_\mu = T^{\mu\nu}a_\mu$$

所以

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \mathcal{J}^\nu = a_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu}$$

16

1. 时空平移不变性与四维动量守恒

诺特定理：若时空平移变换下拉格朗日密度是不变的，则

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

- $T^{\mu\nu}$ 称为场的**正则能量-动量张量**

$$T^{\mu\nu} \triangleq g^{\mu\nu}\mathcal{L} - (\partial^\mu\varphi_I)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_I)}$$

- 与 $T^{\mu\nu}$ 对应的四个守恒荷称为系统的**总4-动量**

$$P^\mu \triangleq \frac{1}{c}\int T^{\mu 0} d^3x = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \ \vec{P}\right)$$

- $T^{\mu\nu}$ 为守恒流也可利用场方程加以证明。

17

- 可以将 T^{00} 表示为

$$T^{00} = g^{00}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_I)}\partial^0\varphi_I$$
$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi_I)}\partial_t\varphi_I - \mathcal{L}$$

因而

$$\mathcal{E} = \int T^{00} d^3x = \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi_I)}\partial_t\varphi_I d^3x - L$$

类比离散体系的哈密顿函数

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$$

可见，$\mathcal{E}$ 可诠释为是场的总能量。

18

能量-动量张量的对称性

- 正则能量-动量张量 $T^{\mu\nu}$ 可能是不对称的。
- **对称能量-动量密度张量的存在是任何物理系统与引力耦合的不可或缺的先决条件。**若不可能找到一个对称的能量-动量密度张量，则现有的场论将与引力理论不相容。
- 总可通过加上一个附加项 $t^{\mu\nu}$，使得 $T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}$ 为对称张量。
  - 要求这一附加项不会导致守恒定律发生改变，也不会导致总的能量和动量发生改变。数学上这相当于要求

$$\partial_\nu t^{\mu\nu}=0 \quad \text{and} \quad \int t^{\mu 0} d^3x=0$$

  - **附加项使得四维动量重新分布，但却不改变其总值。**

19

能量-动量张量的不确定性

- $T^{\mu\nu}$ 中可以自由添加附加项，这表明能量-动量张量的定义具有模糊性。
- 这一模糊性只能依靠引进某些附加的假设才能被消除。
  - 在电磁理论中可假设：能量-动量张量应该是规范不变的。

20

标量场、矢量场的正则能量-动量张量

- 对于标量场，正则能量-动量张量表示为

$$T^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\mathcal{L}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\partial^\mu\varphi$$

【思考】自由标量场的 $\mathcal{L}$ 如下，请写出 $T^{\mu\nu}$ 以及 T^{00}

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+m^2\varphi^2\right)$$

- 对于矢量场，正则能量-动量张量表示为

$$T^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\mathcal{L}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)}\partial^\mu A_\alpha$$

【思考】请写出二阶张量场的正则能量-动量张量。

21

2. 电磁场的能量-动量张量

显然，自由电磁场的拉格朗日密度具有时空平移不变性

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \mathcal{L}_f(\partial A)$$

- 由于

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\alpha}$$

因而电磁场的正则能量-动量张量为

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} \partial^\mu A_\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{1}{\mu_0} F^{\nu\alpha} \partial^\mu A_\alpha$$

- $T^{\mu\nu}$ 并非对称的。这一缺陷可通过添加附加项弥补。

22

附加项

考察如下附加项：

$$t^{\mu\nu} = -\partial_\alpha \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\alpha} A^\mu \right)$$

- $t^{\mu\nu}$ 的散度恒等于零 $\Longrightarrow$ 附加项不影响守恒定律

  $\because \partial_\nu t^{\mu\nu} \propto \partial_\nu \partial_\alpha (F^{\nu\alpha} A^\mu) = 0$
- $t^{\mu 0}$ 对全空间的积分为零 $\Longrightarrow$ 附加项不影响守恒荷的数值

  $\because \int t^{\mu 0} d^3x \propto \int \partial_\alpha (F^{0\alpha} A^\mu) d^3x = \int \partial_k (F^{0k} A^\mu) d^3x = 0$
- 由于自由电磁场满足 $\partial_\mu F^{\mu\alpha} = 0$，因而可将 $t^{\mu\nu}$ 表示为：

$$t^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\alpha} \partial_\alpha A^\mu$$

23

电磁场的能量-动量张量

将附加项加到正则能量-动量张量上，给出

$$T_f^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{1}{\mu_0} F^{\nu\alpha} F_\alpha{}^\mu$$

这就是**电磁场的能量-动量张量**。由于第二项是对称的，因而

$$T_f^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu = \begin{pmatrix} w & c\vec{g} \\ c\vec{g} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}$$

- 守恒荷没有改变，为

$$P^\mu \triangleq \frac{1}{c} \int T_f^{\mu 0} d^3x = \left(\frac{W}{c}, \ \vec{G} \right) \triangleq \left(\frac{\mathcal{E}_f}{c}, \ \vec{P}_f \right)$$

- $T_f^{\mu\nu}$ 是对称的：$T_f^{\mu\nu} = T_f^{\nu\mu}$。
- $T_f^{\mu\nu}$ 是规范不变的。

24

能量-动量密度张量的唯一性

在规范不变性的前提下，$T_f^{\mu\nu}$ 的定义是否还具有模糊性？也就是说，$T_f^{\mu\nu}$ 在前面的定义式之外是否还可以添加附加项 $t^{\mu\nu}$？

- 规范不变性要求 $t^{\mu\nu}$ 只能由如下张量构造

$$F^{\alpha\beta},\quad g^{\alpha\beta},\quad g_{\alpha\beta}$$

- $t^{\mu\nu}$ 必须是一个二阶张量，而由如上张量所能构造出的 $t^{\mu\nu}$ 的一般形式是

$$t^{\mu\nu}=a_1 g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+a_2 F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu+\boxed{a_3 F^{\mu\nu}F_\alpha{}^\alpha}$$

- $t^{\mu\nu}$ 满足连续性方程意味着 $a_2=4a_1$。
- $t^{\mu\nu}$ 不能改变守恒荷意味着 a_1 和 a_2 只能为零。

25

五、洛伦兹变换下的不变性

下面只针对矢量场 A^α 讨论。在无穷小洛伦兹变换下，由于

$$\delta x_\alpha=\omega_{\alpha\beta}x^\beta,\quad \delta A_\alpha=\omega_{\alpha\beta}A^\beta$$

因而

$$\mathcal{J}^\nu=\omega_{\mu\beta}T^{\mu\nu}x^\beta+\omega_{\alpha\beta}\Pi^{\nu\alpha}A^\beta\ =\omega_{\alpha\beta}\left(x^\beta T^{\alpha\nu}+A^\beta\Pi^{\nu\alpha}\right)$$

利用 $\omega_{\alpha\beta}$ 的反对称性，可将其改写为

$$\mathcal{J}^\nu=-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\left[\left(x^\alpha T^{\beta\nu}-x^\beta T^{\alpha\nu}\right)+\left(A^\alpha\Pi^{\nu\beta}-A^\beta\Pi^{\nu\alpha}\right)\right]$$

所以，在无穷小洛伦兹变换下 $\delta\mathcal{L}=\partial_\nu\mathcal{J}^\nu$ 写为了

$$\delta\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\partial_\nu\left[\left(x^\alpha T^{\beta\nu}-x^\beta T^{\alpha\nu}\right)+\left(A^\alpha\Pi^{\nu\beta}-A^\beta\Pi^{\nu\alpha}\right)\right]$$

26

1. 洛伦兹不变性与角动量守恒

诺特定理：若洛伦兹变换下拉格朗日密度是不变的，则

$$\partial_\nu M^{\nu\alpha\beta}=0$$

- $M^{\nu\alpha\beta}$ 称为**正则角动量流密度张量**

$$M^{\nu\alpha\beta}=\left(x^\alpha T^{\beta\nu}-x^\beta T^{\alpha\nu}\right)+\left(A^\alpha\Pi^{\nu\beta}-A^\beta\Pi^{\nu\alpha}\right)$$

  - $M^{\nu\alpha\beta}$ 关于指标 α 和 β 反对称：$M^{\nu\alpha\beta}=-M^{\nu\beta\alpha}$。
  - $M^{\nu\alpha\beta}$ 并不具有标准的形式。
- 与 $M^{\nu\alpha\beta}$ 对应的个守恒荷称为系统的总4-角动量张量

$$L^{\alpha\beta}\triangleq\frac{1}{c}\int M^{0\alpha\beta}d^3x$$

- $M^{\nu\alpha\beta}$ 为守恒流也可利用场方程加以证明。

27

2. 电磁场的正则角动量流密度张量

显然，自由电磁场的拉格朗日密度在洛伦兹变换下不变。因此

$$\partial_\nu M^{\nu\alpha\beta} = 0$$

其中，$M^{\nu\alpha\beta}$ 为电磁场的正则角动量流密度张量。由于

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = -\frac{1}{\mu_0}F^{\nu\alpha}$$

因而

$$\begin{aligned} M^{\nu\alpha\beta} &= \left(x^\alpha T^{\beta\nu} - x^\beta T^{\alpha\nu}\right) + \left(A^\alpha \Pi^{\nu\beta} - A^\beta \Pi^{\nu\alpha}\right) \\ &= \left(x^\alpha T^{\beta\nu} - x^\beta T^{\alpha\nu}\right) - \frac{1}{\mu_0}\left(A^\alpha F^{\nu\beta} - A^\beta F^{\nu\alpha}\right) \end{aligned}$$

- $M^{\nu\alpha\beta}$ 不具有标准的形式。这一缺陷可通过添加附加项弥补。

28

- 将 $M^{\nu\alpha\beta}$ 中的 $T^{\mu\nu}$ 写为

$$T^{\mu\nu} = T_f^{\mu\nu} - t^{\mu\nu}, \quad \text{where } \ t^{\mu\nu} = -\partial_\alpha\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\nu\alpha}A^\mu\right)$$

得到

$$M^{\nu\alpha\beta} = \left(x^\alpha T_f^{\beta\nu} - x^\beta T_f^{\alpha\nu}\right) + m^{\nu\alpha\beta}$$

其中

$$\begin{aligned} m^{\nu\alpha\beta} &= \left(\frac{1}{\mu_0}A^\beta F^{\nu\alpha} - x^\alpha t^{\beta\nu}\right) - (\alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= \frac{1}{\mu_0}A^\beta F^{\nu\alpha} + x^\alpha \partial_\mu\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\nu\mu}A^\beta\right) - (\alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= \partial_\mu\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\nu\mu}x^\alpha A^\beta\right) - (\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned}$$

29

- 因此

$$m^{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0}\partial_\mu\left[F^{\nu\mu}\left(x^\alpha A^\beta - x^\beta A^\alpha\right)\right]$$

  - $m^{\nu\alpha\beta}$ 的散度恒等于零

$$\partial_\nu m^{\nu\alpha\beta} \propto \partial_\nu\partial_\mu\left[F^{\nu\mu}\left(x^\alpha A^\beta - x^\beta A^\alpha\right)\right] = 0$$

$\Rightarrow$ 有无此项都不会影响守恒定律

  - $m^{0\alpha\beta}$ 对全空间的积分为零

$$\int m^{0\alpha\beta}d^3x \propto \int \partial_k\left[F^{0k}\left(x^\alpha A^\beta - x^\beta A^\alpha\right)\right]d^3x = 0$$

$\Rightarrow$ 有无此项都不会影响守恒荷的数值

30

电磁场的能量-动量张量

重新定义**电磁场的角动量流密度张量**：

$$M_f^{\nu\alpha\beta} = x^\alpha T_f^{\mu\beta} - x^\beta T_f^{\mu\alpha} \quad (= M^{\nu\alpha\beta} - m^{\nu\alpha\beta})$$

- $M_f^{\mu\alpha\beta}$ 具有标准形式，且关于 α 和 β 反对称。
- $M_f^{\mu\alpha\beta}$ 是规范不变的。
- 守恒荷为

$$L^{\alpha\beta} = \{\vec{K}, \quad \vec{L}\} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{K} \\ -\vec{K} & \overleftrightarrow{L} \end{pmatrix}$$

其中

$$\vec{K} = ct\vec{G} - \frac{1}{c}\int w\vec{x}d^3x, \quad \vec{L} = \int (\vec{x}\times\vec{g})d^3x$$

31

六、电动力学规律的推导

- **相对性原理、规范不变性**决定了场的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{pf} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha$$

其中，电磁场张量的定义为

$$F_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

➢ $\mathcal{L}$ 决定了电磁场满足麦克斯韦方程

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta$$

➢ $F_{\alpha\beta}$ 的定义意味着其满足毕安琪恒等式

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

32

- 由 $\mathcal{L}_f$ 可构造电磁场的正则能量-动量张量

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{1}{\mu_0}F^{\nu\alpha}\partial^\mu A_\alpha$$

➢ **对称性、规范不变性**将电磁场的能量-动量张量确定为

$$T_f^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}{F_\alpha}^\nu$$

- 粒子系统的能量-动量张量可直接由其含义得到，为

$$T_p^{\alpha\beta} = n_0 m u^\alpha u^\beta = \rho_0 u^\alpha u^\beta$$

- 电磁场、粒子系统的能量-动量张量可分别写为

$$T_f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & \vec{S}/c \\ c\vec{g} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}, \qquad T_p^{\mu\nu} = \gamma\rho\begin{pmatrix} c^2 & c\vec{v} \\ c\vec{v} & \vec{v}\vec{v} \end{pmatrix}$$

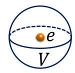
33

- **带电粒子-电磁场系统的能量-动量守恒**意味着：

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu \left(T_f^{\mu\nu} + T_p^{\mu\nu}\right) = 0$$

  - 利用麦克斯韦方程和毕安琪恒等式，直接计算就可以给出

$$\partial_\nu T_f^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} J_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \partial_\nu T_p^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} J_\alpha$$



  - 设 V 是包含某个粒子 e 的极小区域

$$\int_V \partial_\nu T_p^{\mu\nu} d^3x = \int_V \partial_0 T_p^{\mu 0} d^3x + \int_V \partial_k T_p^{\mu k} d^3x = \frac{dp^\mu}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp^\mu}{d\tau}$$

$$\int_V F^{\mu\alpha} J_\alpha d^3x = F^{\mu\alpha} \int_V J_\alpha d^3x = F^{\mu\alpha} u_\alpha \int_V \rho_0 d^3x = \frac{1}{\gamma} e F^{\mu\alpha} u_\alpha$$

由此，我们就证明了带电粒子的动力学方程为

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\alpha} u_\alpha$$

34