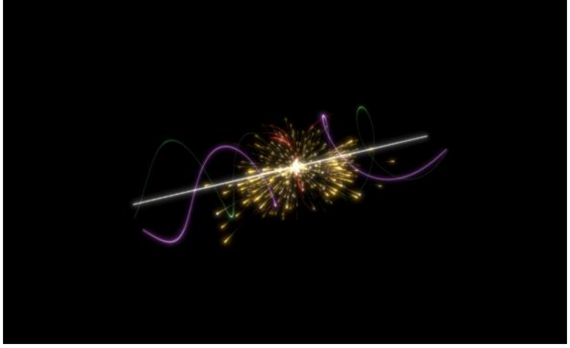
§2 协变的粒子动力学方程



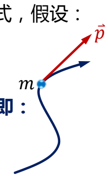
一、相对论能量、动量

1. 能量、动量表达式的推导

为给出粒子的**相对论能量** $\mathcal{E}$ 与**相对论动量** $\vec{p}$ 的表达式，假设：

- **孤立体系的能量与动量守恒；**
- **$\mathcal{E}$ 与 $\vec{p}$ 是速度的单值函数，且 $\vec{p}$ 沿着速度方向，即：**

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(v), \quad \vec{p} = \tilde{m}(v)\vec{v}$$



- **速度一定时，不同粒子的 $\mathcal{E}$、$\vec{p}$ 与质量 m 成正比，即**

$$\frac{\mathcal{E}_1(v)}{\mathcal{E}_2(v)} = \frac{\tilde{m}_1(v)}{\tilde{m}_2(v)} = \frac{m_1}{m_2}$$

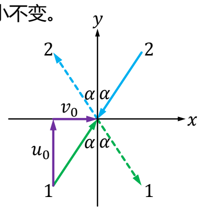
全同粒子的弹性碰撞

考察两个静止质量均为 m 的全同粒子之间的弹性碰撞。
设在 K 系中，碰撞前两粒子速度大小相同、方向相反。
因而碰撞之前总动量为零。

- 动量守恒 ⟹ 碰后两粒子的速度方向相反，大小相同。
- 能量守恒 ⟹ 碰撞前后粒子的速度大小不变。

【结论】在 K 系中，
碰后两粒子的速度方向相反，
速度大小则与碰前相同。

- 如图在 K 系中建立空间坐标系。



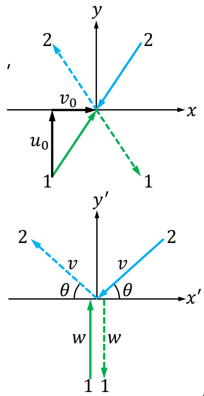
在以 $v_0\hat{x}_1$ 运动的 K' 系中：

- 碰撞前后粒子1的速度沿着竖直方向，且速度大小相同，为

$$w = \frac{u_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

- 碰撞前后粒子2在水平方向和竖直方向速度大小相同，分别为

$$\begin{cases} v\cos\theta = \dfrac{2v_0}{1 + v_0^2/c^2} \\ v\sin\theta = u_0 \dfrac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0^2/c^2} \end{cases}$$



4

- 在 K' 系中，竖直方向的动量守恒给出：

$$\tilde{m}(w)w = \tilde{m}(v)v\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{\tilde{m}(v)}{\tilde{m}(w)} = \frac{1 + v_0^2/c^2}{1 - v_0^2/c^2}$$

➢ 取 $u_0 \longrightarrow 0$ 的极限情况：$w \longrightarrow 0$； $\theta \longrightarrow 0$；

$$v = \frac{2v_0}{1 + v_0^2/c^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\tilde{m}(v)}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

为了符合于能量、动量守恒定律，必然有

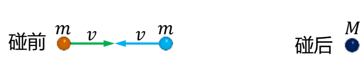
$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

【思考】 $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ 确实使得 y 方向动量对一般的 u_0 也是守恒的。

5

全同粒子的非弹性碰撞

考察两个静止质量均为 m 的全同粒子之间的非弹性碰撞。
在 K 系中，碰撞前两粒子速度大小均为 v、方向相反。
碰撞后结合在一起生成一个新的粒子，设其静止质量为 M。



- 动量守恒 $\Longrightarrow$ M 的速度必为零。
- 能量守恒 $\Longrightarrow 2\mathcal{E}_m(v) = \mathcal{E}_M(0) = \dfrac{M}{m}\mathcal{E}_m(0)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathcal{E}_m(v)}{\mathcal{E}_m(0)} = \frac{M}{2m}$$

6

在以 v 向左运动的 K' 系中：

- 碰前一个粒子以速度 w 撞向静止的另一粒子，碰后组合体的速度为 v。其中

$$w=\frac{2v}{1+v^2/c^2}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}=\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}$$

- 动量守恒给出

$$\frac{mw}{\sqrt{1-w^2/c^2}}=\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{M}{m}=\frac{2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

结合前面的结论，得到 $\dfrac{\mathcal{E}_m(v)}{\mathcal{E}_m(0)}=\dfrac{M}{2m}=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

7

- 所以质量为 m 的粒子的相对论能量为

$$\mathcal{E}_m(v)=\frac{\mathcal{E}_m(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

> **尽管牛顿力学中能量的定义可以相差一个常数，但是相对论中，静止能量是必然的结果，否则会违反相对性原理。**

【思考】利用上面的表达式以及前面得到的关系验证 K' 系中能量确实守恒，即有 $\mathcal{E}_m(w)+\mathcal{E}_m(0)=\mathcal{E}_M(v)$。

- 无论从量纲角度，还是要求相对论动能 $T=\mathcal{E}_m(v)-\mathcal{E}_m(0)$ 在低速情形回到熟悉的结果 $T=\frac{1}{2}mv^2$，均可断定静止能量为

$$\mathcal{E}_m(0)=mc^2$$

8

相对论能量和动量

质量为 m 的粒子以速度 $\vec{v}$ 运动时，其**相对论能量与动量**为

$$\mathcal{E}\triangleq\gamma mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad\vec{p}\triangleq\gamma m\vec{v}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

- 粒子速度可以用相对论能量和动量表示为 $\vec{\beta}=c\vec{p}/\mathcal{E}$ 。
- 粒子的**相对论动能**定义为

$$T\triangleq\mathcal{E}(v)-\mathcal{E}(0)=(\gamma-1)mc^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)mc^2$$

- 将 $\vec{p}$ 和 T 按照 $\beta=v/c$ 展开：

$$\vec{p}=m\vec{v}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4+\cdots\right),\quad T=\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{3}{4}\beta^2+\cdots\right)$$

9

2. 四维动量

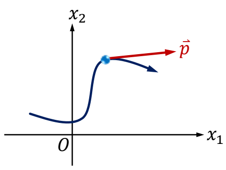
相对论能量与动量构成了一个四维矢量，即**四维动量**：

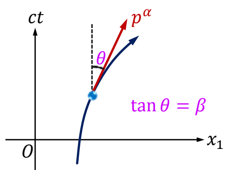
$$p^{\alpha} \triangleq mu^{\alpha} = m\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c},\ \ \vec{p}\right)$$

- **质壳关系**

$$p^{\alpha}p_{\alpha} = -m^2c^2 \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

- $\vec{p}$ 沿粒子轨迹的切线方向；p^{α} 沿粒子世界线的切线方向。





光子的四维动量

- 对于光子：

$$|d\vec{x}| = cdt \quad \Longrightarrow \quad dx^{\alpha}dx_{\alpha} = 0 \quad \Longrightarrow \quad d\tau = 0$$

  - 不能定义光子的四维速度。
  - 不能由 $p^{\alpha} = mu^{\alpha}$ 来定义光子的四维动量。

- 对光子的四维动量 $p^{\alpha} = (\mathcal{E}/c,\ \ \vec{p})$ 提如下要求：
  - **光子的三维动量 $\vec{p}$ 沿着其轨道的切线方向；**
  - **光子的四维动量 p^{α} 沿着其世界线的切线方向；**

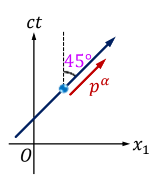
在此限制下，我们就可以给出 p^{α} 的确切表达式。

- 假如光子在惯性标架 K 中的能量为 $\mathcal{E}$，从而在标架 K 中

$$p^0 = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

- 为使 p^{α} 平行于光子的世界线，其能量和动量必然满足关系

$$\mathcal{E} = |\vec{p}|c \quad \Longrightarrow \quad p^{\alpha}p_{\alpha} = 0$$



- 光子的四维动量可以写为

$$p^{\alpha} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c},\ \ \vec{p}\right) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c},\ \ \frac{\mathcal{E}}{c}\hat{p}\right) = (|\vec{p}|,\ \ \vec{p})$$

- 一般粒子的四维动量满足的两个关系

$$\vec{\beta}=\frac{c\vec{p}}{\mathcal{E}},\quad p^\alpha p_\alpha=-m^2c^2\quad\leftrightarrow\quad \mathcal{E}^2=p^2c^2+m^2c^4$$

对于光子这两个关系仍然成立，只是写为了

$$\vec{\beta}=c\hat{p},\quad p^\alpha p_\alpha=0\quad\leftrightarrow\quad \mathcal{E}=|\vec{p}|c$$

光子的静止质量必然为零，零质量粒子必然以光速运动。

- 光子概念来自量子力学，其能量和动量满足**德布罗意关系**

$$\mathcal{E}=hf=\hbar\omega,\quad |\vec{p}|=\frac{h}{\lambda}=\hbar k,\quad \left(f=\frac{c}{\lambda}\right)$$

这等价于说，光子的四维动量与四维波矢满足

$$p^\alpha=\hbar k^\alpha$$

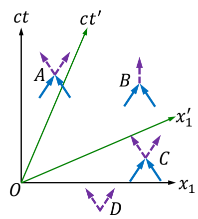
13

3. 守恒定律

孤立体系的能量、动量守恒定律与惯性系的选取无关：

$$\left(\sum p^\alpha\right)_{\text{before}}=\left(\sum p^\alpha\right)_{\text{after}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\sum p'^\alpha\right)_{\text{before}}=\left(\sum p'^\alpha\right)_{\text{after}}$$



这样的方程是明显协变的

14

弹性与非弹性

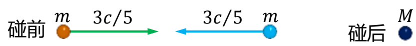
- 在牛顿力学中，孤立体系的动量、质量总是守恒的，动能则未必守恒；
- 在相对论中，孤立体系的动量、能量总是守恒的，质量、动能则未必守恒。
- 无论在牛顿力学还是相对论中，若碰撞过程中动能守恒，则称其为**弹性碰撞**，否则称为**非弹性碰撞**。
- 相对论弹性碰撞过程中，能量和动能都守恒

$\Longrightarrow$ 静止质量守恒

在实际过程中，相对论弹性碰撞几乎总是意味着碰撞不会改变粒子的种类和个数。

15

【例】静止质量同为 m、速度均为 $(3/5)c$ 的两团粘土对头碰撞，碰后黏在一起。试问黏在一起的粘土质量 M 等于多大？



【解】由动量守恒，碰后 M 静止。由能量守恒得到

$$2\times\frac{mc^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}}=Mc^2 \quad\Rightarrow\quad M=\frac{5}{2}m$$

- 动能转化为了热能（热能即是物质内部原子/分子随机运动的动能和势能之和），这些微观的能量反映在了物体的质量上：内能 W 对于质量有 W/c^2 的贡献。
- 中性 π 介子的衰变过程 $\pi^0\to e^-+e^+$ 中，由于 $m_\pi c^2=135\ \mathrm{MeV}$，$m_e c^2=0.511\ \mathrm{MeV}$ ，因此，静止能量几乎全部转化为了动能，只有原始质量的不到1% 保留了下来。

16

【例】静止 π 衰变为一个 μ 子和一个中微子：$\pi^-\to\mu^-+\bar{\nu}_\mu$。试用质量 m_π 和 m_μ 表示 μ 子的能量。已知 $m_\pi c^2=140\ \mathrm{MeV}$，$m_\mu c^2=105\ \mathrm{MeV}$，设中微子质量 $m_\nu=0$。

【解】（方法一）由能量、动量守恒得到

$$\mathcal{E}_\mu+\mathcal{E}_\nu=m_\pi c^2,\quad \vec{p}_\mu+\vec{p}_\nu=0$$

利用第二式以及 $m_\nu=0$，有

$$\mathcal{E}_\nu=|\vec{p}_\nu|c=|\vec{p}_\mu|c=\sqrt{\mathcal{E}_\mu^2-m_\mu^2c^4}$$

代入能量守恒方程，得到

$$\mathcal{E}_\mu+\sqrt{\mathcal{E}_\mu^2-m_\mu^2c^4}=m_\pi c^2 \ \Rightarrow\ \begin{cases}\mathcal{E}_\mu=\dfrac{(m_\pi^2+m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}\approx 109\ \mathrm{MeV}\\ \mathcal{E}_\nu=m_\pi c^2-\mathcal{E}_\mu\approx 31\ \mathrm{MeV}\end{cases}$$

17

（方法二）衰变前后3个粒子的四动量分别为：

$$\begin{cases}p_\pi=(m_\pi c,\ \ \vec{0})\\ p_\mu=(\mathcal{E}_\mu/c,\ \ \vec{p})\\ p_\nu=(|\vec{p}|,\ \ -\vec{p})\end{cases} \Rightarrow\quad p_\pi=p_\mu+p_\nu \quad\Rightarrow\quad p_\pi-p_\mu=p_\nu$$

左右两边分别取平方（与自身标量积）给出

$$p_\pi\cdot p_\pi+p_\mu\cdot p_\mu-2p_\pi\cdot p_\mu=p_\nu\cdot p_\nu$$

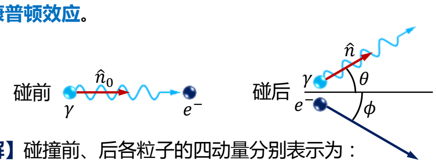
$$\Rightarrow\quad(-m_\pi^2c^2)+(-m_\mu^2c^2)-2(-m_\pi\mathcal{E}_\mu)=0$$

因而 μ 子的能量为

$$\mathcal{E}_\mu=\frac{(m_\pi^2+m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}\approx 109\ \mathrm{MeV}$$

18

【例】将自由电子对光的散射视为光子与自由电子的碰撞，解释**康普顿效应**。



【解】碰撞前、后各粒子的四动量分别表示为：

$$\begin{cases} p_\gamma = \dfrac{Q_0}{c}(1, \quad \hat{n}_0) \\ p'_\gamma = \dfrac{Q}{c}(1, \quad \hat{n}) \end{cases} \qquad \begin{cases} p_e = (m_e c, \quad \vec{0}) \\ p'_e = \left(\dfrac{\mathcal{E}}{c}, \quad \vec{p}\right) \end{cases}$$

将 $p_\gamma + p_e = p'_\gamma + p'_e$ 写为 $p_\gamma - p'_\gamma = p'_e - p_e$，两边平方得到

$$p_\gamma \cdot p_\gamma + p'_\gamma \cdot p'_\gamma - 2p_\gamma \cdot p'_\gamma = p_e \cdot p_e + p'_e \cdot p'_e - 2p_e \cdot p'_e$$

19

因而（其中 θ 为出射光子与入射光子传播方向夹角）

$$\frac{2QQ_0}{c^2}(1-\cos\theta) = 2m_e(\mathcal{E} - m_e c^2) = 2m_e(Q_0 - Q)$$

由此给出

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \frac{1-\cos\theta}{m_e c^2}$$

最后，利用德布罗意关系（$Q = hc/\lambda$ 和 $Q_0 = hc/\lambda_0$），就给出了康普顿效应的数学表述

$$\Delta\lambda \triangleq \lambda - \lambda_0 = \lambda_C(1-\cos\theta)$$

其中，λ_C 为**康普顿波长**：

$$\lambda_C \triangleq \frac{h}{m_e c} \approx 2.43 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

20

二、带电粒子的运动方程

1. 运动方程的导出

为给出电磁场中带电粒子的动力学方程，假设：

- **牛顿方程 $\vec{F} = m\vec{a}$ 在低速情形下是近似成立的。**
- **牛顿方程在粒子速度为零时是严格正确的。**
- **静止电荷只受电场力 $\vec{F} = e\vec{E}$ 作用。**

设在惯性系 K 中，质量为 m、电量为 e 的粒子在电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 的作用下运动，其在 t 时刻的速度为 $\vec{v}$、加速度为 $\vec{a}$。

下面我们在以上假设基础上导出粒子的动力学方程。

21

- 设 K' 系为MCRF，即 K' 系相对于 K 系以粒子在 t 时刻的速度 $\vec{v}$ 匀速运动。该系中，粒子速度 $\vec{v}'=0$，因而

$$m\vec{a}'=e\vec{E}'$$

- 利用加速度和电磁场的变换法则

$$\begin{cases}\vec{a}_\parallel=\vec{a}'_\parallel/\gamma^3\\ \vec{a}_\perp=\vec{a}'_\perp/\gamma^2\end{cases}\quad\text{and}\quad\begin{cases}\vec{E}'_\parallel=\vec{E}_\parallel, & \vec{E}'_\perp=\gamma\left(\vec{E}_\perp+\vec{\beta}\times c\vec{B}\right)\\ \vec{B}'_\parallel=\vec{B}_\parallel, & c\vec{B}'_\perp=\gamma\left(c\vec{B}_\perp-\vec{\beta}\times\vec{E}\right)\end{cases}$$

- 将前面的牛顿方程用 K 系所测物理量表示为

$$\begin{cases}\gamma^3 m\vec{a}_\parallel=e\vec{E}_\parallel\\ \gamma m\vec{a}_\perp=e\left(\vec{E}_\perp+\vec{\beta}\times c\vec{B}\right)\end{cases}$$

22

- 利用

$$\begin{cases}w^\alpha\triangleq\dfrac{du^\alpha}{d\tau}, & p^\alpha\triangleq mu^\alpha, \quad \dfrac{dt}{d\tau}=\gamma\\ w^0=\gamma^4\vec{\beta}\cdot\vec{a}, & \vec{w}_\parallel=\gamma^4\vec{a}_\parallel, \quad \vec{w}_\perp=\gamma^2\vec{a}_\perp\end{cases}$$

可将方程写为

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d\vec{p}}{d\tau}=\gamma\vec{F}$$

其中，$\vec{F}$ 为粒子受到的洛伦兹力

$$\vec{F}=e\left(\vec{E}+\vec{\beta}\times c\vec{B}\right)=e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

- 将关系 $\mathcal{E}^2=p^2c^2+m^2c^4$ 对时间求导，并利用 $\vec{v}=c^2\vec{p}/\mathcal{E}$ 得

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d(\mathcal{E}/c)}{d\tau}=\gamma\vec{F}\cdot\vec{\beta}$$

23

2. 洛伦兹方程

- $\gamma\vec{F}\cdot\vec{\beta}$ 和 $\gamma\vec{F}$ 构成了一个四维矢量 K^α，称为**四维电磁力**：

$$K^\alpha\triangleq eF^{\alpha\beta}u_\beta=\left(\gamma\vec{F}\cdot\vec{\beta},\ \ \gamma\vec{F}\right)=\gamma e\left(\vec{E}\cdot\vec{\beta},\ \ \vec{E}+\vec{\beta}\times c\vec{B}\right)$$

  - **K^α 与 u^α 正交：** $u_\alpha K^\alpha=eF^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta=0$。

- 利用 K^α，带电粒子的运动方程可写为明显协变的形式

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau}=K^\alpha=eF^{\alpha\beta}u_\beta\quad\Leftrightarrow\quad mw^\alpha=eF^{\alpha\beta}u_\beta$$

称其为**洛伦兹方程**。

  - 洛伦兹方程中，只有 α 取空间指标的三个方程是独立的。
  - $u_\alpha K^\alpha=0$ 是与 $u_\alpha w^\alpha=0$ 自洽的。

24

洛伦兹方程的三维表述

洛伦兹方程的时间分量称为**动能定理**，可等价地表示为

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

洛伦兹方程的三个独立的空间分量方程可等价地表示为

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B}$$

- 这些方程是符合于相对性原理的，在所有惯性系中都具有相同的形式（因而是协变的），但却不是明显协变的。
- 空间分量方程可作为动力学方程：知道了 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$，则

$$(\vec{r}_0,\vec{v}_0)\quad\Longrightarrow\quad(\vec{r},\vec{v})$$

- 动能定理并不独立，因此，与牛顿方程相比，电磁场中带电粒子的动力学方程只是将动量 $\vec{p}$ 的定义由 $m\vec{v}$ 修改为 $\gamma m\vec{v}$。

25

用加速度表示的动力学方程

动力学方程可以用加速度重新写为

$$\gamma m\vec{a}+\gamma^3 m\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)\vec{\beta}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\Longrightarrow\quad \gamma^3 m\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)=e\vec{E}\cdot\vec{\beta}$$

还可将其改写为（其中 $\vec{F}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B}$）

$$\gamma m\vec{a}=e\left[\vec{E}-\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right)\vec{\beta}+\vec{v}\times\vec{B}\right]=\vec{F}-\left(\vec{\beta}\cdot\vec{F}\right)\vec{\beta}$$

- 如果 $\vec{\beta}\parallel\vec{a}$，等价地说，如果 $\vec{\beta}\parallel\vec{F}$，则方程写为

$$\vec{F}=\gamma^3 m\vec{a}$$

- 如果 $\vec{\beta}\perp\vec{a}$，等价地说，如果 $\vec{\beta}\perp\vec{F}$，则方程写为

$$\vec{F}=\gamma m\vec{a}$$

26

三、带电粒子在电磁场中的运动

洛伦兹方程可以写为

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau}=eF^{\alpha\beta}u_\beta=\frac{e}{m}F^\alpha{}_\beta p^\beta\ \longrightarrow\ \frac{e}{m}\begin{pmatrix}0 & \vec{E}/c\\ \vec{E}/c & \overleftrightarrow{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^0\\ \vec{p}\end{pmatrix}$$

定义

$$\Omega^\alpha{}_\beta\triangleq\begin{pmatrix}0 & \vec{\omega}_E\\ \vec{\omega}_E & \overleftrightarrow{\omega}_B\end{pmatrix},\quad \text{where }\ \vec{\omega}_E\triangleq\frac{e\vec{E}}{mc},\ \ \overleftrightarrow{\omega}_B\triangleq\frac{e\overleftrightarrow{B}}{m}$$

因而又可将洛伦兹方程写为

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau}=\Omega^\alpha{}_\beta p^\beta\quad\Leftrightarrow\quad\frac{du^\alpha}{d\tau}=\Omega^\alpha{}_\beta u^\beta$$

27

1. 均匀电场中的带电粒子

取 x_1 轴沿着 $\vec{E}$ 的方向，则运动方程写为

$$\frac{d(\mathcal{E}/c)}{d\tau}=\omega_E p_1,\quad \frac{dp_1}{d\tau}=\omega_E(\mathcal{E}/c),\quad \frac{dp_2}{d\tau}=0,\quad \frac{dp_3}{d\tau}=0$$

- 不妨设 $t=0=\tau$ 时刻，$p_1=0=p_3$，$p_2=p_0$。
- 令 $\mathcal{E}_0=(m^2c^4+p_0^2c^2)^{1/2}$ 为初始能量，方程解耦后求解给出

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cosh\omega_E\tau,\quad p_1=\frac{\mathcal{E}_0}{c}\sinh\omega_E\tau,\quad p_2=p_0,\quad p_3=0$$

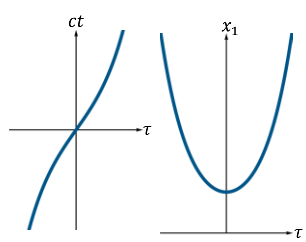
注： 由 $\vec{v}=\vec{p}c^2/\mathcal{E}$ 知，当 $\tau\longrightarrow\pm\infty$ 时，

$v_1\longrightarrow c$，$v_2\longrightarrow 0$，而 $v\longrightarrow c$。

28

- 利用四维动量定义 $p^\alpha=m\,dx^\alpha/d\tau$，并合适选择坐标原点，得到以固有时作为参数的粒子的世界线：

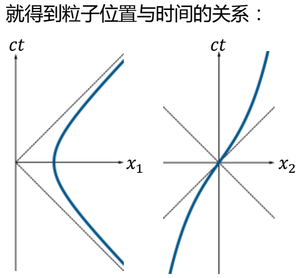
$$\begin{cases} ct=\dfrac{\mathcal{E}_0}{mc\omega_E}\sinh\omega_E\tau \\ x_1=\dfrac{\mathcal{E}_0}{mc\omega_E}\cosh\omega_E\tau \\ x_2=\dfrac{p_0}{m}\tau \\ x_3=0 \end{cases}$$



29

- 利用第一式消去固有时，就得到粒子位置与时间的关系：

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{\left(\dfrac{\mathcal{E}_0}{eE}\right)^2+c^2t^2} \\ x_2=\dfrac{p_0c}{eE}\operatorname{arcsinh}\dfrac{eEct}{\mathcal{E}_0} \\ x_3=0 \end{cases}$$



注： 若初速度为零，则粒子将沿着 x_1 轴作双曲运动：

$$x_1=\sqrt{b^2+c^2t^2},\quad \left(b=\frac{mc^2}{eE}\right)$$

30

2. 均匀磁场中的带电粒子

取 x_3 轴沿着 $\vec{B}$ 的方向，则运动方程写为

$$\frac{d(\mathcal{E}/c)}{d\tau}=0,\quad \frac{dp_1}{d\tau}=\omega_B p_2,\quad \frac{dp_2}{d\tau}=-\omega_B p_1,\quad \frac{dp_3}{d\tau}=0$$

- 不妨设 $t=0=\tau$ 时刻，$p_1=0$，$p_2=p_\perp$，$p_3=p_\parallel$。
- 方程解耦后求解给出

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0,\quad p_1=p_\perp\sin\omega_B\tau,\quad p_2=p_\perp\cos\omega_B\tau,\quad p_3=p_\parallel$$

其中，$\mathcal{E}_0=(m^2c^4+p_0^2c^2)^{1/2}$ 为粒子能量，此处 $p_0^2=p_\perp^2+p_\parallel^2$。由于粒子速度大小不变，因而洛伦兹因子为常数

$$\gamma=\mathcal{E}_0/mc^2=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$$

- 利用四维动量定义 $p^\alpha=m\,dx^\alpha/d\tau$，并合适选择坐标原点，得到以固有时作为参数的粒子的世界线：

$$\begin{cases} ct=\dfrac{\mathcal{E}_0\tau}{mc} \\ x_1=-\dfrac{p_\perp}{m\omega_B}\cos\omega_B\tau \\ x_2=\dfrac{p_\perp}{m\omega_B}\sin\omega_B\tau \\ x_3=\dfrac{p_\parallel\tau}{m} \end{cases}$$

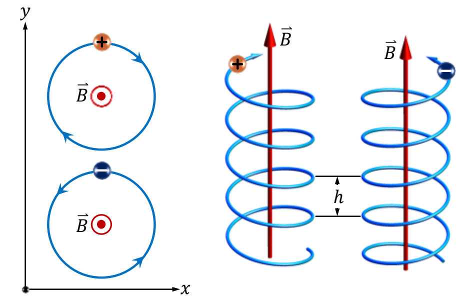
带电粒子绕磁感应线作螺旋线运动。

- 利用第一式消去固有时，就得到粒子位置与时间的关系：

$$\begin{cases} x_1=-R\cos\omega t \\ x_2=R\sin\omega t \\ x_3=\dfrac{p_\parallel t}{\gamma m} \end{cases}$$

其中 R 和 ω 分别为**回旋半径**和**回旋频率**：

$$\begin{cases} \omega=\dfrac{\omega_B}{\gamma}=\dfrac{eB}{\gamma m} \\ R=\dfrac{p_\perp}{m\omega_B}=\dfrac{p_\perp}{eB} \end{cases}$$



3. 电、磁复合场中的带电粒子

- 若 $\vec{E} \perp \vec{B}$ 且 $E > cB$，取 x_2 轴和 x_3 轴分别沿着 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的方向。以固有时为参数的世界线方程为

$$\begin{cases} ct = \dfrac{\gamma_E^2}{m\omega}\left[\beta_E\left(p_0 - \beta_E\dfrac{\mathcal{E}_0}{c}\right)\omega\tau + \left(\dfrac{\mathcal{E}_0}{c} - \beta_E p_0\right)\sinh\omega\tau\right] \\ x_1 = \dfrac{\gamma_E^2}{m\omega}\left[\left(p_0 - \beta_E\dfrac{\mathcal{E}_0}{c}\right)\omega\tau + \beta_E\left(\dfrac{\mathcal{E}_0}{c} - \beta_E p_0\right)\sinh\omega\tau\right] \\ x_2 = \dfrac{\gamma_E}{m\omega}\left(\dfrac{\mathcal{E}_0}{c} - \beta_E p_0\right)(\cosh\omega\tau - 1) \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

其中

$$\omega = \sqrt{\omega_E^2 - \omega_B^2} = \frac{e}{mc}\sqrt{E^2 - c^2B^2}, \quad \gamma_E = \frac{E}{\sqrt{E^2 - c^2B^2}}$$

- 若 $\vec{E} \perp \vec{B}$ 且 $E < cB$，取 x_2 轴和 x_3 轴分别沿着 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的方向。以固有时为参数的世界线方程为

$$\begin{cases} ct = \dfrac{\mathcal{E}_0}{mc}\tau + \beta_E\gamma_E\dfrac{p_{20}}{m\omega}(1 - \cos\omega\tau) \\ x_1 = \beta_E\dfrac{\mathcal{E}_0}{mc}\tau + \gamma_E\dfrac{p_{20}}{m\omega}(1 - \cos\omega\tau) \\ x_2 = \dfrac{p_{20}}{m\omega}\sin\omega\tau \\ x_3 = \dfrac{p_{30}}{m}\tau \end{cases}$$

其中

$$\omega = \sqrt{\omega_B^2 - \omega_E^2} = \frac{e}{mc}\sqrt{c^2B^2 - E^2}, \quad \gamma_E = \frac{cB}{\sqrt{c^2B^2 - E^2}}$$

- 若 $\vec{E} \perp \vec{B}$ 且 $E = cB$，取 x_2 轴和 x_3 轴分别沿着 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的方向。以固有时为参数的世界线方程为

$$\begin{cases} ct = \dfrac{1}{6m\omega}\left(\dfrac{\mathcal{E}_0}{c} - p_{10}\right)(\omega\tau)^3 + \dfrac{p_{20}}{2m\omega}(\omega\tau)^2 + \dfrac{\mathcal{E}_0}{mc}\tau \\ x_1 = \dfrac{1}{6m\omega}\left(\dfrac{\mathcal{E}_0}{c} - p_{10}\right)(\omega\tau)^3 + \dfrac{p_{20}}{2m\omega}(\omega\tau)^2 + \dfrac{p_{10}}{m}\tau \\ x_2 = \dfrac{1}{2m\omega}\left(\dfrac{\mathcal{E}_0}{c} - p_{10}\right)(\omega\tau)^2 + \dfrac{p_{20}}{m}\tau \\ x_3 = \dfrac{p_{30}}{m}\tau \end{cases}$$

其中

$$\omega = \frac{eB}{m} = \omega_E = \omega_B$$

37

- 若$\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$，总可以找到某个惯性系，使得其中的电场与磁场平行。此处假设 $\vec{E} \parallel \vec{B}$，并设 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 都平行于 x_3 轴，以固有时为参数的世界线方程为

$$\begin{cases} ct = \dfrac{\mathcal{E}_0}{mc\omega_E}\sinh \omega_E\tau \\ x_1 = \dfrac{p_0}{m\omega_B}(1 - \cos \omega_B\tau) \\ x_2 = \dfrac{p_0}{m\omega_B}\sin \omega_B\tau \\ x_3 = \dfrac{\mathcal{E}_0}{mc\omega_E}(\cosh \omega_E\tau - 1) \end{cases}$$

38