CH4. 电磁规律的协变性

1

§1 协变的电磁场方程

2

一、连续性方程

1. 四维电流密度

不妨考察一团带电量均为 e 的相同粒子，粒子数密度和速度分别设为 $n(x)$ 和 $\vec{v}(x)$，电荷密度 ρ 和电流密度 $\vec{J}$ 分别定义为

$$\rho(x) \triangleq en(x), \qquad \vec{J}(x) \triangleq en(x)\vec{v}(x) = \rho(x)\vec{v}(x)$$

- 利用固有粒子数密度 n_0（$n = \gamma n_0$），可将 ρ 和 $\vec{J}$ 分别写为

$$\rho = \gamma e n_0 = \gamma\rho_0, \qquad \vec{J} = \gamma e n_0\vec{v} = \gamma\rho_0\vec{v}$$

其中，$\rho_0 = en_0$ 为固有电荷密度。

- 故 ρc 和 $\vec{J}$ 构成了如下四维矢量，称其为**四维电流密度矢量：**

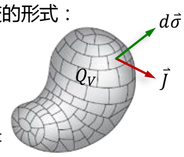
$$J^\alpha \triangleq \rho_0 u^\alpha = (\rho c, \ \vec{J})$$

3

2. 连续性方程

利用 J^α，可以将连续性方程写为明显协变的形式：

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \partial_\alpha J^\alpha=0$$



- 电荷守恒是一种**定域的守恒**，其含义是

$$\frac{dQ_V}{dt}=-\oint_{\partial V}\vec{J}\cdot d\vec{\sigma},\quad \text{where}\ \ Q_V\triangleq\frac{1}{c}\int_V J^0 d^3x$$

- 由连续性方程知：全空间的电量是守恒的

$$\frac{dQ}{dt}=0,\quad \text{where}\ \ Q\triangleq\frac{1}{c}\int J^0 d^3x=\int\rho\, d^3x$$

4

3. 守恒流与守恒荷

若四维矢量场 J^α 满足连续性方程 $\partial_\alpha J^\alpha=0$，则称其为**守恒流**，而 J^0 对全空间的积分（或除以 c）Q 称为**守恒荷**

$$Q(t)\triangleq\frac{1}{c}\int J^0 d^3x$$

假设：在任一时刻 t，当 $|\vec{x}|\to\infty$ 时 $J^\alpha(t,\vec{x})$ 都足够快地趋于零。

定理：守恒流 J^α 的守恒荷 Q
不仅是守恒的（其数值不随时间变化），
而且是一个洛伦兹标量（其数值与惯性系的选取无关）。

下面证明在正规洛伦兹变换 $x'=\Lambda x$ 下，有 $Q'=Q$。

5

【证明】连续性方程意味着 Q 守恒，故

$$\begin{aligned}Q(t)&=\frac{1}{c}\int J^0(t,\vec{x})d^3x &&=\frac{1}{c}\int J^0(0,\vec{x})d^3x\\&=\frac{1}{c}\int J^0(x)\delta(ct)d^4x &&=\frac{1}{c}\int J^0(x)\partial_0\Theta(x^0)d^4x\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad Q(t)=\frac{1}{c}\int J^\alpha(x)\partial_\alpha\Theta(x^0)d^4x$$

在洛伦兹变换 $x'=\Lambda x$ 下，Q 变为了

$$\begin{aligned}Q'&=\frac{1}{c}\int J'^\alpha(x')\partial'_\alpha\Theta(x'^0)d^4x'\\&=\frac{1}{c}\int J^\alpha(x)\partial_\alpha\Theta(x'^0)d^4x\end{aligned}$$

6

因此，Q' 与 Q 之差可以写为

$$Q'-Q=\frac{1}{c}\int J^{\alpha}(x)\partial_{\alpha}[\Theta(x'^{0})-\Theta(x^{0})]d^{4}x$$

利用连续性方程，给出

$$Q'-Q=\frac{1}{c}\int \partial_{\alpha}\{J^{\alpha}(x)[\Theta(x'^{0})-\Theta(x^{0})]\}d^{4}x$$

$$=\frac{1}{c}\int \partial_{0}\{J^{0}(x)[\Theta(x'^{0})-\Theta(x^{0})]\}dx^{0}d^{3}x$$

$$+\frac{1}{c}\int \nabla\cdot\{\vec{J}(x)[\Theta(x'^{0})-\Theta(x^{0})]\}dx^{0}d^{3}x$$

7

两式分别先对时间、空间积分，并利用高斯定理，得到

$$Q'-Q=\frac{1}{c}\int\{J^{0}(x)[\Theta(x'^{0})-\Theta(x^{0})]\}_{x^{0}=-\infty}^{x^{0}=+\infty}d^{3}x$$

$$+\frac{1}{c}\int dx^{0}\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}(x)[\Theta(x'^{0})-\Theta(x^{0})]$$

利用 ${\Lambda^{0}}_{0}\geq+1$ 及渐近条件，就得到右边两项皆为零。因而

$$Q'=Q$$

即守恒荷在正规洛伦兹变换下是不变的。

8

4. 四维时空中的高斯定理

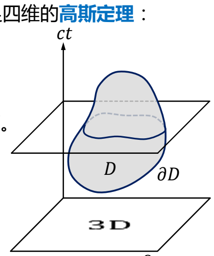
类似于三维空间，一个四维矢量场 $G^{\alpha}(x)$ 的**四维散度**定义为

$$\partial_{\alpha}G^{\alpha}$$

它在某个四维时空区域 D 内的积分满足四维的**高斯定理**：

$$\int_{D}\partial_{\alpha}G^{\alpha}d^{4}x=\oint_{\partial D}G^{\alpha}dn_{\alpha}$$

其中 ∂D 是 D 的边界：一个三维超曲面。矢量 dn_{α} 的大小等于相应的三维体积元，其方向“垂直于”该超曲面，即当 δx^{α} 是超曲面上 P 点处的任一位移矢量时，该点的 dn_{α} 满足 $dn_{\alpha}\delta x^{\alpha}=0$。

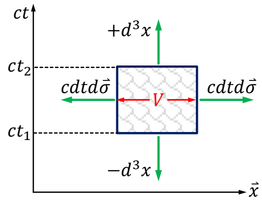


9

四维高斯定理的证明

只需证明在 D 为矩形盒子、且表面与坐标轴垂直的情形下证明下式即可

$$\int_D \partial_\alpha G^\alpha d^4x = \oint_{\partial D} G^\alpha dn_\alpha$$



证明如下：

$$\int_D \partial_\alpha G^\alpha d^4x = \int_V d^3x \int_{ct_1}^{ct_2} \partial_0 G^0 dx^0 + \int_{ct_1}^{ct_2} dx^0 \int_V \nabla\cdot\vec{G} d^3x$$

$$= \int_V G^0(t_2,\vec{x})d^3x - \int_V G^0(t_1,\vec{x})d^3x + \int_{t_1}^{t_2} cdt \oint_{\partial V} \vec{G}(t,\vec{x})\cdot d\vec{\sigma}$$

上底面　　下底面　　侧面

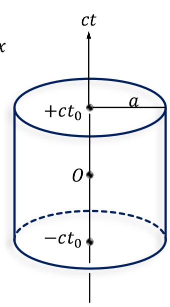
10

用四维高斯定理证明守恒荷为洛伦兹标量

对于前面给出的 $Q'-Q$，利用高斯定理，有

$$Q'-Q = \frac{1}{c}\int \partial_\alpha\{J^\alpha(x)[\Theta(x'^0)-\Theta(x^0)]\}d^4x$$

$$= \frac{1}{c}\int J^\alpha(x)[\Theta(x'^0)-\Theta(x^0)]dn_\alpha$$



取如图四维区域，其中$t_0, a \longrightarrow \infty$。在上、下底面处均有 $\Theta(x'^0)-\Theta(x^0)=0$。而在侧面处，当 $a\longrightarrow\infty$ 时 $J^\alpha(x)$ 足够快地趋于零。因而

$$Q'-Q=0$$

11

二、明显协变的麦克斯韦方程组

利用电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 定义 16 分量的量

$$F^{\alpha\beta} \triangleq \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix} & \end{array}$$

或将其简写为

$$F^{\alpha\beta} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \vec{B} \end{pmatrix} = \left\{\frac{\vec{E}}{c},\ \vec{B}\right\},\quad (B_{ij}=\varepsilon_{ijk}B_k)$$

注意：不能想当然地认为 $F^{\alpha\beta}$ 是一个二阶张量！

12

1. 改写麦克斯韦方程组

利用 $F^{\alpha\beta}$，可将麦克斯韦方程组写成像张量方程的形式。

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \mu_0\vec{J} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta \\ \left.\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \\ \nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Leftrightarrow \partial^\alpha F^{\mu\nu}+\partial^\mu F^{\nu\alpha}+\partial^\nu F^{\alpha\mu}=0 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon^{\lambda\alpha\mu\nu}\partial_\alpha F_{\mu\nu}=0 \\ &\Leftrightarrow \partial_\alpha\tilde{F}^{\alpha\beta}=0 \end{aligned} \end{cases}$$

注意：除非 $F^{\alpha\beta}$ 是二阶张量，否则这些方程不会是张量方程！

13

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{J}$$

$$\beta=0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E}=\mu_0 c^2\rho=\rho/\varepsilon_0$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0}=\partial_0 F^{00}+\partial_i F^{i0}=0+\partial_i\left(-\frac{E_i}{c}\right)=-\frac{1}{c}\nabla\cdot\vec{E}$$

$$\beta=j \quad \Longrightarrow \quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{J}$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha j}=\partial_0 F^{0j}+\partial_i F^{ij}=\partial_0\left(\frac{E_j}{c}\right)+\partial_i\left(\varepsilon^{ijk}B_k\right)$$

$$=\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}-\nabla\times\vec{B}\right)_j$$

14

$$\partial_\alpha\tilde{F}^{\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{B}=0, \quad \nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0$$

由于

$$F^{\alpha\beta}=\left\{\frac{\vec{E}}{c},\ \vec{B}\right\}, \quad \tilde{F}^{\alpha\beta}=\left\{\vec{B},\ -\frac{\vec{E}}{c}\right\}$$

因而，由上一页的讨论不难看出

$$\beta=0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\beta=j \quad \Longrightarrow \quad \nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0$$

15

2. 电磁场张量

假设：麦克斯韦方程组在所有惯性系中都具有相同的形式。

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \partial'_\alpha F'^{\alpha\beta} = -\mu_0 J'^\beta$$

由于 $\partial'_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu \partial_\mu$ 和 $J'^\beta = \Lambda^\beta{}_\nu J^\nu$，因此 K' 系中的方程可改写为

$$\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu \partial_\mu F'^{\alpha\beta} = -\mu_0 \Lambda^\beta{}_\rho J^\rho$$

利用 $\Lambda^\beta{}_\rho \tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu = \delta_\rho^\nu$ ，也可将其改写为

$$\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu \tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu \partial_\mu F'^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\nu$$

两系中的方程一致要求

$$\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu \tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu \partial_\mu F'^{\alpha\beta} = \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

16

物理上，$F'^{\alpha\beta}$ 和 $F^{\alpha\beta}$ 之间的关系必须是线性、齐次的，即有

$$F^{\mu\nu} = C^{\mu\nu}_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta}$$

其中 $C^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ 是一组与电磁场数值无关的常数。由此

$$\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu \tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu \partial_\mu F'^{\alpha\beta} = C^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \partial_\mu F'^{\alpha\beta}$$

由于在给定时空点处 $\partial_\mu F'^{\alpha\beta}$ 的数值可以是任意的，因而得到

$$C^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu \tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu$$

所以

$$F^{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\mu \tilde{\Lambda}_\beta{}^\nu F'^{\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu F^{\mu\nu}$$

这样，我们就证明了$F^{\alpha\beta}$是一个二阶张量，称其为**电磁场张量**。

17

3. 电磁势

【定理】若四维矢量场 $A^\alpha(x)$ **无旋**，即满足

$$\partial^\alpha A^\beta = \partial^\beta A^\alpha$$

则存在四维标量场 $\psi(x)$，使得

$$A^\alpha = \partial^\alpha \psi$$

注：$\psi(x)$ 具有不确定性：$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) + constant$。

【定理】若四维反对称张量场 $F^{\alpha\beta}(x)$ 满足**毕安琪恒等式**，即

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

则存在四维矢量场 $A^\alpha(x)$，使得

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

注： $A^\alpha(x)$ 具有不确定性：$\tilde{A}^\alpha(x) = A^\alpha(x) + \partial^\alpha \psi(x)$。

18

电磁势的定义

电磁场张量 $F^{\alpha\beta}$ 满足毕安琪恒等式

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

故 $F^{\alpha\beta}$ 可用4-矢量场 $A^\alpha = (A^0,\ \vec{A})$ 描述，称其为**4-电磁势**：

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

- 不难看出 A^α 与电磁场的标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 的关系为

$$A^\alpha = (\varphi/c,\ \vec{A})$$

即是说

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A},\quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- 4-电磁势（又称规范势）可以相差一个**规范变换**：

$$\tilde{A}^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \psi \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \partial_t \psi,\quad \tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \nabla\psi$$

19

电磁势的方程

将 $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ 代入方程 $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta$，得到

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = -\mu_0 J^\beta$$

这就是用规范势描述的电磁场方程。它是明显协变的。

- 当采用规范势描述电磁场时，毕安琪恒等式确实成为了一个数学上的恒等式，因此，文献中常采用如下术语：

$$\begin{cases} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta & \textbf{（麦克斯韦方程）} \\ \partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0 & \textbf{（毕安琪恒等式）} \end{cases}$$

20

- Lorenz 规范条件可以写为明显协变的形式

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \varphi = 0$$

在 Lorenz 规范下，电磁势的方程写为

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = -\mu_0 J^\beta$$

➢ 在自由空间中，$J^\alpha = 0$，因而电磁势满足波动方程

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 A^\beta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\beta}{\partial t^2} = 0$$

21

三、电磁场的变换

由于 $F^{\alpha\beta}$ 是二阶张量场，因而在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下

$$F'^{\alpha\beta}(x') = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}F^{\mu\nu}(x)$$

由此就可给出电磁场的变换规律。

- 下面设 K' 系相对于 K 系以速度 $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}_1$ 运动，从而

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即 Λ 的非零分量只有

$$\Lambda^{0}{}_{0} = \Lambda^{1}{}_{1} = \gamma_0,\quad \Lambda^{0}{}_{1} = \Lambda^{1}{}_{0} = -\beta_0\gamma_0,\quad \Lambda^{2}{}_{2} = \Lambda^{3}{}_{3} = 1$$

22

$$\Lambda^{0}{}_{0} = \Lambda^{1}{}_{1} = \gamma_0,\quad \Lambda^{0}{}_{1} = \Lambda^{1}{}_{0} = -\beta_0\gamma_0,\quad \Lambda^{2}{}_{2} = \Lambda^{3}{}_{3} = 1$$

$$F'^{01} = \Lambda^{0}{}_{\mu}\Lambda^{1}{}_{\nu}F^{\mu\nu} = \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{1}{}_{1}F^{01} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{0}F^{10} = \gamma_0^2(1-\beta_0^2)F^{01}$$

$$F'^{02} = \Lambda^{0}{}_{\mu}\Lambda^{2}{}_{\nu}F^{\mu\nu} = \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{2}F^{02} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2}F^{12} = \gamma_0F^{02} - \beta_0\gamma_0F^{12}$$

$$F'^{03} = \Lambda^{0}{}_{\mu}\Lambda^{3}{}_{\nu}F^{\mu\nu} = \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{3}{}_{3}F^{03} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{3}{}_{3}F^{13} = \gamma_0F^{03} + \beta_0\gamma_0F^{31}$$

$$\begin{cases} E_1' = E_1 \\ E_2' = \gamma_0(E_2 - \beta_0cB_3) = \gamma_0\left(\vec{E} + \vec{\beta}_0 \times c\vec{B}\right)_2 \\ E_3' = \gamma_0(E_3 + \beta_0cB_2) = \gamma_0\left(\vec{E} + \vec{\beta}_0 \times c\vec{B}\right)_3 \end{cases}$$

23

$$\Lambda^{0}{}_{0} = \Lambda^{1}{}_{1} = \gamma_0,\quad \Lambda^{0}{}_{1} = \Lambda^{1}{}_{0} = -\beta_0\gamma_0,\quad \Lambda^{2}{}_{2} = \Lambda^{3}{}_{3} = 1$$

$$F'^{23} = \Lambda^{2}{}_{\mu}\Lambda^{3}{}_{\nu}F^{\mu\nu} = \Lambda^{2}{}_{2}\Lambda^{3}{}_{3}F^{23} = F^{23}$$

$$F'^{31} = \Lambda^{3}{}_{\mu}\Lambda^{1}{}_{\nu}F^{\mu\nu} = \Lambda^{3}{}_{3}\Lambda^{1}{}_{0}F^{30} + \Lambda^{3}{}_{3}\Lambda^{1}{}_{1}F^{31} = \gamma_0F^{31} + \beta_0\gamma_0F^{03}$$

$$F'^{12} = \Lambda^{1}{}_{\mu}\Lambda^{2}{}_{\nu}F^{\mu\nu} = \Lambda^{1}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{2}F^{02} + \Lambda^{1}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2}F^{12} = \gamma_0F^{12} - \beta_0\gamma_0F^{02}$$

$$\begin{cases} B_1' = B_1 \\ cB_2' = \gamma_0(cB_2 + \beta_0E_3) = \gamma_0\left(c\vec{B} - \vec{\beta}_0 \times \vec{E}\right)_2 \\ cB_3' = \gamma_0(cB_3 - \beta_0E_2) = \gamma_0\left(c\vec{B} - \vec{\beta}_0 \times \vec{E}\right)_3 \end{cases}$$

24

1. 电磁场的变换

在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下，电磁场的变换规律是

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} = \gamma_0\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta}_0 \times c\vec{B}\right) \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, & c\vec{B}'_{\perp} = \gamma_0\left(c\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta}_0 \times \vec{E}\right) \end{cases}$$

- 反变换

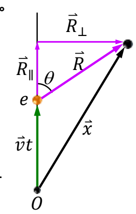
$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, & \vec{E}_{\perp} = \gamma_0\left(\vec{E}'_{\perp} - \vec{\beta}_0 \times c\vec{B}'\right) \\ \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, & c\vec{B}_{\perp} = \gamma_0\left(c\vec{B}'_{\perp} + \vec{\beta}_0 \times \vec{E}'\right) \end{cases}$$

- 在非相对论极限（$\beta_0 \ll 1$）下，保留至 β_0 的线性项，给出

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{\beta}_0 \times c\vec{B}, \quad c\vec{B}' = c\vec{B} - \vec{\beta}_0 \times \vec{E}$$

25

【例】试求匀速运动点电荷 e 所激发的电磁场。



【解】粒子自身系 K' 中，电磁场为

$$\vec{E}' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}'}{r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

K 系中的电场为

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}'_{\parallel}}{r'^3}, \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma\vec{E}'_{\perp} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\vec{x}'_{\perp}}{r'^3}$$

其中

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma\left(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta}ct\right), \quad \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$$

令 $\vec{R} \triangleq \vec{x} - \vec{\beta}ct$ 是 K 系中场点相对于粒子目前位置的位矢，则

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma\vec{R}_{\parallel}, \quad \vec{x}'_{\perp} = \vec{R}_{\perp} \quad \Longrightarrow \quad r' = \sqrt{\vec{x}'^2_{\parallel} + \vec{x}'^2_{\perp}} = \gamma R\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\theta}$$

26

因此

$$\vec{E} = \frac{e\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

K 系中的磁场为

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} = 0, \quad c\vec{B}_{\perp} = \gamma\vec{\beta} \times \vec{E}'$$

$$\Longrightarrow \quad c\vec{B} = \gamma\vec{\beta} \times \vec{E}' = \vec{\beta} \times \vec{E}$$

因此

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} = \frac{\mu_0 e\vec{v} \times \hat{R}}{4\pi R^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

27

2. 不变量

作为一个反对称二阶张量，$F^{\alpha\beta}$ 有两个基本不变量：

$$E^2 - c^2B^2, \qquad \vec{E}\cdot\vec{B}$$

注意到

$$F^{\alpha\beta} = \{\vec{E}/c,\ \ \vec{B}\},\quad \tilde{F}^{\alpha\beta} = \{\vec{B},\ \ -\vec{E}/c\}$$

也可将 $F^{\alpha\beta}$ 的两个不变量写为

$$\begin{cases} \mathcal{L}_f = -\dfrac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0(E^2 - c^2B^2) \\ G = -\dfrac{c}{4}F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} = \vec{E}\cdot\vec{B} \end{cases}$$

【注】实际上，$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ 和 $F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ 分别为四维标量和赝标量。

28

电磁场的分类

- $E^2 - c^2B^2$ 是不变量意味着：

  给定时空点处的 $\vec{E}$ 和 $c\vec{B}$ 哪个更大具有不变的含义。

  ➢ 根据 $\vec{E}$ 和 $c\vec{B}$ 的大小关系，对电磁场作如下分类：

  类电场：$E > cB$； **类磁场**：$E < cB$； **类光场**：$E = cB$。

- $\vec{E}\cdot\vec{B}$ 是不变量意味着：

  给定时空点处的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 是否正交具有不变的含义。

  $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的夹角小于（或大于）90° 具有不变的含义。

29

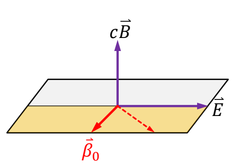
- **对于正交的类电场，存在使得电磁场成为纯电场的惯性系：**

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \ \text{and}\ E > cB \quad \Longrightarrow \quad \vec{B}' = 0 \ \text{in some inertial reference}$$

$$\begin{cases} 0 = \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel & \Longrightarrow \quad \vec{\beta}_0 \perp \vec{B} \ \text{and}\ \vec{B}' = \vec{B}'_\perp \\ 0 = c\vec{B}'_\perp = \gamma_0\left(c\vec{B}_\perp - \vec{\beta}_0 \times \vec{E}\right) & \Longrightarrow \quad c\vec{B} = \vec{\beta}_0 \times \vec{E} \end{cases}$$

不妨选取 $\vec{\beta}_0 \perp \vec{E}$，由此给出

$$\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{E}\times c\vec{B}}{E^2},\quad \left(\beta_0 = \frac{cB}{E}\right)$$



将其代入电场的变换关系，给出新系中电场为 $\vec{E}' = \vec{E}'_\perp = \vec{E}/\gamma_0$。

30

- **对于正交的类磁场，存在使得电磁场成为纯磁场的惯性系：**

$$\vec{E}\cdot\vec{B}=0 \text{ and } E<cB \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}'=0 \text{ in some inertial reference}$$

➢ 如此惯性系并不唯一。可选新系相对于原系的速度为：

$$\vec{\beta}_0=\frac{\vec{E}\times c\vec{B}}{(cB)^2},\quad \left(\beta_0=\frac{E}{cB}\right)$$

电场为 $\vec{E}'=0$，磁场为 $\vec{B}'=\vec{B}/\gamma_0$。

- **对于非正交的电磁场，存在电场与磁场相互平行的惯性系：**

$$\vec{E}\cdot\vec{B}\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}' \parallel \vec{B}' \text{ in some inertial reference}$$

➢ 如此惯性系并不唯一。可选新系相对于原系的速度满足：

$$\frac{\vec{\beta}_0}{1+\beta_0^2}=\frac{\vec{E}\times c\vec{B}}{E^2+c^2B^2}$$

31

四、四维波矢

1. 自由空间的单色平面波

用 ∂_α 作用于毕安琪恒等式，得到

$$0=\partial_\alpha(\partial^\alpha F^{\mu\nu}+\partial^\mu F^{\nu\alpha}+\partial^\nu F^{\alpha\mu})$$

$$=\partial_\alpha\partial^\alpha F^{\mu\nu}+\partial^\mu\partial_\alpha F^{\nu\alpha}+\partial^\nu\partial_\alpha F^{\alpha\mu}$$

由于自由空间中，麦克斯韦方程写为 $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=0$，故此情形下

$$\partial_\alpha\partial^\alpha F^{\mu\nu}=0$$

即自由空间中的电磁场满足波动方程。

32

- 考察单色平面波

$$F^{\mu\nu}=F_0^{\mu\nu}e^{ik^\alpha x_\alpha}=F_0^{\mu\nu}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

这里定义了四分量的量 k^α：

$$k^\alpha \triangleq \left(\frac{\omega}{c},\ \ \vec{k}\right)$$

- 将单色平面波解其代入波动方程，由于 $\partial_\alpha \leftrightarrow ik_\alpha$，因而

$$k^\alpha k_\alpha=0 \quad\leftrightarrow\quad \omega=kc$$

即是说，**自由空间的单色平面波以真空中的光速 c 传播。**

➢ 利用此结论，可将 k^α 写为：

$$k^\alpha=\frac{\omega}{c}(1,\ \ \hat{k})=\left(\left|\vec{k}\right|,\ \ \vec{k}\right)$$

33

2. 四维波矢

在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下，自由空间中的单色平面波变为：

$$F_0'^{\mu\nu} e^{ik'^\alpha x'_\alpha} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F_0^{\rho\sigma} e^{ik^\alpha x_\alpha}$$

即 K' 系中电磁场的每一个分量都可以写为如下形式

$$(\cdots)e^{ik'^\mu x'_\mu} = (\cdots)e^{ik^\alpha x_\alpha}$$

利用 $x_\alpha = \Lambda^\mu{}_\alpha (x'_\mu - a_\mu)$，上式可以写为

$$(\cdots)e^{ik'^\mu x'_\mu} = \left[(\cdots)e^{-ik^\alpha \Lambda^\mu{}_\alpha a_\mu}\right] e^{ik^\alpha \Lambda^\mu{}_\alpha x'_\mu}, \quad (\forall x'_\mu)$$

此时该式对任意 x'_μ 都成立，故有

$$k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha k^\alpha$$

即是说，**k^α 必然是一个四维矢量**，称其为**四维波矢**。

34

3. 波矢的变换

设 K' 系相对于 K 系以速度 $\vec{v}$ 运动。4-波矢的变换法则为

$$k'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta k^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega' = \gamma\left(\omega - c\vec{\beta}\cdot\vec{k}\right) \\ \vec{k}'_\parallel = \gamma\left(\vec{k}_\parallel - \vec{\beta}\,\omega/c\right) \\ \vec{k}'_\perp = \vec{k}_\perp \end{cases}$$

设 K 系中波矢 $\vec{k}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角为 θ，利用 $k = \omega/c$，得到

$$\begin{cases} \omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta) \\ \tan\theta' = \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta - \beta} \end{cases}$$

当 K' 系为光源静止系时，这两式分别给出相对论的**多普勒频移公式**和**光行差公式**。

35

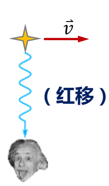
多普勒效应

设 K' 系为光源静止系，记 $\omega' = \omega_0$ 为静止光源的辐射频率，这就给出了相对论**多普勒频移公式**：

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$$

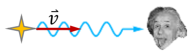
- 与经典力学不同，狭义相对论预言存在**横向多普勒效应**（$\theta = \pi/2$）：

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma} = \omega_0\sqrt{1-\beta^2} < \omega_0$$



36

- **纵向多普勒效应**
  - 光源靠近观测者（$\theta = 0 = \theta_0$）：

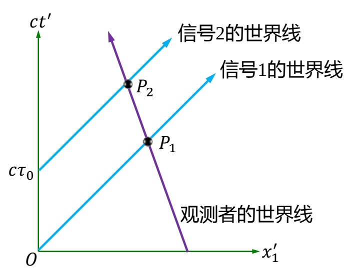


$$f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > f_0 \quad \textbf{（蓝移）}$$

  - 光源远离观测者（$\theta = \pi = \theta_0$）：

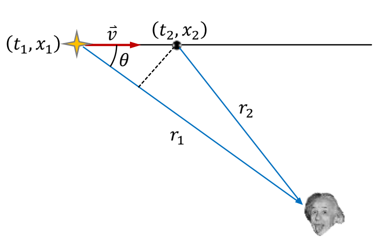
$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < f_0 \quad \textbf{（红移）}$$

【思考】请利用时空图分析纵向多普勒效应。



$$f_0 = \frac{1}{\tau_0}, \quad f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1}$$

【思考】请利用下图分析一般的多普勒效应。



$$f_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{\gamma}{t_2 - t_1}, \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{(t_2 + r_2/c) - (t_1 + r_1/c)}$$

五、介质中的麦克斯韦方程

1. 毕安琪恒等式

在介质中，**毕安琪恒等式**仍然成立：

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

- 介质中的电磁场仍可以用规范势描述

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

40

2. 麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \mu_0 c^2\rho, & \nabla\times\vec{B} - c^{-2}\partial_t\vec{E} = \mu_0\vec{J} \quad \text{（真空）} \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f, & \nabla\times\vec{H} - \quad \partial_t\vec{D} = \ \vec{J}_f \quad \text{（介质）} \end{cases}$$

在方程 $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta$ 中作代换

$$\vec{E}\longrightarrow c^2\vec{D},\quad \vec{B}\longrightarrow\vec{H},\quad \rho\longrightarrow\rho_f,\quad \vec{J}\longrightarrow\vec{J}_f,\quad \mu_0\longrightarrow 1$$

即可得到介质中明显协变的麦克斯韦方程

$$\partial_\alpha H^{\alpha\beta} = -J_f^\beta$$

其中 $H^{\alpha\beta}$ 为**辅助张量** ：

$$H^{\alpha\beta} \triangleq \{c\vec{D},\vec{H}\} = \begin{pmatrix} 0 & c\vec{D} \\ -c\vec{D} & \vec{H} \end{pmatrix}$$

41

3. 电磁极化张量

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f, & \nabla\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J}_f \\ \nabla\cdot\vec{P} = -\rho_b, & \nabla\times\vec{M} + \partial_t\vec{P} = \vec{J}_b \end{cases}$$

在方程 $\partial_\alpha H^{\alpha\beta} = -J_f^\beta$ 中作代换

$$\vec{D}\longrightarrow -\vec{P},\quad \vec{H}\longrightarrow\vec{M},\quad \rho_f\longrightarrow\rho_b,\quad \vec{J}_f\longrightarrow\vec{J}_b$$

即可将 ρ_b、$\vec{J}_b$ 与 $\vec{P}$、$\vec{M}$的关系写为明显协变的形式

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta} = -J_b^\beta$$

这里引入了**电磁极化张量**：

$$M^{\alpha\beta} \triangleq \{-c\vec{P},\vec{M}\} = \begin{pmatrix} 0 & -c\vec{P} \\ c\vec{P} & \vec{M} \end{pmatrix}$$

42

- 利用

$$\begin{cases} F^{\alpha\beta} = \{\vec{E}/c,\quad \vec{B}\} \\ H^{\alpha\beta} = \{c\vec{D},\quad \vec{H}\} \\ M^{\alpha\beta} = \{-c\vec{P},\quad \vec{M}\} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \vec{D} \triangleq \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} \triangleq \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{cases}$$

可以将辅助张量 $H^{\alpha\beta}$ 的定义写为

$$H^{\alpha\beta} \triangleq \frac{1}{\mu_0} F^{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad F^{\alpha\beta} = \mu_0 \left(H^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}\right)$$

43

【例】试由静止介质中的电磁性能方程

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

导出缓慢运动介质中的电磁性能方程。

【解】设介质的运动速度为 $\vec{v} = c\vec{\beta}$。在介质自身系中

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}', \quad \vec{B}' = \mu \vec{H}'$$

低速情形下电磁场的变换规律为（保留至 β 的线性项）

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{\beta} \times c\vec{B}, \quad c\vec{B}' = c\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}$$

作替换 $\vec{E} \longrightarrow c^2\vec{D}$、$\vec{B} \longrightarrow \vec{H}$ 得到辅助矢量的变换规律为

$$c\vec{D}' = c\vec{D} + \vec{\beta} \times \vec{H}, \quad \vec{H}' = \vec{H} - \vec{\beta} \times c\vec{D}$$

44

将其代回介质自身系中的本构关系，得到

$$\begin{cases} \vec{D} + \dfrac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{H} = \varepsilon \vec{E} + \varepsilon \vec{\beta} \times c\vec{B} \\ \vec{B} - \dfrac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{E} = \mu \vec{H} - \mu \vec{\beta} \times c\vec{D} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \underbrace{\boxed{\varepsilon \vec{\beta} \times c\vec{B}}}_{\approx\, \mu\varepsilon c\vec{\beta} \times \vec{H}} - \dfrac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{H} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} - \underbrace{\boxed{\mu \vec{\beta} \times c\vec{D}}}_{\approx\, \mu\varepsilon c\vec{\beta} \times \vec{E}} + \dfrac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \dfrac{1}{c}(\mu\varepsilon c^2 - 1)\vec{\beta} \times \vec{H} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} - \dfrac{1}{c}(\mu\varepsilon c^2 - 1)\vec{\beta} \times \vec{E} \end{cases}$$

保留至 β 的线性项

45

定义介质的**折射率**

$$n \triangleq c\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$$

缓慢运动介质中的本构关系就可以写为

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \dfrac{1}{c}(n^2-1)\vec{\beta}\times\vec{H} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} - \dfrac{1}{c}(n^2-1)\vec{\beta}\times\vec{E} \end{cases}$$

也可将其写为类似于教材上的形式

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\left[\vec{E} + \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\vec{\beta}\times c\vec{B}\right] \\ c\vec{H} = \dfrac{1}{\mu}\left[c\vec{B} + (n^2-1)\vec{\beta}\times\vec{E}\right] \end{cases}$$

46

六、构建麦克斯韦方程

1. 寻找场方程

- **要求场方程遵从相对性原理，相应地，要求方程式张量方程。**
  - J^α 是电磁场的源，场方程就是要建立场与源之间的联系；任何包含 J^α 的某个分量的张量方程，必须包含 J^α 的其他分量。
- **假设电荷之间的作用是一种长程作用。**
  - 静态电荷激发的场在远处不会比距离的某个幂次减少的更快。
- **假设场方程是线性的（对场）、符合叠加原理的（对源）**
- **简单性原则：尽可能低阶的场、尽可能低阶的微分方程。**
  - 对现象的解释不应超出真实以及足以解释其现象者（牛顿）。

47

用标量场描述电磁作用的可能性

一阶方程：在最一般情形下，标量场 φ 的一阶场方程可以写为

$$\partial^\alpha\varphi = kJ^\alpha$$

- 设空间中有任意给定的静态电荷分布 $\rho(\vec{x})$，但 $\vec{J}=0$。
  - 空间分量方程 $\nabla\varphi = 0$ 意味着 $\varphi = \varphi(t)$。
  - 由此，时间分量方程 $\partial^0\varphi = kJ^0$ 可以写为

$$\partial_t\varphi(t) = -kc^2\rho(\vec{x})$$

这意味着：静态电荷密度只能是与时空坐标无关的常数。
不符合物理实际！

电磁作用不可能标量场的一阶方程描述！

48

二阶方程：标量场 φ 的二阶场方程的一般形式是：

$$a_1\partial^\beta\partial_\beta\varphi + a_2\partial^\beta\partial^\gamma\varphi + a_3\partial^\alpha\varphi + a_4\varphi \propto J^\alpha$$

其中，a_1, a_2 不同时为零。

这样的方程注定不满足相对性原理，因而不可能是正确的。

更高阶方程：对于标量场 φ 的更高阶的方程：与一阶方程类似，奇数阶方程不符合物理实际；偶数阶方程则与二阶方程类似，不可能满足相对性原理。

不能用标量场作为描述电磁作用的场。

49

用矢量场描述电磁作用的可能性

一阶方程：在最一般情形下，标量场 A^α 的一阶场方程可以写为

$$a_1\partial_\beta A^\beta + a_2\partial^\beta A^\alpha + a_3 A^\alpha \propto J^\alpha$$

其中，a_1, a_2 不同时为零。

这样的方程不满足相对性原理，注定不可能是正确的。

50

二阶方程：矢量场 A^α 以 J^α 为源的、符合于相对论的、二阶线性微分方程的最一般形式可以写为

$$\partial^\alpha\partial_\alpha A^\beta - a\partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha - bA^\beta = -\mu_0 J^\beta$$

- 在无源情形（$J^\alpha = 0$），方程写为

$$\partial^\alpha\partial_\alpha A^\beta - a\partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha - bA^\beta = 0$$

易证沿着 x_3 轴方向传播的单色平面波是该方程的一个解：

$$A^0 = A^2 = A^3 = 0,\quad A^1 = e^{i(kx_3-\omega t)},\quad \left(\omega \triangleq c\sqrt{k^2+b}\right)$$

该单色平面波的群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2+b}}$$

为了保证群速度不大于光速，b 不能取负数。

51

- 考察与时间无关的球对称电荷分布。忽略对时间的导数项后，$A^0 = A^0(r)$ 满足的方程写为

$$\nabla^2 A^0 - bA^0 = -\mu_0 c\rho$$

利用球坐标系下拉普拉斯算子的表达式，可以将方程写为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A^0}{\partial r}\right) - bA^0 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA^0) - bA^0 = -\mu_0 c\rho$$

因此，电荷之外区域的方程有解：

$$A^0 \propto \frac{\exp\left(\pm\sqrt{b}r\right)}{r}$$

其中，只有负指数的解是适用的。该解表明场在电荷分布之外随距离指数衰减。

电磁作用是长程力意味着 $b = 0$。

52

- 由于 $b = 0$ ，因而场方程简化为了

$$\partial^\alpha\partial_\alpha A^\beta - a\partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha = -\mu_0 J^\beta$$

为确定 a，将上式两边用 ∂_β 作用，利用连续性方程得到：

$$(1-a)\partial_\alpha\partial^\alpha\partial_\beta A^\beta \equiv 0$$

为使得场方程与连续性方程自洽的最好方法是取 $a = 1$ 。

注：也可让 a 任意而强加限制条件 $\partial_\alpha A^\alpha = 0$（规范条件）。

- 利用 $a = 1$ ，符合所有要求的场方程最终形式为

$$\partial^\alpha\partial_\alpha A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha = -\mu_0 J^\beta$$

53

- 若令

$$A^\alpha = (A^0,\ \vec{A}) = \left(\frac{\varphi}{c},\ \vec{A}\right)$$

我们就辨认出：

$$\partial^\alpha\partial_\alpha A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha = -\mu_0 J^\beta$$

正是电磁势应该满足的方程。

描述电磁作用的场可以选为四维矢量场。

54

2. 电磁势方程

用电磁势 A^α 描述电磁场，麦克斯韦方程写为

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\beta - \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = -\mu_0 J^\beta$$

其中

$$A^\alpha = (\varphi/c,\ \ \vec{A})$$

- 为了得到麦克斯韦方程，定义电磁场张量 $F^{\alpha\beta}$：

$$F^{\alpha\beta} \triangleq \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

  - $F^{\alpha\beta}$ 满足麦克斯韦方程：

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta$$

  - $F^{\alpha\beta}$ 满足毕安琪恒等式：

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

55

规范变换

不难看出：若 A^α 满足场方程，则 $\tilde{A}^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \psi$ 也满足，其中 ψ 是任一标量函数。这是由于 $X^\alpha = \tilde{A}^\alpha - A^\alpha = \partial^\alpha \psi$ 满足

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\beta - \partial^\beta \partial_\alpha X^\alpha = \partial^\alpha \partial_\alpha \partial^\beta \psi - \partial^\beta \partial_\alpha \partial^\alpha \psi = 0$$

- 变换 $A^\alpha \longrightarrow \tilde{A}^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \psi$ 称为**规范变换**。
- 规范函数 ψ 完全是任意的，意味着 A^α 不是物理可观测量。
  - $\partial^\alpha \psi$ 项不产生任何可观测的物理效应（无碍）。
- 规范条件可消除 A^α 中的某些不确定性，如Lorenz规范下

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = -\mu_0 J^\beta, \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0$$

56

规范不变性

- 规范变换使 $F^{\alpha\beta}$ 不变，即**可观测量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 是规范无关的。**
- **场方程在规范变换下是不变的。**
  - 场方程的规范不变性是该方程与电流连续性方程相自洽的需要（$a = 1$），由此可见，电荷守恒与规范对称性之间有一种紧密的联系。场论的研究表明，一般地，规范对称性意味着电荷守恒。
- **场方程中如果包含 A^β 项会破坏理论的规范不变性。**
  - A^β 项不出现在场方程中是长程作用的结果（$b = 0$），而这又与传递电磁作用的中间玻色子（光子）质量为零相关。
  - 通常将场方程中与 A^β 成正比的项称为质量项。

57

3. 宇称与时间反演

- 与 u^α 一样，J^α 是 $\mathcal{P}$ 下的矢量、$\mathcal{T}$ 下的赝矢量。

$$\mathcal{P} \text{ 或 } \mathcal{T} \text{ 下:} \quad \rho \longrightarrow \rho, \quad \vec{J} \longrightarrow -\vec{J}$$

- 电动力学基本方程在 $O(3,1)$ 下的不变性意味着电磁场张量 $F^{\alpha\beta}$ 是 $\mathcal{P}$ 下的张量、$\mathcal{T}$ 下的赝张量

$$\begin{cases} \mathcal{P}: & F^{\alpha\beta} \longrightarrow \mathcal{P}^\alpha{}_\mu \mathcal{P}^\beta{}_\nu F^{\mu\nu} \\ \mathcal{T}: & F^{\alpha\beta} \longrightarrow -\mathcal{T}^\alpha{}_\mu \mathcal{T}^\beta{}_\nu F^{\mu\nu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{P}: & \vec{E} \longrightarrow -\vec{E}, \quad \vec{B} \longrightarrow +\vec{B} \\ \mathcal{T}: & \vec{E} \longrightarrow +\vec{E}, \quad \vec{B} \longrightarrow -\vec{B} \end{cases}$$

58

What led me more or less directly to the special theory of relativity was the conviction that the electromotive force acting on a body in motion in a magnetic field was nothing else but an electric field.

ALBERT EINSTEIN (1952)

59