§3 守恒定律

一、电磁场的能量-动量守恒定律

1. 四维电磁力密度

体积元 dV 内的带电粒子受到的四维电磁力为

$$dK^{\alpha} = neF^{\alpha\beta}u_{\beta}dV$$

简单起见，此处假设只有一类带电粒子，其数密度为 n。

- 利用固有数密度 $n_0 = n/\gamma$ 和固有体积元 $dV_0 = \gamma dV$，有

$$dK^{\alpha} = n_0 eF^{\alpha\beta}u_{\beta}dV_0$$

- 利用 $J^{\alpha} = \rho_0 u^{\alpha} = n_0 eu^{\alpha}$，又可得

$$dK^{\alpha} = F^{\alpha\beta}J_{\beta}dV_0$$

- 定义四维的**电磁力密度矢量**为

$$f^{\alpha} \triangleq \frac{dK^{\alpha}}{dV_0} = F^{\alpha\beta}J_{\beta} = \left(f^0,\ \ \vec{f}\right)$$

- 由于

$$F^{\alpha\beta}J_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \overleftrightarrow{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

所以

$$f^{\alpha} = \left(\frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{J},\ \ \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}\right)$$

- ➢ f^{α} 的空间分量正是电磁力密度 $\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$。
- ➢ f^{α} 的时间分量则联系于功率密度 $f^0 = \vec{E}\cdot\vec{J}/c = \vec{f}\cdot\vec{\beta}$。

2. 电磁场的能量-动量守恒定律

利用麦克斯韦方程 $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta$，四维力密度可以写为

$$f^\mu = F^{\mu\alpha} J_\alpha = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} \partial^\beta F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} \partial^\beta \left(F^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{\mu_0} F_{\alpha\beta} \partial^\beta F^{\mu\alpha}$$

其中的 $-F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\mu\alpha}$ 可利用毕安琪恒等式表示为

$$\begin{aligned} -\boxed{F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\mu\alpha}} &= F_{\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}\partial^\alpha F^{\beta\mu} \\ &= \partial^\mu\left(\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) + F_{\beta\alpha}\partial^\beta F^{\alpha\mu} \\ &= \partial^\mu\left(\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) + \boxed{F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\mu\alpha}} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad -F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\mu\alpha} = \partial^\mu\left(\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)$$

因而，$f^\mu = F^{\mu\alpha}J_\alpha$ 可以用电磁场张量表示为

$$\begin{aligned} f^\mu &= \partial^\beta\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}\right) + \partial^\mu\left(\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) \\ &= \partial_\nu\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu\right) + \partial_\nu\left(\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right) \end{aligned}$$

定义**电磁场的能量-动量张量**：

$$T_f^{\mu\nu} \triangleq -\left(\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)g^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu$$

这样就给出了**电磁场的能量-动量守恒定律**：

$$f^\mu = -\partial_\nu T_f^{\mu\nu}$$

能量-动量张量的对称性

电磁场的能量-动量张量可以写为：

$$T_f^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{L}_f - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu$$

其中

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2 - c^2B^2)$$

- **$T_f^{\mu\nu}$ 是无迹、对称张量**：$\left(T_f\right)^\mu{}_\mu = 0$ 且 $T_f^{\mu\nu} = T_f^{\nu\mu}$。这是由于

$$F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu = -F^{\alpha\mu}F_\alpha{}^\nu = -F_\alpha{}^\mu F^{\alpha\nu} = F_\alpha{}^\mu F^{\nu\alpha} = F^{\nu\alpha}F_\alpha{}^\mu$$

$$-\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu = \varepsilon_0\begin{pmatrix} E^2 & \vec{E}\times c\vec{B} \\ \vec{E}\times c\vec{B} & c^2B^2\overleftrightarrow{I} - \left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B}\right) \end{pmatrix}$$

能量-动量张量的含义

可以证明

$$T_f^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} w & \vec{S}/c \\ \vec{S}/c & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}=\begin{array}{cc} 密度 & 流密度 \\ \end{array}\left(\boxed{\begin{matrix} w \\ c\vec{g} \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} \vec{S}/c \\ \overleftrightarrow{T} \end{matrix}}\right)$$

其中

$$\begin{cases} w=\frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2+c^2B^2) \\ \vec{S}=\varepsilon_0 c^2\vec{E}\times\vec{B}=c^2\vec{g} \\ \overleftrightarrow{T}=w\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0(\vec{E}\vec{E}+c^2\vec{B}\vec{B}) \end{cases}$$

7

能量-动量守恒定律的三维表述

- 当 $\mu=0$ 时，$f^\mu=-\partial_\nu T_f^{\mu\nu}$ 写为

$$f^0=-\partial_\nu T_f^{0\nu}=-\partial_0 T_f^{00}-\partial_i T_f^{0i}=-c^{-1}\partial_t w-\nabla\cdot(\vec{S}/c)$$

由于 $f^0=\vec{E}\cdot\vec{J}/c$，因而这正是**电磁场的能量守恒定律**：

$$\vec{E}\cdot\vec{J}=-\partial_t w-\nabla\cdot\vec{S}$$

- 当 $\mu=i$ 时，$f^\mu=-\partial_\nu T_f^{\mu\nu}$ 写为

$$f^i=-\partial_\nu T_f^{i\nu}=-\partial_0 T_f^{i0}-\partial_j T_f^{ij}=-c^{-1}\partial_t(cg_i)-\partial_j T_{ij}$$

由于 $\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}$，因而这正是**电磁场的动量守恒定律**：

$$\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}=-\partial_t\vec{g}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

8

电磁场的四维动量

在自由空间中，能量-动量守恒定律写为：$\partial_\nu T_f^{\mu\nu}=0$。

- 对于每一个 μ，都给出了一个守恒流，因而共有4个守恒流

$$T_f^{\mu\nu},\quad \mu=0,1,2,3$$

- 与每一个守恒流对应的都有一个守恒荷，将四个守恒荷记为

$$P_f^\mu\triangleq\frac{1}{c}\int T_f^{\mu0}dV=\left(\frac{W}{c},\ \ \vec{G}\right)\triangleq\left(\frac{\mathcal{E}_f}{c},\ \ \vec{P}_f\right)$$

- P_f^μ 必然是4-矢量，称为**电磁场的四维动量**。

【证明】对任意常矢量 X^μ，有 $\partial_\nu\left(X_\mu T_f^{\mu\nu}\right)=0$。

因而，守恒流 $X_\mu T_f^{\mu\nu}$ 的守恒荷 $X_\mu P_f^\mu$ 必然为4-标量。

此结论对任意常矢量 X^μ 成立就意味着，P_f^μ 是一个4-矢量。

9

二、带电粒子的能量-动量守恒定律

带电粒子-电磁场系统的能量-动量是守恒的。因而应该有

$$f^{\mu} = \partial_{\nu} T_p^{\mu\nu}$$ **如何证明？**

- $f^{\mu} = F^{\mu\alpha} J_{\alpha}$ 中的 $J^{\alpha} = (\rho c, \vec{J})$ 是带电粒子系统的4-电流。设 $x_n^{\alpha}(t)$ 是粒子 e_n 以时间作为参数的世界线方程，可证

$$J^{\alpha}(x) = \sum_n e_n \frac{dx_n^{\alpha}(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

- 证明思路：将 $f^{\mu} = F^{\mu\alpha} J_{\alpha}$ 中的 $F^{\mu\alpha}$ 利用洛伦兹方程用粒子的状态变量表示，并将结果设法写成 $\partial_{\nu} T_p^{\mu\nu}$ 的形式。
- 此处，采用另一种方案：

首先，给出 $T_p^{\mu\nu}$ 的表达式；尔后，证明 $f^{\mu} = \partial_{\nu} T_p^{\mu\nu}$ 成立。

10

1. 粒子系统的能量-动量张量

考察一个无相互作用粒子的集合。假设某一点附近，粒子的数密度为 $n(x)$，并且其速度为 $\vec{v}(x) \Rightarrow$ 固有数密度 $n_0 = n/\gamma$。

- 能量密度： $w = \gamma n m c^2$

$$\Rightarrow \quad w = \gamma^2 n_0 m c^2 = n_0 m u^0 u^0$$

- 沿 x_k 方向的能流密度：$S_k = w v_k = \gamma n m c^2 v_k$

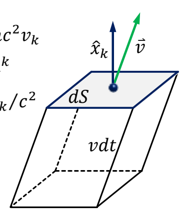
$$\Rightarrow \quad S_k / c = \gamma^2 n_0 m c v_k = n_0 m u^0 u^k$$

- 沿 x_k 方向的动量密度：$g_k = \gamma n m v_k = S_k / c^2$

$$\Rightarrow \quad c g_k = n_0 m u^k u^0$$

- 动量流密度：$T_{ij} = g_i v_j = \gamma n m v_j v_k$

$$\Rightarrow \quad T_{ij} = \gamma^2 n_0 m v_j v_k = n_0 m u^i u^j$$



11

能量-动量密度张量

这 16 个分量构成一个4-张量，称为粒子系统的**能量-动量张量**：

$$T_p^{\alpha\beta} = n_0 m u^{\alpha} u^{\beta} = \rho_0 u^{\alpha} u^{\beta}$$

其中， n_0 和 ρ_0 分别为固有数密度和固有质量密度。

- 张量 $T_p^{\alpha\beta}$ 是对称的：$T_p^{\alpha\beta} = T_p^{\beta\alpha}$。
- 张量 $T_p^{\alpha\beta}$的物理含义：

T_p^{00} = 能量密度

$T_p^{i0} = i$ 动量密度 $\times c$

$T_p^{0j} = j$ 方向的能量流密度 $\div c$

$T_p^{ij} = j$ 方向的 i 动量流密度

$$\begin{array}{ccc} & \text{密度} & \text{流密度} \\ T_p^{\mu\nu} = & \left(\begin{array}{c} \gamma\rho c^2 \\ \gamma\rho c\vec{v} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \gamma\rho c\vec{v} \\ \gamma\rho\vec{v}\vec{v} \end{array}\right) \end{array}$$

$$= \gamma\rho \begin{pmatrix} c^2 & c\vec{v} \\ c\vec{v} & \vec{v}\vec{v} \end{pmatrix}$$

12

孤立粒子系统的能量-动量守恒定律

孤立粒子系统的能量-动量守恒可用 $T_p^{\alpha\beta}$ 的连续性方程表示为：

$$\partial_\beta T_p^{\alpha\beta} = 0$$

【证明】任取一体积 V，其内能量 $\int_V T_p^{00} d^3x$ 的减少率为

$$-\frac{d}{dt}\int_V T_p^{00} d^3x = -c\int_V \partial_0 T_p^{00} d^3x$$

单位时间内能量经边界流出该体积的总量为

$$c\oint_{\partial V} T_p^{0k} d\sigma_k = c\int_V \partial_k T_p^{0k} d^3x$$

根据能量守恒，能量的减少必然是能量流出该体系的结果。因此能量守恒意味着上面两量必须相等。当体积足够小时就给出

$$\partial_0 T_p^{00} + \partial_k T_p^{0k} = \partial_\beta T_p^{0\beta} = 0$$

13

体系的总能量和总动量

四个守恒流 $T_p^{\alpha\beta}$ $(\alpha = 0,1,2,3)$ 对应四个守恒荷：

$$P_p^\alpha \triangleq \frac{1}{c}\int T_p^{\alpha 0} d^3x = \left(\frac{\mathcal{E}_p}{c},\ \ \vec{P}_p\right)$$

其中 $\mathcal{E}_p$ 和 $\vec{P}_p$ 分别给出体系的总能量和总动量。

- P_p^α必然是4-矢量，称为粒子系统的总4-动量。

14

2. 带电粒子的能量-动量守恒定律

带电粒子-电磁场系统的能量-动量守恒意味着应该有：

$$f^\mu = \partial_\nu T_p^{\mu\nu}$$

- 带电粒子系统的能量-动量张量我们是知道的，为

$$T_p^{\mu\nu} = n_0 m u^\mu u^\nu$$

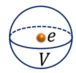
- 为证明带电粒子系统的能量-动量守恒，只需要证明：对任一给定的区域 V 下式都成立

$$\int_V \partial_\nu T_p^{\mu\nu} d^3x = \int_V f^\mu d^3x = \int_V F^{\mu\alpha} J_\alpha d^3x$$

- 进一步，我们只需要证明：上式对任一仅包含某个带电粒子的、足够小的区域 V 成立。

15

- 设 V 是包含某个粒子 e 的极小区域。



$$\int_V \partial_\nu T_p^{\mu\nu} d^3x = \int_V \partial_0 T_p^{\mu 0} d^3x + \int_V \partial_k T_p^{\mu k} d^3x$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{c}\int_V T_p^{\mu 0} d^3x\right] + \boxed{\oint_{\partial V} T_p^{\mu k} d\sigma_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V \partial_\nu T_p^{\mu\nu} d^3x = \frac{dp^\mu}{dt}}$$

$$\int_V F^{\mu\alpha} J_\alpha d^3x = F^{\mu\alpha}\int_V J_\alpha d^3x = F^{\mu\alpha}\int_V \rho_0 u_\alpha d^3x = \frac{1}{\gamma} e F^{\mu\alpha} u_\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V F^{\mu\alpha} J_\alpha d^3x = \frac{1}{\gamma}\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt}}$$

$$\Rightarrow \int_V \partial_\nu T_p^{\mu\nu} d^3x = \int_V f^\mu d^3x$$ 证毕！

这样，我们就证明了**带电粒子系统的能量-动量守恒定律：**

$$f^\mu = \partial_\nu T_p^{\mu\nu}$$

而**粒子系统的能量-动量张量**为 $T_p^{\mu\nu} = n_0 m u^\mu u^\nu$。

- $T_p^{\mu\nu}$ 是对称张量：$T_p^{\mu\nu} = T_p^{\nu\mu}$。
- $T_p^{\mu\nu}$ 可以表示为

$$\begin{array}{cc} \text{密度} & \text{流密度} \end{array}$$

$$T_p^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma nmc^2 & \gamma nmc\vec{v} \\ \gamma nmc\vec{v} & \gamma nm\vec{v}\vec{v} \end{pmatrix} = \gamma\rho_m \begin{pmatrix} c^2 & c\vec{v} \\ c\vec{v} & \vec{v}\vec{v} \end{pmatrix}$$

其中 $\rho_m = nm = \gamma n_0 m$ 为质量密度。

粒子系统的四维动量

对于不带电的粒子系统，能量-动量守恒定律写为：

$$\partial_\nu T_p^{\mu\nu} = 0$$

- 对于每一个μ ，都给出了一个守恒流，因而共有4个守恒流

$$T_p^{\mu\nu}, \quad \mu = 0,1,2,3$$

- 与每一个守恒流对应的都有一个守恒荷，四个守恒荷构成了一个四维矢量

$$P_p^\mu \triangleq \frac{1}{c}\int T_p^{\mu 0} dV = \left(\frac{1}{c}\sum \mathcal{E}_n, \ \sum \vec{p}_n\right) \triangleq \left(\frac{\mathcal{E}_p}{c}, \ \vec{P}_p\right)$$

称为**粒子系统的四维动量**。

三、电磁场-带电粒子系统

根据前面的讨论，对于电磁场-带电粒子系统，有

$$f^\mu = -\partial_\nu T_f^{\mu\nu} \quad \text{and} \quad f^\mu = \partial_\nu T_p^{\mu\nu}$$

由此必然有

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

这就是**电磁场-带电粒子系统的能量-动量守恒定律**。其中

$$T^{\mu\nu} \triangleq T_p^{\mu\nu} + T_f^{\mu\nu}$$

为**电磁场-带电粒子系统的总能量-动量张量**。

总能量-动量张量具体写出来为

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{L}_f - \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu + n_0 m u^\mu u^\nu$$

即有

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & c\vec{g} \\ c\vec{g} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix} + \gamma\rho_m \begin{pmatrix} c^2 & \vec{v} \\ \vec{v} & \vec{v}\vec{v} \end{pmatrix}$$

- **$T^{\mu\nu}$ 是一个对称张量**：$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$。
- 四个守恒荷构成的四维矢量称为系统的总的四维动量

$$P^\mu \triangleq \frac{1}{c}\int T^{\mu 0} dV = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \quad \vec{P}\right)$$

四、角动量守恒定律

定义**电磁场-带电粒子系统的角动量流密度张量**：

$$M^{\mu\alpha\beta} \triangleq x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}$$

- $M^{\mu\alpha\beta}$ 关于后两个指标反对称：$M^{\mu\alpha\beta} = -M^{\mu\beta\alpha}$。
- 利用 $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$，可得

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = (\partial_\mu x^\alpha)T^{\mu\beta} - (\partial_\mu x^\beta)T^{\mu\alpha}$$
$$= \delta_\mu^\alpha T^{\mu\beta} - \delta_\mu^\beta T^{\mu\alpha} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}$$

再利用 $T^{\mu\nu}$ 的对称性，得到

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0$$

这就是**角动量守恒定律**。

【思考】作为力矩密度 $\vec{\tau}=\vec{x}\times\vec{f}$ 的推广，定义**4-力矩密度张量**：

$$\tau^{\alpha\beta}\triangleq x^\alpha f^\beta - x^\beta f^\alpha$$

- $\tau^{\alpha\beta}$ 是一个反对称二阶张量：$\tau^{\alpha\beta}=-\tau^{\beta\alpha}$。
- 请证明：

$$\tau^{\alpha\beta}=\left\{\vec{f}ct-\left(\vec{f}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{x},\quad \vec{\tau}\right\}$$

- 请证明：

$$\begin{cases}\tau^{\alpha\beta}=-\partial_\mu\left(x^\alpha T_f^{\beta\mu}-x^\beta T_f^{\alpha\mu}\right)=-\partial_\mu M_f^{\mu\alpha\beta}\\ \tau^{\alpha\beta}=+\partial_\mu\left(x^\alpha T_p^{\beta\mu}-x^\beta T_p^{\alpha\mu}\right)=+\partial_\mu M_p^{\mu\alpha\beta}\end{cases}$$

22

角动量流密度张量的守恒荷

对于每一组 α,β，$M^{\mu\alpha\beta}$ 构成了一个守恒流。守恒荷记为

$$L^{\alpha\beta}\triangleq\frac{1}{c}\int M^{0\alpha\beta}d^3x=\frac{1}{c}\int\left(x^\alpha T^{0\beta}-x^\beta T^{0\alpha}\right)d^3x$$

称为**角动量张量**。

- $L^{\alpha\beta}$ 是一个反对称二阶张量，可将其简记为

$$L^{\alpha\beta}=\{\vec{K},\quad \vec{L}\}=\begin{pmatrix}0 & \vec{K}\\ -\vec{K} & \overleftrightarrow{L}\end{pmatrix}$$

- 独立守恒荷有6个：$\vec{K}$ 和 $\vec{L}$，其中 $\vec{L}$ 由下式定义

$$L^{ij}=\varepsilon^{ijk}L_k$$

23

守恒荷 $\vec{L}$ 的物理意义

由于

$$\begin{aligned}L^{ij}&\triangleq\frac{1}{c}\int M^{0ij}d^3x=\frac{1}{c}\int\left(x^iT^{0j}-x^jT^{0i}\right)d^3x\\&=\int\left(x^ig^j-x^jg^i\right)d^3x+\int\gamma\rho_m\left(x^iv^j-x^jv^i\right)d^3x\end{aligned}$$

因此，$\vec{L}$ **为系统的总角动量**

$$\vec{L}=\int(\vec{x}\times\vec{g})d^3x+\sum_n(\vec{x}_n\times\vec{p}_n)=\vec{L}_f+\vec{L}_p$$

$$T^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}w & c\vec{g}\\ c\vec{g} & \overleftrightarrow{T}\end{pmatrix}+\gamma\rho_m\begin{pmatrix}c^2 & c\vec{v}\\ c\vec{v} & \vec{v}\vec{v}\end{pmatrix}$$

24

守恒荷 $\vec{K}$ 的物理意义

由于

$$K^i = L^{0i} \triangleq \frac{1}{c}\int M^{00i} d^3x = \frac{1}{c}\int \left(x^0 T^{0i} - x^i T^{00}\right) d^3x$$

$$= \int \left(ctg^i - \frac{w}{c}x^i\right) d^3x + \int \gamma\rho_m c\left(tv^i - x^i\right) d^3x$$

因此（其中 $\vec{P} = \vec{P}_f + \vec{P}_p$ 为电磁场-带电粒子系统的总动量）

$$\vec{K} = ct\vec{P} - \frac{1}{c}\left[\int w\vec{x}d^3x + \sum_n \mathcal{E}_n \vec{x}_n\right] = \vec{K}_f + \vec{K}_p$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & c\vec{g} \\ c\vec{g} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix} + \gamma\rho_m \begin{pmatrix} c^2 & c\vec{v} \\ c\vec{v} & \vec{v}\vec{v} \end{pmatrix}$$

25

所以，$\vec{K}$ 守恒意味着

$$c^2\vec{P}t - \left[\int w\vec{x}d^3x + \sum \mathcal{E}_n \vec{x}_n\right] = c^2\vec{P}t - \mathcal{E}\vec{x}_{\mathrm{cm}} = \text{constant vector}$$

其中 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_f + \mathcal{E}_p$ 是体系的总能量，$\vec{x}_{\mathrm{cm}}$则为体系的**能量中心**：

$$\vec{x}_{\mathrm{cm}} \triangleq \frac{\int T^{00}\vec{x}d^3x}{\int T^{00}d^3x} = \frac{\int w\vec{x}d^3x + \sum \mathcal{E}_n \vec{x}_n}{\mathcal{E}}$$

由于体系的总动量 $\vec{P}$ 和总能量 $\mathcal{E}$ 都是守恒的，所以

$$\frac{d\vec{x}_{\mathrm{cm}}}{dt} = \frac{c^2\vec{P}}{\mathcal{E}}$$

也就是说，**能量中心作匀速直线运动。**

26