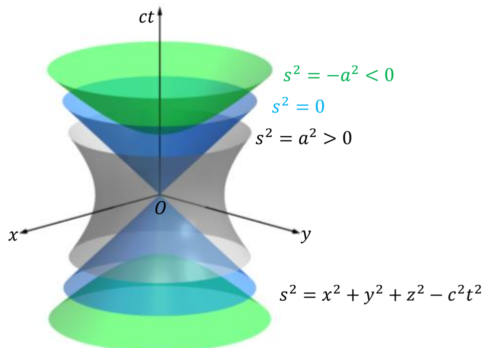
§4 闵可夫斯基空间的张量



1

一、四维标量

能够用与标架选取无关的一个数描述的物理量称为**四维标量**，经常也称其为**不变量**——在庞加莱变换下不变的数。

- 四维标量必然也是三维空间中的标量。
- 四维标量的例子：
  - 真空中的光速 c
  - 粒子的质量 m 和电量 e
  - 两事件的时空间隔 $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$
  - 固有长度和固有时间 $d\tau = dt/\gamma$。
  - 四维体积元 $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = cdtd^3x$。

2

二、四维矢量

四维（逆变）矢量是一个有四个分量的量 $X^\alpha = (X^0, X^1, X^2, X^3)$，它在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$下按照如下方式变换

$$X'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\mu X^\mu$$

- 时空位移 dx^α 是矢量的原型

$$dx^\alpha = (cdt, d\vec{x})$$

- 四维矢量 X^α 的时间分量 X^0 必然是三维空间中的标量，而其空间分量 X^i 则必然是三维空间中的矢量。经常将其写为

$$X^\alpha = (X^0, \vec{X})$$

3

1. 四维速度

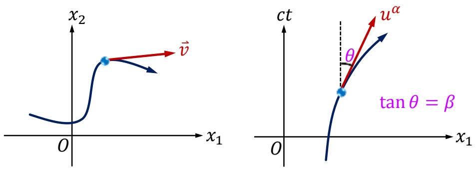
粒子的**四维速度**定义为

$$u^{\alpha} \triangleq \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}$$

- 利用 $dt/d\tau = \gamma$，可得4-速度与3-速度 $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ 的关系

$$u^{\alpha} = \gamma(c, \vec{v}) = \gamma c\left(1, \vec{\beta}\right)$$

- $\vec{v}$ 沿粒子轨迹的切线方向；u^{α} 沿粒子世界线的切线方向。



【例】试利用四维速度推导相对论的速度合成法则。

【解】 4–速度满足洛伦兹反变换

$$\gamma c\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \beta_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ \beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma' c \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = \gamma_0\gamma'(1 + \beta_0\beta_1') \\ \gamma\beta_1 = \gamma_0\gamma'(\beta_0 + \beta_1') \\ \gamma\beta_{2,3} = \gamma'\beta_{2,3}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\beta_1' + \beta_0}{1 + \beta_0\beta_1'} \\ \beta_{2,3} = \dfrac{\beta_{2,3}'}{\gamma_0(1 + \beta_0\beta_1')} \end{cases}$$

2. 四维动量

静止质量为 m 的粒子的**四维动量**定义为

$$p^{\alpha} \triangleq m u^{\alpha} = \gamma m c(1, \ \vec{\beta})$$

- 经常将其记为

$$p^{\alpha} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \ \vec{p}\right)$$

其中，$\mathcal{E}$ 和 $\vec{p}$ 分别称为粒子的**相对论能量和动量**：

$$\mathcal{E} \triangleq \gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p} \triangleq \gamma m \vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- 由定义不难得到如下关系

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E}^2 = |\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4$$

3. 四维加速度

粒子的**四维加速度**定义为

$$w^\alpha \triangleq \frac{du^\alpha}{d\tau}$$

- 利用 $d\gamma/dt = \gamma^3\left(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)$，不难得到四维加速度的分量

$$w^0 = \gamma^4\vec{\beta}\cdot\vec{a},\quad \vec{w} = \gamma^4\left[\vec{a}+\vec{\beta}\times\left(\vec{\beta}\times\vec{a}\right)\right]$$

把 $\vec{a}$ 分解为平行与垂直于 $\vec{\beta}$ 的分量，从而将 w^α 的分量写为

$$w^0 = \gamma^4\vec{\beta}\cdot\vec{a},\quad \vec{w}_\parallel = \gamma^4\vec{a}_\parallel,\quad \vec{w}_\perp = \gamma^2\vec{a}_\perp$$

- 在MCRF系中，粒子速度 $\vec{\beta}' = 0$，从而

$$w'^\alpha = (0,\quad \vec{a}') = (0,\quad a_1',\quad a_2',\quad a_3')$$

【例】试将 K 系中的加速度 $\vec{a}$ 用MCRF中的加速度 $\vec{a}'$ 表示。

【解】将 $\vec{\beta}$ 的方向取为 x_1 轴正向。因而

$$\begin{pmatrix}\gamma^4\beta a_1\\ \gamma^4 a_1\\ \gamma^2 a_2\\ \gamma^2 a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma & 0 & 0\\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ a_1'\\ a_2'\\ a_3'\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\gamma^4 a_1 = \gamma a_1'\\ \gamma^2 a_{2,3} = a_{2,3}'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{a}_\parallel = \vec{a}_\parallel'/\gamma^3\\ \vec{a}_\perp = \vec{a}_\perp'/\gamma^2\end{cases}$$

三、四维张量

闵可夫斯基空间中的 **n 阶（逆变）张量** $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 是一个有 4^n 个分量的量，它在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下的变换方式是

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_n} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\alpha_n}{}_{\mu_n}T^{\mu_1\cdots\mu_n}$$

- 平移变换 $x' = x + a$ 不影响张量的分量。
- 标量就是零阶张量，而矢量则是一阶张量。
- 二阶张量的变换规律可以用分量矩阵表示为 $T' = \Lambda T\Lambda^T$。
- 一个 **n 阶张量场** $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$ 在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下的变换方式是

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x') = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\alpha_n}{}_{\mu_n}T^{\mu_1\cdots\mu_n}(x)$$

【例】$dx^\alpha dx^\beta$ 是二阶张量。

【例】$g^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\{-1,1,1,1\} = g'^{\alpha\beta}$ 是二阶张量。

【证】$ds^2 = g^{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu = g^{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$

$$= g^{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta dx'_\mu dx'_\nu$$

$$\Longrightarrow \quad g^{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g^{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \Lambda g \Lambda^T = g$$

或者 $g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^T g \Lambda = g \quad \Longrightarrow \quad \Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$

$$\Longrightarrow \quad \Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda g \Lambda^T g = I \quad \Longrightarrow \quad \Lambda g \Lambda^T = g$$

注：$g^{\alpha\beta}$ 在所有惯性系中都具有相同分量，称为**不变张量**。

10

1. 对称与反对称

- 张量 $T^{\alpha\beta\gamma\cdots}$ 关于指标 α 和 β 是**对称**的：

$$T^{\alpha\beta\gamma\cdots} = T^{\beta\alpha\gamma\cdots}$$

- 张量 $T^{\alpha\beta\gamma\cdots}$ 关于指标 α 和 β 是**反对称**的：

$$T^{\alpha\beta\gamma\cdots} = -T^{\beta\alpha\gamma\cdots}$$

- **完全（反）对称张量** $T^{\alpha\beta\gamma\cdots}$：关于任两指标（反）对称的。
- n 阶张量 $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ 的**完全对称、完全反对称部分**分别定义为

$$T^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)} \triangleq \frac{1}{n!}\left(T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} + T^{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_n} + \cdots\right)$$

$$T^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]} \triangleq \frac{1}{n!}\left(T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} - T^{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_n} + \cdots\right)$$

11

二阶对称与反对称张量

对于二阶张量 $T^{\alpha\beta}$，显然有 $T^{\alpha\beta} = T^{(\alpha\beta)} + T^{[\alpha\beta]}$，其中：

$$T^{(\alpha\beta)} = \frac{T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}}{2}, \quad T^{[\alpha\beta]} = \frac{T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}}{2}$$

- 对于二阶张量 $T^{\alpha\beta}$，T^{00} 必然是3-标量，T^{i0} 和 T^{0j} 则是3-矢，而 T^{ij} 则是3-张量。经常将其写为类似下面的形式

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varphi & \vec{p} \\ \vec{q} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}$$

- 而反对称二阶张量 $A^{\alpha\beta}$ 则记为

$$A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \overleftrightarrow{a} \end{pmatrix} = \{\vec{p}, \quad \vec{a}\}$$

其中 $a_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k$（即 $\overleftrightarrow{a} = -\vec{a} \times \overleftrightarrow{I} = -\overleftrightarrow{I} \times \vec{a}$，$\vec{a}$ 是三维赝矢量）

12

三阶张量的完全对称与完全反对称部分

对于三阶张量 $T^{\alpha\beta\gamma}$：

$$T^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3!}\left(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta} + T^{\beta\alpha\gamma} + T^{\gamma\beta\alpha} + T^{\alpha\gamma\beta}\right)$$

$$T^{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3!}\left(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\beta\alpha\gamma} - T^{\gamma\beta\alpha} - T^{\alpha\gamma\beta}\right)$$

若 $T^{\alpha\beta\gamma}$ 关于任意两个指标反对称，则

$$T^{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3}\left(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta}\right)$$

【思考】如果三阶张量 $T^{\alpha\beta\gamma}$ 关于某一对指标对称，$T^{(\alpha\beta\gamma)}$ 写为了什么？

13

2. 指标的升降

- 四维矢量 X^α 又称为逆变矢量，其**协变分量**定义为

$$X_\alpha \triangleq g_{\alpha\beta}X^\beta = \left(-X^0, \vec{X}\right)$$

  - 该式的反变换又给出

$$X^\alpha \triangleq g^{\alpha\beta}X_\beta = \left(X^0, \vec{X}\right)$$

  - 在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下

$$X'_\alpha = g_{\alpha\beta}X'^\beta = g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\mu X^\mu = g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\mu g^{\mu\nu}X_\nu$$

$$\Longrightarrow \quad X'_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\nu X_\nu, \quad \text{where } \tilde{\Lambda} \triangleq g\Lambda g$$

14

四维梯度算符

时空中的**梯度算符**定义为

$$\partial_\mu \triangleq \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

- ∂_μ 满足协变矢量的变换规律 $\partial'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\alpha \partial_\alpha$。
- $\partial^\mu \triangleq g^{\mu\nu}\partial_\nu$ 满足逆变矢量的变换规律 $\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$，分量为

$$\partial^\mu \triangleq \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

- ∂_μ 或 ∂^μ 作用于 n 阶张量场，结果是一个 $n+1$ 阶场张量。

15

- 利用 $g_{\alpha\mu}$ 和 $g_{\alpha\mu}$ 可对张量的若干指标进行升、降操作。如

$$\begin{cases} T_\alpha{}^\beta = g_{\alpha\mu}T^{\mu\beta} \\ T^\alpha{}_\beta = g_{\beta\nu}T^{\alpha\nu} \\ T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\mu\nu} \\ T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}T_{\mu\nu} \end{cases}$$

【思考】$T^\alpha{}_\beta$、$T_\alpha{}^\beta$ 和 $T_{\alpha\beta}$ 在庞加莱变换下如何变换？若记

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varphi & \vec{p} \\ \vec{q} & \overleftrightarrow{T} \end{pmatrix}$$

那么，$T^\alpha{}_\beta$、$T_\alpha{}^\beta$ 和 $T_{\alpha\beta}$ 分别等于什么？

16

- 像 $T_{\alpha\beta}$ 这样只有下标的量称为**协变张量**。一般地，一个 n 阶协变张量 $T_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下的变换方式是

$$T'_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = \tilde{\Lambda}_{\alpha_1}{}^{\beta_1}\cdots\tilde{\Lambda}_{\alpha_n}{}^{\beta_n}T_{\beta_1\cdots\beta_n}$$

  - 二阶协变张量的一个例子是 $g_{\alpha\beta}$（不变张量）。

- 像 $T_\alpha{}^\beta$ 或 $T^\alpha{}_\beta$ 这样既有上标、也有下标的量称为**混合张量**。一般地，一个 **(m,n) 阶张量**（也称为 **$m+n$ 阶张量**）$T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}$ 在庞加莱变换 $x' = \Lambda x + a$ 下如下变换：

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\alpha_m}{}_{\mu_m}\tilde{\Lambda}_{\beta_1}{}^{\nu_1}\cdots\tilde{\Lambda}_{\beta_n}{}^{\nu_n}T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}$$

  - 二阶混合张量的一个例子是 $\delta^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}$（不变张量）。

17

3. 张量积

若 $R^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 和 $S^{\beta_1\cdots\beta_m}$ 分别是 n 阶和 m 阶张量，则

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_n\beta_1\cdots\beta_m} \triangleq R^{\alpha_1\cdots\alpha_n}S^{\beta_1\cdots\beta_m}$$

是一个 $n+m$ 阶张量，称为 $R^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 和 $S^{\beta_1\cdots\beta_m}$ 的**张量积**。

【例】两个矢量 X^μ 和 Y^μ 的张量积为二阶张量：

$$T^{\mu\nu} \triangleq X^\mu Y^\nu$$

18

4. 缩并

缩并运算又称为求迹的运算。

- 给定一个二阶张量 $T^{\alpha\beta}$，量

$$T^{\alpha}{}_{\alpha} = T^{0}{}_{0} + T^{1}{}_{1} + T^{2}{}_{2} + T^{3}{}_{3}$$

称为张量 $T^{\alpha\beta}$ 的**迹**。

【思考】$T^{\alpha}{}_{\alpha}$ 是一个四维标量。

- 一个高于二阶的张量有不止一个迹。例如

$$T^{\gamma}{}_{\gamma}{}^{\alpha},\quad T^{\gamma\alpha}{}_{\gamma},\quad T^{\alpha\gamma}{}_{\gamma}$$

是三阶张量 $T^{\alpha\beta\gamma}$ 的三个不同的**迹**。

【思考】这三个迹都是四维矢量。

19

矢量的标量积

若 X^{α} 和 Y^{α} 均为矢量，则将二阶张量 $X^{\alpha}Y^{\beta}$ 的缩并记为

$$X\cdot Y \triangleq X^{\alpha}Y_{\alpha} = X^{0}Y_{0} + X^{i}Y_{i} = \vec{X}\cdot\vec{Y} - X^{0}Y^{0}$$

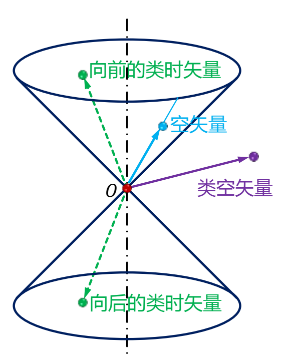
称为 X^{α} 和 Y^{α} 的**标量积**。

- 若 $X^{\alpha}Y_{\alpha}=0$，则称 X^{α} 和 Y^{α} **正交**。
- 矢量 X^{α} 的**平方**定义为

$$X\cdot X \triangleq X^{\alpha}X_{\alpha} = X^{0}X_{0} + X^{i}X_{i} = \left|\vec{X}\right|^{2} - (X^{0})^{2}$$

  - 若 $X^{\alpha}X_{\alpha}<0$，则称 X^{α} 是**类时矢量**；
  - 若 $X^{\alpha}X_{\alpha}>0$，则称 X^{α} 是**类空矢量**；
  - 若 $X^{\alpha}X_{\alpha}=0$，则称 X^{α} 是**类光矢量**（或**空矢量**）。

20



21

【例】

（1）空矢量与自身正交。

（2）4-速度的平方：$u^\alpha u_\alpha = -c^2$ **（质壳条件）**

（3）4-动量的平方：$p^\alpha p_\alpha = -m^2c^2$ **（质壳条件）**

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{E}^2 = |\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4$$

（4）4-加速度的平方：$w^\alpha w_\alpha = a'^2$（a' 是MCRF中的加速度）

（5）4-速度和4-加速度总是正交的：$u^\alpha w_\alpha = 0$

（6）梯度算子的平方称为**达朗贝尔算子**（4-标量算子）：

$$\partial_\mu \partial^\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

22

【思考】设下面的 X^α 和 Y^α 可以是任意四维矢量。

（1）若对 $\forall X^\alpha$，$A^\alpha X_\alpha$ 皆为标量，则 A^α 必为矢量；

（2）若对 $\forall X^\alpha, Y^\alpha$，$T^{\alpha\beta}X_\alpha Y_\beta$ 皆为标量，则 $T^{\alpha\beta}$ 必为二阶张量；

（3）若对 $\forall X^\alpha$，$T^{\alpha\beta}X_\alpha$ 皆为矢量，则 $T^{\alpha\beta}$ 必为二阶张量；

etc.

23

四、赝张量

设量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 有 4^n 个分量，且它在正规洛伦兹变换以及时空平移变换下如同一个 n 阶张量。

（1）若 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 在空间反演 $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu$ 变换下的变换方式为

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_n} = -\mathcal{P}^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\mathcal{P}^{\alpha_n}{}_{\mu_n}T^{\mu_1\cdots\mu_n}$$

则称其是**空间反演下的赝张量**。

（2）若 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 在时间反演 $x'^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu x^\nu$ 变换下的变换方式为

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_n} = -\mathcal{T}^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\mathcal{T}^{\alpha_n}{}_{\mu_n}T^{\mu_1\cdots\mu_n}$$

则称其是**时间反演下的赝张量**。

24

【思考】在空间反演 $ct' = ct$、$\vec{x}' = -\vec{x}$ 下，

（1）赝标量 φ 如何变换？

（2）赝矢量 X^α 的时间分量 X^0 和空间分量 $\vec{X}$ 如何变换？

【思考】在时间反演 $ct' = -ct$、$\vec{x}' = \vec{x}$ 下，

（1）赝标量 φ 如何变换？

（2）赝矢量 X^α 的时间分量 X^0 和空间分量 $\vec{X}$ 如何变换？

【思考】

（1）$c, ds^2, d\tau, d^4x$ 中，哪些是 $\mathcal{P}$（$\mathcal{T}$）下的赝标量？

（2）$dx^\alpha, u^\alpha, p^\alpha, w^\alpha$ 中，哪些是 $\mathcal{P}$（$\mathcal{T}$）下的赝矢量？

25

1. Levi–Civita张量

Levi–Civita张量 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ 在任一惯性标架中的分量均由下式定义

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \triangleq \begin{cases} +1, & (\alpha\beta\mu\nu)\text{是}(0123)\text{的偶置换} \\ -1, & (\alpha\beta\mu\nu)\text{是}(0123)\text{的奇置换} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} = \begin{vmatrix} \delta_0^\alpha & \delta_1^\alpha & \delta_2^\alpha & \delta_3^\alpha \\ \delta_0^\beta & \delta_1^\beta & \delta_2^\beta & \delta_3^\beta \\ \delta_0^\mu & \delta_1^\mu & \delta_2^\mu & \delta_3^\mu \\ \delta_0^\nu & \delta_1^\nu & \delta_2^\nu & \delta_3^\nu \end{vmatrix}$$

- 注意：$\varepsilon^{0123} = +1$，而 $\varepsilon_{0123} = -1$。
- $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ 是 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 下的（完全反对称）四阶赝张量。

$$\Lambda^\rho{}_\alpha \Lambda^\sigma{}_\beta \Lambda^\gamma{}_\mu \Lambda^\delta{}_\nu \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = (\det\Lambda)\varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}$$

26

2. 对偶张量

一个反对称二阶张量 $A^{\alpha\beta}$ 的**对偶张量**定义为：

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} \triangleq \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}A_{\mu\nu}$$

- $\tilde{A}^{\alpha\beta}$ 是一个反对称的二阶赝张量。

$$A^{\alpha\beta} = \{\vec{p},\quad \vec{a}\}$$
$$\Rightarrow\quad A_{\alpha\beta} = \{-\vec{p},\quad \vec{a}\}$$
$$\Rightarrow\quad \tilde{A}^{\alpha\beta} = \{\vec{a},\quad -\vec{p}\}$$

$$A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \vec{a} \end{pmatrix},\quad A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{p} \\ \vec{p} & \vec{a} \end{pmatrix},\quad \tilde{A}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{a} \\ -\vec{a} & -\vec{p} \end{pmatrix}$$

27

五、二阶张量的不变量

设 $S^{\alpha\beta}$ 是二阶对称张量，X^α 是任一4-矢，则 $Y^\alpha = S^{\alpha\beta}X_\beta$ 构成了一个逆变4-矢，如果 X^α 和 Y^α 平行（即 $Y^\alpha = \lambda X^\alpha$），则称 λ 为 $S^{\alpha\beta}$ 的**本征值**，而 X^α 则称为其**本征矢**。

- 本征矢方程 $S^{\alpha\beta}X_\beta = \lambda X^\alpha$ 可以写为

$$\left(S^{\alpha\beta} - \lambda g^{\alpha\beta}\right)X_\beta = 0 \quad \text{or} \quad \left(S^\alpha{}_\beta - \lambda\delta^\alpha_\beta\right)X^\beta = 0$$

- 本征矢方程具有非零解 X^β 的充要条件是满足久期方程

$$\left|S^\alpha{}_\beta - \lambda\delta^\alpha_\beta\right| = 0$$

【思考】本征值 λ 是不变量。

$$S^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta = \lambda X_\alpha X^\alpha = \lambda g^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta$$

28

- 本征值的如下四个不同组合称为对称张量 $S^{\alpha\beta}$ 的基本不变量：

$$\begin{cases} I_1 = \sum\limits_a \lambda_a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ I_2 = \sum\limits_{a<b} \lambda_a\lambda_b \\ I_3 = \sum\limits_{a<b<c} \lambda_a\lambda_b\lambda_c \\ I_4 = \sum\limits_{a<b<c<d} \lambda_a\lambda_b\lambda_c\lambda_d = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{cases}$$

29

- 对于反对称张量

$$A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \vec{a} \end{pmatrix} = \{\vec{p}, \quad \vec{a}\}$$

久期方程 $\left|A^\alpha{}_\beta - \lambda\delta^\alpha_\beta\right| = 0$ 写为了

$$\begin{vmatrix} -\lambda & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & -\lambda & a_3 & -a_2 \\ p_2 & -a_3 & -\lambda & a_1 \\ p_3 & a_2 & -a_1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^4 + \lambda^2(a^2 - p^2) - (\vec{p}\cdot\vec{a})^2$$

因此，反对称张量 $A^{\alpha\beta} = \{\vec{p}, \quad \vec{a}\}$ 仅有两个独立不变量

$$I_1 = a^2 - p^2, \quad I_2 = \vec{p}\cdot\vec{a}$$

30

- 显然，由反对称二阶张量 $A^{\alpha\beta}$可以构造如下两个不变量：

$$A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} \text{ 和 } \tilde{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$$

$$A^{\alpha\beta} = \{\vec{p},\quad \vec{a}\},\qquad A_{\alpha\beta} = \{-\vec{p},\quad \vec{a}\},\qquad \tilde{A}^{\alpha\beta} = \{\vec{a},\quad -\vec{p}\}$$

$$A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \\ -\vec{p} & \vec{a} \end{pmatrix},\quad A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{p} \\ \vec{p} & \vec{a} \end{pmatrix},\quad \tilde{A}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{a} \\ -\vec{a} & -\vec{p} \end{pmatrix}$$

因而，不变量 $A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$ 和 $\tilde{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$ 可以表示为

$$\begin{cases} A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} = 2(a^2 - p^2) = 2I_1 \\ \tilde{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} = -4\vec{p}\cdot\vec{a} = -4I_2 \end{cases}$$

由此也可见：I_1 是标量，而 I_2 是赝标量。

31

六、不变张量

闵可夫斯基空间中基本的不变张量有三个

$$g^{\alpha\beta},\quad g_{\alpha\beta},\quad \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

其他的不变张量必然是这三个基本不变张量的代数组合。

- 不存在奇数阶的不变张量。
- 二阶不变张量具有下面的形式：

$$T^{\alpha\beta} = ag^{\alpha\beta},\quad T_{\alpha\beta} = ag_{\alpha\beta},\quad T^{\alpha}{}_{\beta} = a\delta^{\alpha}_{\beta} = ag^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}$$

32

【思考】设四阶张量 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 是不变张量。

（1）$T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 的最一般表达式是什么？

（2）若 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 是完全反对称的，其一般表达式是什么？

（3）若 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 是完全对称的，其一般表达式是什么？

（4）若 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 关于 α 和 β 反对称，其一般表达式是什么？

（5）若 $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ 关于 α 和 β 对称，其一般表达式是什么？

33

七、张量与相对性原理

相对性原理要求：所有惯性系都是等价的，物理定律在所有惯性系中都具有形同的形式。

- 倘若一个物理学方程中的每一项都属于相同类型的四维张量，这样的方程称为是**明显协变的**。
  - 如：$A_\mu = B_\mu$，（A_μ 和 B_μ 都是4-矢量）

$$A_\mu = B_\mu \quad \Leftrightarrow \quad A'_\mu = B'_\mu$$

  - 如：$T_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$，（$T_{\mu\nu}$、$S_{\mu\nu}$ 和 $R_{\mu\nu}$ 都是二阶4-张量）

$$T_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad T'_{\mu\nu} + S'_{\mu\nu} = R'_{\mu\nu}$$

- 在庞加莱变换下，明显协变形式的方程中每一项都按相同的方式变换，自动保证方程形式与惯性系的选择无关，从而使得该方程获得有可能成为符合相对论要求的物理规律的资格。

34

- 明显协变的方程在完整的庞加莱变换（推动、转动、平移、离散变换）下是不变的。
  - 经典物理学中，物理规律如 $A_\mu = B_\mu$，A_μ 和 B_μ 可同为4-矢，或同为赝4-矢，但不能一个为4-矢，另一个为赝4-矢。
  - 自然界中，有些相互作用并不表现出离散变换下的不变性。
- 可能遇到这样的方程，它符合于相对性原理的要求，即在所有惯性系中都具有形同的形式，但却未必是明显协变的。如

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}'}{dt'} = e\left(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'\right)$$

  - 这样的方程称为是协变的（尽管并非明显协变）。
  - 总可以将这样的方程写为明显协变的。

35

- 实现相对性原理的最简单、最优雅的方法——实际上是唯一真正有效的方式——是将物理定律写为明显协变的形式，而这可以在张量的数学框架中实现。

至少在经典物理学中，
真正有意义的物理量必然是张量，
真正有意义的物理定律必然可以写为张量方程的形式。

【问题】方程 $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = f^\beta$是否有可能是符合于相对性原理要求的物理规律？

36

【思考】

（1）固有时在 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 下的变换方式；

（2）四维位移、四维速度、四维动量和四维加速度在 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 下的变换方式；它们的时间分量和空间分量分别如何变换？

（3）度规张量和Levi-Civita张量在 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 下的变换方式。

37