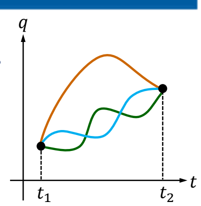
§4 带电粒子的拉格朗日表述

一、粒子系统的拉格朗日方程

1. 粒子系统的哈密顿原理

在有相同端点的所有可能路径当中，粒子系统的真实运动使得作用量 S 取驻值。其数学表述为



$$\begin{cases} \delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = 0 \\ \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0 \end{cases}$$

其中 $q = \{q_k\}$ 为**广义坐标**，L 称为体系的**拉格朗日函数**。

- 广义坐标一个变分 $\delta q_k(t)$ 引起广义速度相应的变分：

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt}\delta q_k \quad \leftrightarrow \quad \delta\frac{dq_k}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q_k$$

2

2. 欧拉–拉格朗日方程

由于对任意的变分 $\delta q = \{\delta q_k\}$，有

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\right]dt + \boxed{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}} \text{ 边界项} \end{aligned}$$

因而

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} \triangleq \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \textbf{欧拉–拉格朗日方程}$$

3

哈密顿函数与正则方程

定义体系的哈密顿函数：

$$H(q,p,t) \triangleq p_k\dot{q}_k - L$$

其中 p_k 是与 q_k 共轭的**正则动量**：

$$p_k \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k(q,\dot{q},t) \implies \dot{q}_k = \dot{q}_k(q,p,t)$$

- 体系的动力学方程可以写为正则方程：

$$\dot{q}_k = +\frac{\partial H}{\partial p_k} = [q_k, H], \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = [p_k, H]$$

- 若 L（从而 H）不显含时间，则**哈密顿函数是运动常数。**

4

【例】验证如下拉格朗日函数给出自由粒子正确的运动方程：

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- 正则动量等于粒子的相对论动量：

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{m\dot{x}_k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- 哈密顿函数 H 等于粒子的相对论能量：

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- 如下拉格朗日函数也能给出自由粒子正确的运动方程：

$$L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

p_k 与 动量、H 与能量相等取决于的 L 的正确选取。

5

规范变换

同一体系可用不同的拉格朗日函数描述。譬如，拉格朗日函数可相差一个**规范变换**：

$$\tilde{L}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{dF(q,t)}{dt}$$

- L 和 $\tilde{L}$ 描述同一体系是由于 $\tilde{S} - S = constant$。
  - 等价于说，$\delta(\Delta L)/\delta q_k \equiv 0$，其中 $\Delta L = \tilde{L} - L = dF/dt$。
- 例如，拉格朗日函数可以加上时间 t 的任一已知函数。
- 对于自由粒子，我们总是选择

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

其特点在于：正则动量恰好给出相对论动量、而哈密顿函数则恰好与相对论能量一致。

6

二、协变的拉格朗日方程

1. 世界线

粒子的世界线可以用某个实参数 λ 的四个函数描述：

$$x^\alpha(\lambda)=(x^0(\lambda),\quad \vec{x}(\lambda))$$

其切矢量为

$$U^\alpha(\lambda)=\frac{dx^\alpha(\lambda)}{d\lambda}$$

- 物理上容许的世界线要求对于任意 λ 都满足

$$\begin{cases} U^0>0 & \text{：} x^0=ct \text{ 是 } \lambda \text{ 的单调增函数} \\ U^\alpha U_\alpha \le 0 & \text{：因果性条件} \end{cases}$$

7

参数不变性

- 由于 $x^0(\lambda)$ 是 λ 的单调增函数，因而可以将 λ 用 t 表示

$$x^0(\lambda)=ct \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\lambda(t) \quad\Longrightarrow\quad \vec{x}(t)=\vec{x}(\lambda(t))$$

- 设 $x^\alpha(\lambda)$ 和 $y^\alpha(\lambda)$ 是两条世界线，如果存在可逆函数 f 使得

$$y^\alpha(f(\lambda))=x^\alpha(\lambda)$$

则有 $\vec{x}(t)=\vec{y}(t)$。即这两条件世界线描述的是同一运动。

➢ 譬如：

$$\begin{cases} x^\alpha(\lambda)=(a\sinh\lambda,\quad a\cosh\lambda,\quad b\lambda,\quad 0\,) \\ y^\alpha(\lambda)=\left(\lambda,\quad \sqrt{a^2+\lambda^2},\quad b\,\mathrm{arcsinh}\frac{\lambda}{a},\quad 0\right) \end{cases}$$

物理可观测量应该是参数不变的。

8

两种常用的选择

- 参数的一种具有直接物理意义的选择是 $\lambda=t$，从而

$$x^\alpha(t)=(ct,\quad \vec{x}(t))$$

- 另一种方便的选择是 $\lambda=\tau$，从而

$$x^\alpha(\tau)=(ct(\tau),\quad \vec{x}(\tau))$$

➢ 固有时可用间隔表示为

$$d\tau=\frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}=\frac{1}{c}\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha}$$

➢ 固有时是参数不变的

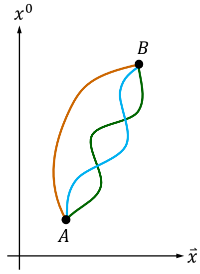
$$\tau(\lambda)=\frac{1}{c}\int_0^\lambda\sqrt{-\frac{dx^\alpha}{d\lambda'}\frac{dx_\alpha}{d\lambda'}}\,d\lambda'$$

9

2. 相对论中的哈密顿原理

相对论中的哈密顿原理表述为：真实运动是有相同端点的所有可能世界线当中使得作用量 S 取驻值的，即

$$\begin{cases}\delta S[x]=\delta\displaystyle\int_A^B L_\lambda\left(x,\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)d\lambda=0\\ \delta x_A^\alpha=\delta x_B^\alpha=0\end{cases}$$



- 为了符合于相对性原理，**作用量必须是四维标量。**
- 取决于 λ 的含义，可能世界线在端点 A（或 B）处参数 λ 的数值未必相同；不同参数 λ 对应的拉格朗日函数也未必相同。

以真实世界线的固有时为参数

若以真实世界线的固有时 τ 作为参数，哈密顿原理表述为：

$$\delta S[x]=\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}L_\tau(x,u)d\tau=0,\quad \delta x^\alpha(\tau_1)=\delta x^\alpha(\tau_2)=0$$

其中，"4-速度" $u^\alpha\triangleq dx^\alpha/d\tau$ 为4-矢量。

- 端点处参数的数值 $\tau_{1,2}$ 对所有可能世界线都相同。
- **注意：u^α 并非可能世界线的4-速度。**
- **仅对真实世界线，u^α 才是粒子的四维速度，并满足质壳关系**

$$u^\alpha u_\alpha=-c^2$$

- **为了符合于相对性原理，要求 $L_\tau(x,u)$ 必须是四维标量。**

- 由于对任意的变分 δx，有

$$\begin{aligned}0=\delta S&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\frac{\partial L_\tau}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha+\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha}\delta u_\alpha\right]d\tau\\&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha}\right)\delta x_\alpha+\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha}\delta x_\alpha\right)\right]d\tau\\&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\left(\frac{\partial L_\tau}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha}\right)\delta x_\alpha\right]d\tau+\boxed{\left[\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha}\delta x_\alpha\right]_{\tau_1}^{\tau_2}}\end{aligned}$$

边界项

因而，以真实世界线的固有时 τ 作为参数时，运动方程为

$$\frac{\delta L_\tau}{\delta x_\alpha}\triangleq\frac{\partial L_\tau}{\partial x_\alpha}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha}=0\qquad \textbf{拉格朗日方程}$$

- **拉格朗日方程是明显协变的！**
- **拉格朗日方程中求完偏导数后的 u^α 满足质壳关系。**

【例】自由粒子的拉格朗日函数。

- 时空平移不变性意味着：**L_τ 只能是由速度 u^α 构造的标量。**
- 由 u^α 所能构造出的独立标量只有

$$u^\alpha u_\alpha = u \cdot u$$

因而，**L_τ 只能是 $u^\alpha u_\alpha = u \cdot u$ 的函数。**

- 有无限多个 L_τ 满足以上条件，并且自由粒子的正确运动方程都可由如下拉格朗日方程给出：

$$\frac{\delta L_\tau}{\delta x_\alpha} \triangleq \frac{\partial L_\tau}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha} = 0$$

13

- 譬如，自由粒子的拉格朗日函数可以选为

$$L_\tau = \frac{1}{2} m u^\alpha u_\alpha = \frac{1}{2} m u \cdot u$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha} = m u^\alpha$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(m u^\alpha) = 0$$

- 又如，自由粒子的拉格朗日函数也可以选为

$$L_\tau = -mc\sqrt{-u^\alpha u_\alpha} = -mc\sqrt{-u \cdot u}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha} = \frac{mcu^\alpha}{\sqrt{-u \cdot u}} \longrightarrow m u^\alpha$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(m u^\alpha) = 0$$

14

以可能世界线的固有时为参数

若以可能世界线的固有时 τ 作为参数，哈密顿原理表述为：

$$\delta S[x] = \delta \int_A^B L_0(x,u) d\tau = 0, \quad \delta x_A^\alpha = \delta x_B^\alpha = 0$$

其中，$u^\alpha \triangleq dx^\alpha / d\tau$ 为粒子沿可能世界线 $x^\alpha(\tau)$ 运动的4-速度。

- 对于不同的可能世界线，端点两事件的固有时一般不同。
  - 运动方程不能直接写为

$$\frac{\delta L_0}{\delta x^\alpha} \triangleq \frac{\partial L_0}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_0}{\partial u^\alpha} = 0$$

- **注意：u^α 满足质壳关系 $u^\alpha u_\alpha = -c^2$。**
- **为了符合于相对性原理，要求 $L_\tau(x,u)$ 必须是四维标量。**
- **将 L_τ 中的 u^α 解读为满足质壳关系的4-速度，即可得 L_0。**

15

【例】自由粒子。

- 拉格朗日函数可如下得到：

$$L_\tau = \frac{1}{2} m u^\alpha u_\alpha \qquad \Longrightarrow \quad L_0 = -\frac{1}{2} m c^2$$

- 拉格朗日函数可如下得到：

$$L_\tau = -mc\sqrt{-u^\alpha u_\alpha} \quad \Longrightarrow \quad L_0 = -mc^2$$

- 下面以 $L_0 = -mc^2$ 为例说明：当以可能世界线的固有时为参数时，如何由哈密顿原理给出运动方程。

$$\delta S = -mc^2 \delta \int_A^B d\tau = -mc\delta \int_A^B \sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha}$$

连接 A, B 两点的所有世界线中，真实世界线的固有时最长。

16

- 为了得到运动方程，首先计算

$$\delta\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha} = \frac{\delta(-dx^\alpha dx_\alpha)}{2\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha}} = -\frac{(\delta dx^\alpha) dx_\alpha + dx^\alpha (\delta dx_\alpha)}{2cd\tau}$$

由于分子上两项相同，且 $\delta dx_\alpha = d\delta x_\alpha$，因而

$$\delta\sqrt{-dx^\alpha dx_\alpha} = -\frac{u^\alpha}{c} d\delta x_\alpha$$

所以

$$\delta S = m\int_A^B u^\alpha d\delta x_\alpha = \boxed{m u^\alpha \delta x_\alpha \Big|_A^B} - m\int_A^B \frac{du^\alpha}{d\tau} \delta x_\alpha d\tau$$

从而

$$\delta S = -mc^2 \delta \int_A^B d\tau = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(m u^\alpha) = 0$$

17

以时间为参数

若以时间 t 作为参数，哈密顿原理表述为：

$$\delta S[x] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x, \vec{v}) dt = 0, \quad \delta x^\alpha(t_1) = \delta x^\alpha(t_2) = 0$$

其中，$\vec{v} = d\vec{x}/dt$ 为粒子沿可能世界线运动时的三维速度。

- 端点处参数的数值 $t_{1,2}$ 对所有可能世界线都相同。
  - ➢ 运动方程由拉格朗日方程给出

$$\frac{\delta L}{\delta \vec{x}} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$$

18

- **若 L 由如下方式给出，则由于此情形下 S 为四维标量，因而，尽管方程并非明显协变，但却符合于相对性原理的要求：**

$$L(x,\vec{v}) = \frac{d\tau}{dt}L_0(x,u) = \frac{1}{\gamma}L_0, \quad \text{where } \gamma \triangleq (1-v^2/c^2)^{-1/2}$$

➢ 例如，利用 $L_0 = -mc^2$ 可得自由粒子的拉格朗日函数

$$L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$$

正则动量和哈密顿函数分别给出正确的相对论动量和能量：

$$\vec{p} = \partial L/\partial \vec{v} = \gamma m\vec{v}, \quad H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \gamma mc^2$$

拉格朗日函数给出自由粒子正确的运动方程：

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\vec{p}/dt = 0$$

方程符合于相对性原理，但却不是明显协变的。

19

以后，我们将以实际世界线的固有时作为参数

- 哈密顿原理

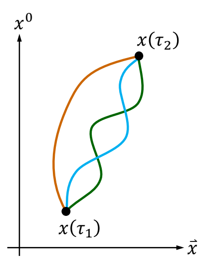
$$\delta S[x] = \delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L_\tau(x,u)d\tau = 0, \quad \delta x^\alpha(\tau_1) = \delta x^\alpha(\tau_2) = 0$$

➢ **L_τ 中的 u^α 不满足 $u^\alpha u_\alpha = -c^2$。**

- 拉格朗日方程

$$\frac{\delta L_\tau}{\delta x_\alpha} \triangleq \frac{\partial L_\tau}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha} = 0$$

➢ **拉格朗日方程中求完偏导数后的 u^α 满足质壳关系。**



20

三、电磁场中的带电粒子

1. 作用量

以真实世界线的固有时 τ 作为参数，将带电粒子在给定电磁场中的作用量写为

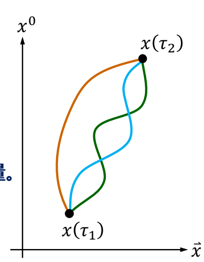
$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L_\tau(x,u)d\tau = S_p + S_{pf}$$

其中，S_p 为自由粒子的作用量，

S_{pf} 是场与粒子的相互作用项。

- 相对性原理要求：**S 和 L_τ 都是4-标量。**
- 总是将自由粒子的拉格朗日函数选为

$$L_\tau = -mc\sqrt{-u^\alpha u_\alpha}$$



21

2. 电磁场运动的带电粒子

除 e 和 m 外，用以构造拉格朗日函数的四维张量有

$$u^\alpha,\quad F^{\alpha\beta}$$

以及不变张量

$$g^{\alpha\beta},\quad g_{\alpha\beta},\quad \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

- 据此能够构造出的独立的四维标量有

$$\begin{cases} u^\alpha u_\alpha & \longrightarrow \text{自由粒子的拉格朗日函数} \\ F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} & \longrightarrow \text{不可能描述带电粒子与场的相互作用} \\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} & \longrightarrow \text{不可能描述带电粒子与场的相互作用} \\ F^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta & \equiv 0 \end{cases}$$

22

- **为了反映带电粒子与电磁场之间的相互作用，有必要用规范势 $A^\alpha(x)$ 代替电磁场张量描述电磁场**，这样，就可以构造出描述相互作用的四维标量

$$A^\alpha u_\alpha$$

因此，电磁场中带电粒子的拉格朗日函数的候选形式为

$$L_\tau = L_p + L_{pf} = -mc\sqrt{-u\cdot u} + kA^\alpha u_\alpha$$

其中，k 是粒子与电磁场的耦合常数，它具有电量的量纲。

- 按此拉格朗日函数，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_\tau}{\partial x_\alpha} = ku_\beta \partial^\alpha A^\beta \\ \dfrac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha} = \dfrac{mcu^\alpha}{\sqrt{-u\cdot u}} + kA^\alpha \quad\longrightarrow\quad mu^\alpha + eA^\alpha = p^\alpha + kA^\alpha \end{cases}$$

23

- 将前面结果代入拉格朗日方程，得到

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_\tau}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial L_\tau}{\partial x_\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dp^\alpha}{d\tau} + ku_\beta\partial^\beta A^\alpha = ku_\beta\partial^\alpha A^\beta$$

亦即有

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = k\left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right)u_\beta = kF^{\alpha\beta}u_\beta$$

将其与洛伦兹方程比价就得到：$k = e$。

- 电磁场中带电粒子的拉格朗日函数

$$L_\tau = L_p + L_{pf} = -mc\sqrt{-u\cdot u} + eA^\alpha u_\alpha$$

运动方程为洛伦兹方程

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = eF^{\alpha\beta}u_\beta$$

24

规范不变性

当电磁势做如下规范变换时：

$$A^\alpha \quad \longrightarrow \quad \tilde{A}^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \psi$$

拉格朗日函数变为

$$L_\tau \quad \longrightarrow \quad \tilde{L}_\tau = L_\tau + e u_\alpha \partial^\alpha \psi = L_\tau + \frac{d}{d\tau}(e\psi)$$

新、旧拉格朗日函数由规范变换相联系。

- **在规范变换下，运动方程（即洛伦兹方程）是不变的。**
  - A^α 只以 $F^{\alpha\beta}$ 的形式出现在运动方程中，由此也可得结论。

25

【思考】（1）以时间为参数，拉格朗日函数为

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e\left(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

（2）拉格朗日方程

$$\frac{\delta L}{\delta \vec{x}} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B}$$

（3）带电粒子的正则动量

$$\vec{P} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + e\vec{A}$$

（4）哈密顿量用正则变量表示出来，为

$$H \triangleq \vec{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \sqrt{\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 c^2 + m^2c^4} + e\varphi$$

26

【注】在非相对论极限下

$$H = \frac{\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2}{2m} + e\varphi \boxed{+ mc^2}$$

过渡到量子力学时，需要将粒子的正则动量（而非机械动量）代换为厄米算符

$$\vec{P} \quad \longrightarrow \quad -i\hbar\nabla$$

描述微观带电粒子在电磁场中运动的动力学方程是如下形式的**薛定谔方程**：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{ie\vec{A}}{\hbar}\right)^2 + e\varphi\right]\psi$$

27

§5 电磁场的拉格朗日表述

一、场的拉格朗日方程

如果一个体系的所有可观测物理量都可以用 N 个场

$$\varphi = \{\varphi_I(x) \mid I = 1, \cdots, N\}$$

描述，则称这些场**完全描述**了该体系。

	粒子系统	场系统
描述系统状态的量	$q_k(t)$	$\varphi_I(x)$
独立变量	t, k	$t, \vec{x}$
拉格朗日函数	$L = L(q, \dot{q})$	$L = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^3x$
运动方程	$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_I} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_I)} = 0$
哈密顿函数（能量）	$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$	$H = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_I)} \partial_0 \varphi_I d^3x - L$

1. 场的拉格朗日密度和作用量

- 场的拉格朗日函数表示为拉格朗日密度 $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ 的积分

$$L = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^3x$$

  - 一般地，$\mathcal{L}$ 可能明显地依赖于时空坐标：$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x)$。
- 场的作用量表示为

$$S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^3x = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^3x$$

  - 一般地，作用量可表示为 $\mathcal{L}$ 在某个时空区域 D 内的积分：

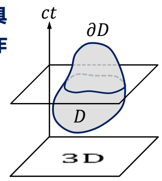
$$S[\varphi] = \frac{1}{c}\int_D \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^4x$$

- 相对性原理要求 ***S* 必须是四维标量。**
  - 由于 $d^4x = cdtd^3x$是四维标量，故 **$\mathcal{L}$ 也必须是四维标量。**

2. 场的哈密顿原理

场系统的哈密顿原理表述为：在边界上具有相同数值的场中，真实场 $\varphi(x)$ 是使得作用量取驻值的。其数学表述为

$$\begin{cases} \delta S = \dfrac{1}{c}\delta \displaystyle\int_D \mathcal{L} d^4 x = 0 \\ \delta \varphi_I (x \in \partial D) = 0 \end{cases}$$



- 场的一个变分 $\delta\varphi_I(x)$ 引起导数中相应的变分：

$$\delta\left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta\varphi_I) \quad \leftrightarrow \quad \delta(\partial_\mu \varphi_I) = \partial_\mu(\delta\varphi_I)$$

由此，又引起拉格朗日密度的相应变分：

$$\delta\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x) = \mathcal{L}(\varphi + \delta\varphi, \partial\varphi + \delta\partial\varphi, x) - \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x)$$

31

3. 场的拉格朗日方程

场的一个变分 $\delta\varphi_I(x)$ 引起作用量的如下变化：

$$\delta S = \frac{1}{c}\int_D \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}\delta\varphi_I + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\delta(\partial_\mu\varphi_I)\right] d^4x$$

$$= \frac{1}{c}\int_D \left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\right]\delta\varphi_I + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\delta\varphi_I\right]\right\} d^4x$$

$$= \frac{1}{c}\int_D \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\right]\delta\varphi_I d^4x + \underbrace{\boxed{\frac{1}{c}\oint_{\partial D} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}\delta\varphi_I dn_\mu}}_{\text{边界项}}$$

由于对任意 $\delta\varphi_I$ 都有 $\delta S = 0$，因此有

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi_I} \triangleq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)} = 0$$

拉格朗日方程

32

- 拉格朗日方程也可简写为

$$\partial_\mu \Pi^{\mu I} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}, \quad \text{where } \Pi^{\mu I} \triangleq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_I)}$$

- **如果 φ 是四维张量场，则拉格朗日方程是明显协变的，从而自动符合于相对性原理。**

- 前面的推导表明

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta L}{\delta\varphi_I}\delta\varphi_I + \partial_\mu(\Pi^{\mu I}\delta\varphi_I) \neq \frac{\delta L}{\delta\varphi_I}\delta\varphi_I$$

- 对于真实场

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\Pi^{\mu I}\delta\varphi_I)$$

33

规范变换

同一场系统可用不同的拉格朗日密度描述。譬如，若 $\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)$ 是体系的拉格朗日密度，则对于任一矢量场 C^{μ}

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi,\partial\varphi,x)=\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi,x)+\partial_{\mu}C^{\mu}(\varphi,x)$$

亦可作为体系的拉格朗日密度。此式称为 **$\mathcal{L}$ 的规范变换**。

- $\mathcal{L}$ 和 $\tilde{\mathcal{L}}$ 描述同一体系是由于

$$\tilde{S}-S=\frac{1}{c}\int_{D}(\tilde{\mathcal{L}}-\mathcal{L})d^4x=\frac{1}{c}\int_{D}\partial_{\mu}C^{\mu}(\varphi,x)d^4x$$
$$=\frac{1}{c}\oint_{\partial D}C^{\mu}(\varphi,x)dn_{\mu}=S+constant$$

等价于说，$\delta(\Delta\mathcal{L})/\delta\varphi\equiv 0$，其中 $\Delta\mathcal{L}=\tilde{\mathcal{L}}-\mathcal{L}=\partial_{\mu}C^{\mu}$。

- 作为一个特例，$\mathcal{L}$ 可以加上时空坐标 x 的任一标量函数。

34

4. 一个标量场的例子

考察与外部标量场 $\rho(x)$ 耦合的四维标量场$\varphi(x)$，并设其拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi+\kappa^2\varphi^2\right)+\rho(x)\varphi(x)$$

其中

$$\kappa=\frac{mc}{\hbar}$$

这里，m 称为标量场 φ 的质量参数。κ 与质量为 m 的粒子的康普顿波长 λ_C 之间的关系是

$$\kappa=\frac{2\pi}{\lambda_C},\quad \text{where}\ \ \lambda_C\triangleq\frac{h}{mc}$$

35

拉格朗日方程

由于

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-\kappa^2\varphi(x)+\rho(x),\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}=-\partial^{\mu}\varphi$$

因而拉格朗日方程写为

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}-\kappa^2\right)\varphi(x)=-\rho(x)$$

方程是明显协变的。

36

有质量场的传播速度

无源情形下，场方程写为

$$(\partial^\mu\partial_\mu - \kappa^2)\varphi(x) = 0$$

不难验证，如果 $k^\alpha = \left(\omega/c, \vec{k}\right)$ 满足

$$k_\alpha k^\alpha = -\kappa^2 \quad \leftrightarrow \quad \omega = c\sqrt{k^2+\kappa^2}$$

那么，如下单色平面波是方程的解：

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{ik_\alpha x^\alpha} = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

其群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2+\kappa^2}} < c$$

$\mathcal{L}$ 中的质量项意味着此标量场的传播速度小于光速 c。

37

有质量场的相互作用力程

如果源项是静态球对称的，即 $\rho = \rho(r)$，则方程写为

$$(\nabla^2 - \kappa^2)\varphi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \kappa^2\varphi = -\rho(r)$$

即有

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \kappa^2\right)(r\varphi) = -\rho(r)$$

在源之外的区域，方程有解

$$\varphi(r) \propto \frac{1}{r}e^{-\kappa r} \quad \text{and} \quad \boxed{\varphi(r) \propto \frac{1}{r}e^{+\kappa r}}$$

$\mathcal{L}$ 中的质量项意味着源与场的相互作用不是长程的。

38

三、电磁场的拉格朗日密度

在源 $J^\alpha(x)$ 已知的情形，电磁场的拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 需要满足

- **$\mathcal{L}$ 是四维标量。**
- **描述电磁作用的场应选为电磁势 A^α** 而非电磁场或 $F^{\alpha\beta}$，即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, \partial A, x) = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{pf}$$

- **$\mathcal{L}$ 是规范不变的**：
  - 即规范变换 $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu\psi$ 下，$\mathcal{L}$ 变为 $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \partial_\mu C^\mu$。
  - 这等价于说，$\delta(\Delta\mathcal{L})/\delta A_\beta \equiv 0$，其中 $\Delta\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L}$。
- **$\mathcal{L}$ 或者 $\mathcal{L}_{pf}$ 是源 J^α 的线性函数**（叠加原理）。
- **$\mathcal{L}$ 是 A^α 的二次函数**（方程的线性性）。

39

1. 自由电磁场的拉格朗日密度

用以构造 $\mathcal{L}_f$ 的四维张量有

$$A^\alpha,\quad \partial^\alpha A^\beta$$

以及

$$g^{\alpha\beta},\quad g_{\alpha\beta},\quad \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

问题：由这些张量能够构造出哪些四维标量，
其中 A^α 的次数不超过2？

40

答案：用这些张量能构造出的、A^α 的次数不超过2的4-标量有

$$\begin{cases}\partial_\alpha A^\alpha \ \longleftarrow\ \text{符合规范不变性（但此项都无关紧要）}\\ A^\alpha A_\alpha \ \longleftarrow\ \text{不满足规范不变性（质量项）}\\ \partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta \ \longleftarrow\ \text{不满足规范不变性}\\ \left.\begin{array}{l}\partial^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta\\ \partial^\alpha A^\beta \partial_\beta A_\alpha\end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{cases}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \ \longleftarrow\ \text{符合规范不变性}\\ G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} \ \longleftarrow\ \text{不满足规范不变性}\end{cases}\\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} \ \longleftarrow\ \text{符合规范不变性（但是……）}\end{cases}$$

其中

$$F_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha,\quad G_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha$$

41

$\partial_\alpha A^\alpha$ 项是无关紧要的

$\partial_\alpha A^\alpha$ 为矢量场的散度，因而有无此项都对方程没有影响。

或者，$\partial_\alpha A^\alpha$ 的变分为

$$\delta(\partial^\alpha A_\alpha) = g^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha A_\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(\partial^\alpha A_\alpha)}{\partial A_\beta} = 0,\quad \frac{\partial(\partial^\alpha A_\alpha)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = g^{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta(\partial^\alpha A_\alpha)}{\delta A_\beta} = 0 - \partial_\alpha(g^{\alpha\beta}) = 0$$

42

$A^\alpha A_\alpha$ 不满足规范不变性的要求

在规范变换 $\tilde{A}_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \psi$ 下

$$\Delta\mathcal{L} = \tilde{A}^\alpha \tilde{A}_\alpha - A^\alpha A_\alpha = (A^\alpha + \partial^\alpha \psi)(A_\alpha + \partial_\alpha \psi) - A^\alpha A_\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta\mathcal{L} = 2A^\alpha \partial_\alpha \psi + \partial^\alpha \psi \partial_\alpha \psi$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta(\Delta\mathcal{L})}{\delta A_\beta} = \frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 2\partial^\beta \psi - 0 \neq 0$$

或者，$A^\alpha A_\alpha$的变分为 $(A^\alpha A_\alpha) = 2A^\alpha \delta A_\alpha$，因而

$$\frac{\partial(A^\alpha A_\alpha)}{\partial A_\beta} = 2A^\beta, \quad \frac{\partial(A^\alpha A_\alpha)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\delta(A^\alpha A_\alpha)}{\delta A_\beta} = 2A^\beta$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta\Delta\mathcal{L}}{\delta A_\beta} = 2(\tilde{A}^\beta - A^\beta) = 2\partial^\beta \psi \neq 0$$

43

$\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta$ 不满足规范不变性的要求

$\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta$ 的变分为

$$\delta(\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta) = 2\partial^\alpha A_\alpha \delta(\partial^\beta A_\beta) = 2g^{\alpha\beta}\partial^\gamma A_\gamma \delta(\partial_\alpha A_\beta)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial(\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta)}{\partial A_\beta} = 0, \quad \frac{\partial(\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 2g^{\alpha\beta}\partial^\gamma A_\gamma$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta(\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta)}{\delta A_\beta} = 0 - \partial_\alpha(2g^{\alpha\beta}\partial^\gamma A_\gamma) = -2\partial^\alpha \partial^\gamma A_\gamma$$

在规范变换 $\tilde{A}_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \psi$ 下，$\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta$ 的改变 $\Delta\mathcal{L}$ 满足

$$\frac{\delta\Delta\mathcal{L}}{\delta A_\beta} = -2\partial^\alpha \partial^\gamma (\tilde{A}_\gamma - A_\gamma) = -2\partial^\alpha \partial^\gamma \partial_\gamma \psi \neq 0$$

因此，$\partial^\alpha A_\alpha \partial^\beta A_\beta$ 项不满足规范不变性要求。

44

$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$ 不满足规范不变性的要求

$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$ 的变分为

$$\delta(G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}) = 2G^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha) = 4G^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha A_\beta)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial(G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta})}{\partial A_\beta} = 0, \quad \frac{\partial(G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 4G^{\alpha\beta}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta(G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta})}{\delta A_\beta} = 0 - \partial_\alpha(4G^{\alpha\beta}) = -4\partial_\alpha G^{\alpha\beta}$$

在规范变换 $\tilde{A}_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \psi$ 下，$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$ 的改变 $\Delta\mathcal{L}$ 满足

$$\frac{\delta\Delta\mathcal{L}}{\delta A_\beta} = -4\partial_\alpha(\tilde{G}^{\alpha\beta} - G^{\alpha\beta}) = -8\partial_\alpha \partial^\alpha \partial^\beta \psi \neq 0$$

因此，$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$ 项不满足规范不变性要求。

45

自由电磁场的拉格朗日密度

综上，自由电磁场的拉格朗日密度必然正比于 $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$，通常将其取为

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \mathcal{L}_f(\partial A)$$

- 数值上，$\mathcal{L}_f$ 等于电场与磁场的能量密度之差，即

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2 - c^2B^2)$$

问：能否将 $\mathcal{L}_f$ 取为 $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ 和 $F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ 的线性组合？

答：不能！因为这会破坏电磁相互作用过程中的宇称守恒

问：能否将 $\mathcal{L}_f$ 取为 $F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ 或其某个倍数呢？

答：不能！因为由此所得拉格朗日方程只是数学恒等式 $0=0$。

46

自由电磁场的场方程

场的一个变分 δA_β 引起的 $\mathcal{L}_f$ 的相应变分为

$$\delta\mathcal{L}_f = -\frac{1}{2\mu_0}F^{\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\mu_0}F^{\alpha\beta}\left[\delta(\partial_\alpha A_\beta) - \delta(\partial_\beta A_\alpha)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \delta\mathcal{L}_f = -\frac{1}{\mu_0}F^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha A_\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial A_\beta} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{1}{\mu_0}F^{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}_f}{\delta A_\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 0 + \frac{1}{\mu_0}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$$

因此，自由电磁场确实满足自由空间中的麦克斯韦方程：

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$$

47

- 将 $F^{\alpha\beta} \triangleq \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ 代入，给出

$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta(\partial_\alpha A^\alpha) = 0$$

这就给出了电磁势的演化方程。

  - 在 Lorenz 规范下，电磁势满足的方程写为

$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A^\beta = 0, \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0$$

- 由定义知，$F^{\alpha\beta} \triangleq \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ 自动满足毕安琪恒等式：

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

48

2. 有源电磁场的拉格朗日密度

在源 $J^\alpha(x)$ 已知的情形，电磁场的拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 需要满足

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_f+\mathcal{L}_{pf}$$

其中，$\mathcal{L}_{pf}$ 描述源与场的相互作用。

- $\mathcal{L}_{pf}$ 是由 J^α 和 A^α 的乘积构成的4-标量。
- 方程的线性性要求 $\mathcal{L}_{pf}$ 对 J^α 和 A^α 是线性依赖的。
  - 满足此条件的独立4-标量只有一个：$J^\alpha A_\alpha$。
  - $J^\alpha A_\alpha$ 符合规范不变性要求：

$$\frac{\delta\left(J^\alpha\tilde{A}_\alpha-J^\alpha A_\alpha\right)}{\delta A_\beta}=\frac{\delta(J^\alpha\partial_\alpha\psi)}{\delta A_\beta}=0$$

49

有源电磁场的拉格朗日密度

综上，存在电荷、电流情形性，电磁场的拉格朗日密度写为

$$\mathcal{L}(A,\partial A,x)=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+J^\alpha A_\alpha=\mathcal{L}_f(\partial A)+\mathcal{L}_{pf}(A,x)$$

- 数值上，

$$\mathcal{L}_f=\frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2-c^2B^2)-\left(\rho\varphi-\vec{J}\cdot\vec{A}\right)$$

- $\mathcal{L}$ 中两项的系数原则上都是任意的，这里对两项系数之比的规定相当于选择了某种特殊的单位制。
- 按此拉格朗日密度，有

$$\frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial A_\beta}=J^\beta,\quad \frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}=-\frac{1}{\mu_0}F^{\alpha\beta}$$

50

电磁场的场方程

将前面结果代入拉格朗日方程，就给出了麦克斯韦方程：

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=-\mu_0 J^\beta$$

- 将 $F^{\alpha\beta}\triangleq\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha$ 代入，给出电磁势的演化方程

$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta(\partial_\alpha A^\alpha)=-\mu_0 J^\beta$$

  - 在 Lorenz 规范下，电磁势满足的方程写为

$$\begin{cases}\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta=-\mu_0 J^\beta\\ \partial_\alpha A^\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\nabla^2-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \left(\nabla^2-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}=-\mu_0\vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0\end{cases}$$

51