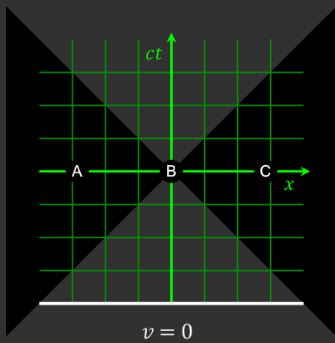
§3 狭义相对论的时空观



1

若非特别指出，本课程后面将采用如下符号：

- K' 系相对于 K 系的运动速度用 $\vec{v}_0$ 表示

$$\vec{\beta}_0 = \vec{v}_0/c\,,\quad \gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{-1/2}$$

- 粒子相对于 K 系的运动速度用 $\vec{v}$ 表示

$$\vec{v} \triangleq d\vec{x}/dt \quad \vec{\beta} = \vec{v}/c\,,\quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$$

- 粒子相对于 K' 系的运动速度用 $\vec{v}'$ 表示

$$\vec{v}' \triangleq d\vec{x}'/dt' \quad \vec{\beta}' = \vec{v}'/c\,,\quad \gamma' = (1-\beta'^2)^{-1/2}$$

- 粒子相对于 K 系和 K' 系的加速度 $\vec{a}$ 和 $\vec{a}'$ 分别如下表示

$$\vec{a} \triangleq d\vec{v}/dt\,,\quad \vec{a}' \triangleq d\vec{v}'/dt'$$

2

洛伦兹变换

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma_0(c\Delta t - \beta_0 \Delta x_1) \\ \Delta x_1' = \gamma_0(\Delta x_1 - \beta_0 c\Delta t) \\ \Delta x_{2,3}' = \Delta x_{2,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma_0\left(c\Delta t - \vec{\beta}_0 \cdot \Delta\vec{x}\right) \\ \Delta\vec{x}_\parallel' = \gamma_0\left(\Delta\vec{x}_\parallel - \vec{\beta}_0 c\Delta t\right) \\ \Delta\vec{x}_\perp' = \Delta\vec{x}_\perp \end{cases}$$

洛伦兹反变换

$$\begin{cases} c\Delta t = \gamma_0(c\Delta t' + \beta_0 \Delta x_1') \\ \Delta x_1 = \gamma_0(\Delta x_1' + \beta_0 c\Delta t') \\ \Delta x_{2,3} = \Delta x_{2,3}' \end{cases}$$

$$\begin{cases} c\Delta t = \gamma_0\left(c\Delta t' + \vec{\beta}_0 \cdot \Delta\vec{x}'\right) \\ \Delta\vec{x}_\parallel = \gamma_0\left(\Delta\vec{x}_\parallel' + \vec{\beta}_0 c\Delta t'\right) \\ \Delta\vec{x}_\perp = \Delta\vec{x}_\perp' \end{cases}$$

3

一、事件的分类

由于时空间隔是不变量，由此，我们可以对两事件的关系作如下不依赖于参考系的分类：

- 若 $\Delta s^2 < 0$，则称两事件是**类时分割的**（timelike seperated）

  两事件可用低于光速的信号联系（$|\Delta\vec{x}| < c\Delta t$）

- 若 $\Delta s^2 = 0$ ，则称两事件是**类光分割的**（lightlike seperated）

  两事件可用光信号联系（$|\Delta\vec{x}| = c\Delta t$）

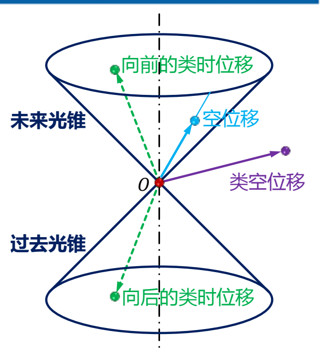
- 若 $\Delta s^2 > 0$ ，则称两事件是**类空分割的**（spacelike seperated）

  两事件的空间距离超过了光在时间Δt内传播的距离

1. 光锥

与事件 O 类光分割的所有事件位于以 O 为顶点的锥面上，称为事件 O 的**光锥**：

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2t^2$$

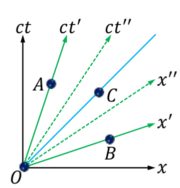


2. 因果律与相互作用的最大传播速度

- 类空分割两事件的时序是不确定的（依赖于所选参考系）。
  - 总可以找到一个参考系，使二者在其中同时发生。
- 类时分割两事件的时序是绝对的（与参考系无关）。
  - 总可以找到一个参考系，使二者在其中同地发生。
- 类光分割两事件的时序是绝对的。

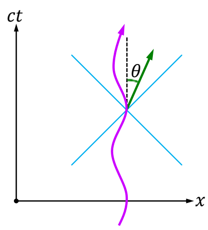
有因果关系的两事件一定是类时或类光分割的。

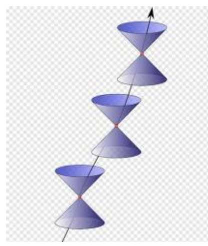
相互最用的最大传播速度是真空中的光速。



3. 类时世界线

类时世界线是指世界线上任一点处的切线都在该点的光锥之内，从而，沿着该世界线运动的粒子在任一时刻的速度都小于光速。





7

从洛伦兹推动考察同时的相对性

设 K' 系相对于 K 系以速度 v_0 沿着 x_1 轴运动。考察在 K' 系中同时发生的两事件 A 与 B，即有 $\Delta t' = t_B' - t_A' = 0$ 。

- 若 $\Delta x_1' = 0$，则 $\Delta x_1 = 0$ 且 $\Delta t = 0$。

结论： 垂直于相对运动方向的平面内发生的两事件，若在其中一个惯性系内同时发生，则在另一惯性系也必然同时发生。

- 若 $\Delta x_1' \neq 0$，则利用洛伦兹反变换

$$\begin{cases} \boxed{c\Delta t} = \gamma_0(c\Delta t' + \beta_0\Delta x_1') \boxed{= \beta_0\gamma_0\Delta x_1' = \beta_0\Delta x_1} \\ \Delta x_1 = \gamma_0(\Delta x_1' + \beta_0 c\Delta t') = \gamma_0\Delta x_1' \end{cases}$$

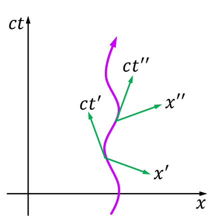
结论： 同时是相对的，运动前方的事件较晚发生。

8

二、时间间隔的相对性

固有时： 相对于一个粒子静止的时钟走时 $\Delta\tau$。

- 对于运动的粒子，在任一特定时刻，都存在一类特殊的惯性参考系，该时刻粒子在相对于该参考系的速度恰好为零，这样的参考系称为**瞬时共动标架（MCRF：Momentarily Comoving Reference Frame）**。
  - 若将 MCRF 的原点选在粒子所处时空位置，则将其称为**粒子自身系**。粒子自身系是唯一的。



9

动钟变慢

考察匀速运动粒子世界线上的两事件 A 与 B，其间隔为 Δs^2。

- 粒子在其中静止的参考系 K' 中

$$\Delta \vec{x}' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta s^2 = |\Delta \vec{x}'|^2 - (c\Delta t')^2 = -c^2(\Delta\tau)^2$$

- 在任一别的给定惯性系 K 中，设粒子速度为 $\vec{v}$：

$$\Delta \vec{x} = \vec{v}\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \Delta s^2 = |\Delta \vec{x}|^2 - (c\Delta t)^2 = -(c^2 - v^2)(\Delta t)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta\tau$$

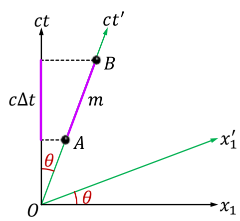
结论：运动物体上发生的物理过程，比起静止物体上的同一过程用时更长，或者说时间延缓了（动钟变慢）。

10

从时空图考察动钟变慢

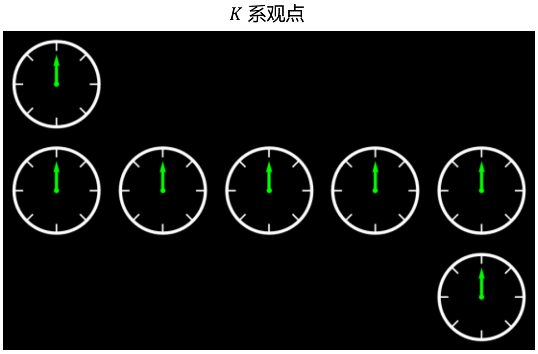
$$c\Delta t = m\cos\theta = \gamma_0 \frac{m\cos\theta}{\gamma_0}$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta t = \gamma_0 \Delta\tau$$



11

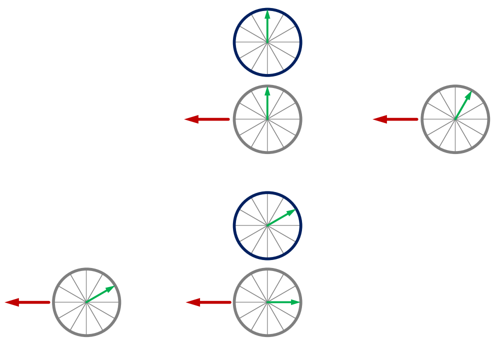
K 系观点



与不同时钟进行比较的那一个时钟变慢了。

12

K' 系观点



13

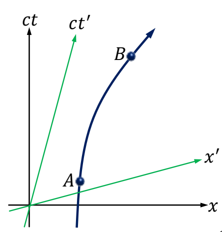
固有时

- 对于一般运动的粒子，沿着其世界线的固有时为

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt \quad \text{or} \quad \Delta\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{-ds^2}$$

对于任一物理过程而言，
固有时是唯一的，
与参考系的选择无关。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} = \int_{t_1'}^{t_2'} \frac{dt'}{\gamma'}$$



14

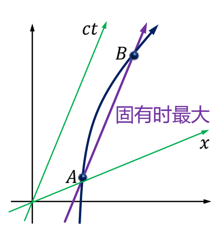
【例】两个时空点 A 和 B 之间的间隔是类时的。证明连接 A 和 B 的类时世界线中，沿直的世界线计算时固有时最大。

【解】设沿直的世界线运动的粒子在某个惯性系 K 中处于静止，相应的固有时用该系中的时间表示为 $t_2 - t_1$。

沿其他类时世界线运动的粒子，其相对于 K 系速率 $v(t) < c$，因而相应的固有时

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

$$< \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1$$



自由粒子的世界线可以被表征为最大固有时的时空曲线。

15

【例】在20岁生日时，双胞胎中的一个（甲）留在地球上，另一个（乙）则离开家前往距地球 $l = 24$ 光年 远的行星，到达该行星后乙即返航，旅途中乙的速度大小始终为 $\beta = 24/25$。试问当乙回到家中时甲、乙两双胞胎的年龄分别为多大？

【解】$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = 25/7$。

- 从甲的观点看，旅行所花时间为 $T = 2l/v = 50$ 年。所以当乙返回时甲的年龄为70岁。
- 由于运动时钟变慢，因而从乙的观点看，旅行所花时间为

$$T' = T/\gamma = 14\text{ 年}$$

或者，由于在乙看来，行星与地球的距离只有 l/γ。

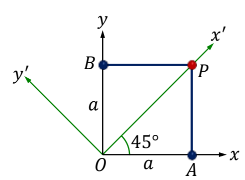
故当乙回到家时，甲的年龄为70岁，而乙的年龄只有34岁。

问题：折线 APB 长为多少？

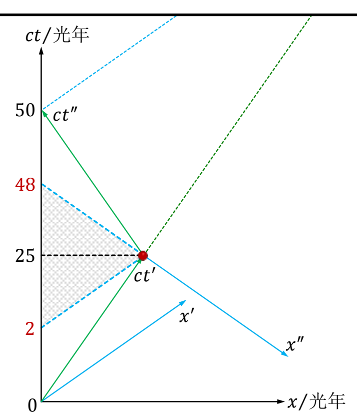
$$\begin{cases} L_{AP} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = a \\ L_{PB} = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} = a \end{cases} \Rightarrow \quad L = L_{AP} + L_{PB} = 2a$$

其中 L_{PB} 也可如下计算 $L_{PB} = [(x'_B - x'_P)^2 + (y'_B - y'_P)^2]^{1/2} = a$

但是 $L_{PB} \neq [(x'_B - x_P)^2 + (y'_B - y_P)^2]^{1/2}$



	(x,y)	(x',y')
A	$(a,0)$	$(a/\sqrt{2}, -a/\sqrt{2})$
P	(a,a)	$(\sqrt{2}a, 0)$
B	$(0,a)$	$(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$



三、空间间隔的相对性

固有长度：尺子在其自身系中的长度 Δl_0。

- 设直尺相对于 K' 系静止，在 K' 系中测得其长度为 Δl_0。
  设 A 与 B 是 K 系中同时发生于直尺两端的两事件：
  - 若 $\Delta x_1 = 0$，则 $\Delta t' = 0 = \Delta x_1'$ 且 $\Delta x_{2,3}' = \Delta x_{2,3}$。

  结论：垂直于运动方向的直尺，在两系中所测长度相同。
  - 若直尺平行于$\vec{v}_0$（$\Delta x_1 = \Delta l \neq 0$），则洛伦兹变换：

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma_0(c\Delta t - \beta_0 \Delta x_1) = -\beta_0\gamma_0\Delta x_1 \\ \Delta x_1' = \gamma_0(\Delta x_1 - \beta_0 c\Delta t) = \gamma_0 \Delta x_1 \end{cases} \Longrightarrow \Delta l_0 = \gamma_0 \Delta l$$

  结论：运动方向上尺子缩短（动尺缩短）。

19

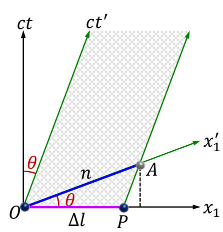
从时空图考察动尺缩短

$$\Delta l = n\cos\theta - n\sin\theta\tan\theta$$

$$= n\cos\theta\,(1-\tan^2\theta)$$

$$= \gamma_0 \frac{n\cos\theta}{\gamma_0}(1-\beta_0^2)$$

$$\Longrightarrow \Delta l = \frac{\Delta l_0}{\gamma_0} = \Delta l_0\sqrt{1-\beta_0^2}$$



20

固有物理量

- 若尺子相对于 K 系运动的速度为 $\vec{v}(t)$，则当 $\vec{v}$ 垂直于尺子时，有 $\Delta l = \Delta l_0$；而 $\vec{v}$ 平行于尺子时，有

$$\Delta l = \frac{\Delta l_0}{\gamma} = \Delta l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

  - 固有长度与惯性参考系的选取无关。
- 3维体积元 $dV = d^3x = dx_1dx_2dx_3$ 与**固有体积元**之间满足

$$dV = dV_0/\gamma$$

- 4维体积元 $d^4x = cdtd^3x = cdtdV$ 与惯性系的选择无关。
- 类似可定义**固有粒子数密度** n_0，它与粒子数密度 n 的关系为

$$n = \gamma n_0$$

21

【例】火车原长为 a，速度为 v；隧道原长为 b。分别在地面以及火车参考系中求从车头到达隧道入口至车尾离开隧道出口这一过程所经历的时间间隔。

【解】以车头到达隧道入口这一事件作为两系共同的时空原点。

车尾离开隧道出口这一事件 A 的坐标为

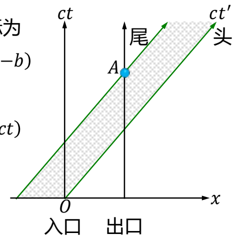
$$(ct,x)=(ct,a),\quad (ct',x')=(ct',-b)$$

利用洛伦兹变换

$$ct'=\gamma(ct-\beta a),\quad -b=\gamma(a-\beta ct)$$

得到

$$t=\frac{a+b/\gamma}{v},\quad t'=\frac{a/\gamma+b}{v}$$

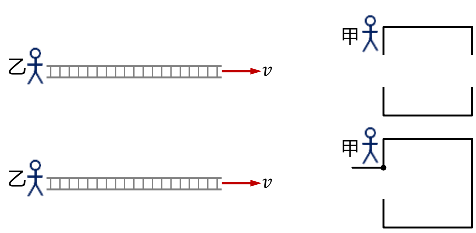


22

【例】一长为 l 的仓库和一长为 $2l$ 的梯子，梯子匀速（$\gamma=2$）向仓库运动。设甲相对于地面静止，乙相对于梯子静止。

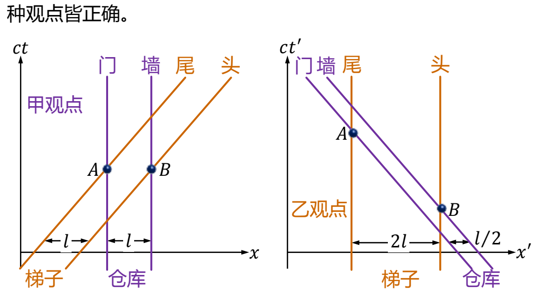
（1）从甲、乙各自观点看，仓库长度是否足够容纳梯子？

（2）如果仓库的后墙是刚性的，从甲、乙各自观点看，梯子是否可以放入仓库？



23

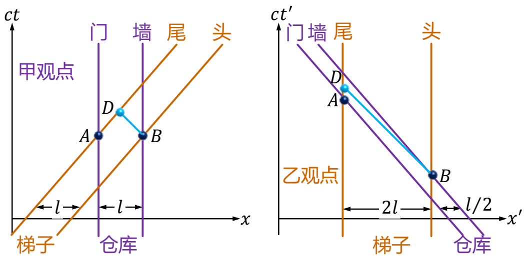
【解】（1）在甲看来，由于仓库长度为 l，而运动梯子长度亦为 l，因此仓库恰好可以容纳梯子；而在乙看来，由于梯子长度为 $2l$，而运动仓库长度为 $l/2$，因此仓库不可能容纳梯子。两种观点皆正确。



24

（2）甲、乙都认为梯子可以放入仓库。

这是由于信号传递的最大速度是光速，设 D 是梯子前端撞上墙壁这一信号以最大的速度——光速传递到梯子后部这一事件。D 这一事件在甲、乙两观测者看来都发生于 A 事件之后。



25

四、速度合成法则

$$ct = \gamma_0\left(ct' + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{x}'\right),\quad \vec{x}_\parallel = \gamma_0\left(\vec{x}'_\parallel + \vec{\beta}_0 ct'\right),\quad \vec{x}_\perp = \vec{x}'_\perp$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\beta}_\parallel = \frac{\vec{\beta}'_\parallel + \vec{\beta}_0}{1 + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'},\quad \vec{\beta}_\perp = \frac{\vec{\beta}'_\perp}{\gamma_0\left(1 + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)}$$

- 亦可将速度变换关系统一写为

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\beta}' + \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0 + 1}\left(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)\vec{\beta}_0 + \gamma_0 \vec{\beta}_0}{\gamma_0\left(1 + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)}$$

- 当 $\beta_0, \beta' \ll 1$ 时，保留至 β_0 的一次项，得伽利略速度合成法则

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}' + \vec{\beta}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$$

26

两个特例

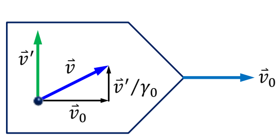
- 若$\vec{v}' \parallel \vec{v}_0$，则$\vec{v} \parallel \vec{v}_0$，且

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \vec{v}_0}{1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{v}'/c^2} \quad \Leftrightarrow \quad v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB} v_{BC}/c^2}$$

【思考】此情形下，快度变换关系为 $\xi_{AC} = \xi_{AB} + \xi_{BC}$。

- 若$\vec{v}' \perp \vec{v}_0$，则

$$\vec{v}_\parallel = \vec{v}_0,\quad \vec{v}_\perp = \frac{\vec{v}'}{\gamma_0}$$



27

1. 速度大小变换

由于

$$ds^2 = -(1-\beta^2)c^2dt^2 = -(1-\beta'^2)c^2dt'^2$$

因此，若 $\beta' = 1$，则 $\beta = 1$；若 $\beta' < 1$，则 $\beta < 1$。

利用

$$cdt = \gamma_0\left(cdt' + \vec{\beta}_0 \cdot d\vec{x}'\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dt'} = \gamma_0\left(1 + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)$$

可将速度大小的变换关系定量表述为

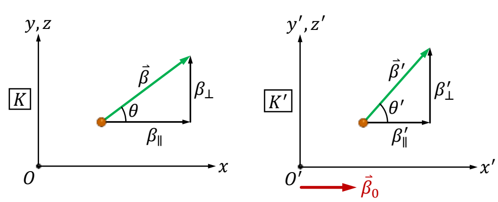
$$\gamma = \gamma_0\gamma'\left(1 + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)$$

28

2. 速度方向的变换

设粒子在 K 和 K' 中的速度与 $\vec{v}_0$ 的夹角分别为 θ 和 θ'。

$$\tan\theta = \frac{\beta_\perp}{\beta_\parallel} = \frac{\beta'_\perp}{\gamma_0(\beta_0 + \beta'_\parallel)} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}\,\beta'\sin\theta'}{\beta_0 + \beta'\cos\theta'}$$



29

光行差公式

对于光子，$\beta' = 1 = \beta$，因此

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}\sin\theta'}{\beta_0 + \cos\theta'} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}\sin\theta'}{1 + \beta_0\cos\theta'}$$

若 $\beta_0 \ll 1$，则 $\theta' \approx \theta$。保留至 β_0 的一次项，有

$$\sin\theta \approx \sin\theta'\,(1 - \beta_0\cos\theta')$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\sin\theta \triangleq \sin\theta' - \sin\theta \approx \beta_0\sin\theta'\cos\theta'$$

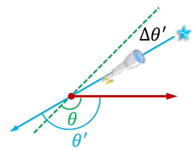
$$\approx \beta_0\sin\theta\cos\theta$$

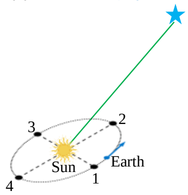
30

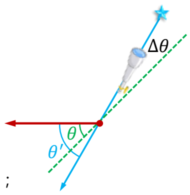
由于 $\Delta\sin\theta = (\cos\theta)\Delta\theta$，因而

$$\Delta\theta \triangleq \theta' - \theta \approx \beta_0 \sin\theta$$

这就是著名的**光行差公式**。







当地球运动到位置3时，恒星的视位置最高；
而在位置1处，恒星的视位置最低。

【例】1818年，菲涅耳假定“以太”被运动介质部分带动，导出运动介质（相对于以太）中光的传播速度公式

$$v_p = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_0 \cos\theta$$

式中 n 为介质折射率，$v_0 (\ll c)$ 为介质运动速率，θ 为介质运动速度与光传播方向的夹角。视光的传播为光子运动，证明上述菲涅耳公式。

【解】设 $\beta = v_p/c$，$\beta' = v_p'/c = 1/n$，$\beta_0 = v_0/c$。利用前面得到的公式 $\gamma = \gamma_0 \gamma' \left(1 + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)$，有

$$1 - \beta^2 = \frac{(1-\beta_0^2)(1-\beta'^2)}{\left(1 + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)^2}$$

$$1 - \beta^2 \approx (1 - \beta'^2)\left(1 - 2\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)$$

$$= 1 - \beta'^2 - 2(1 - \beta'^2)\left(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}'\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \beta \approx \beta' \sqrt{1 + 2(1 - \beta'^2)\left(\vec{\beta}_0 \cdot \hat{\beta}'\right)}$$

$$\approx \beta' \left[1 + (1 - \beta'^2)\left(\vec{\beta}_0 \cdot \hat{\beta}'\right)\right]$$

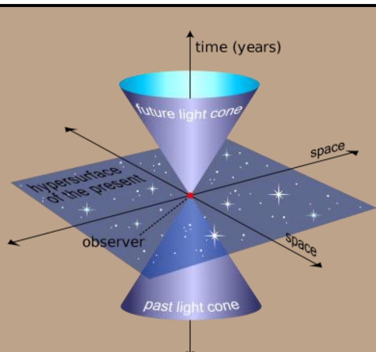
$$\approx \beta' \left[1 + (1 - \beta'^2)\left(\vec{\beta}_0 \cdot \hat{\beta}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad v_p \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_0 \cos\theta$$

五、加速度合成法则

请自行推导加速度的合成法则。

34



谢谢

35