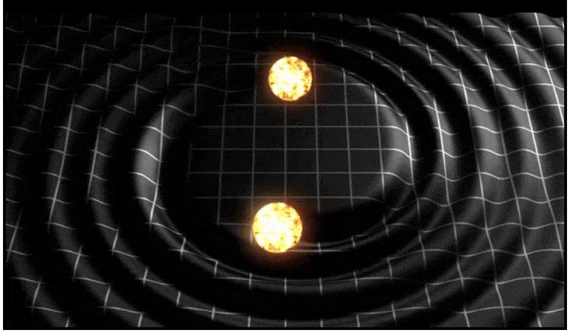
CH3. 狭义相对论

§1 时空性质与爱因斯坦假设



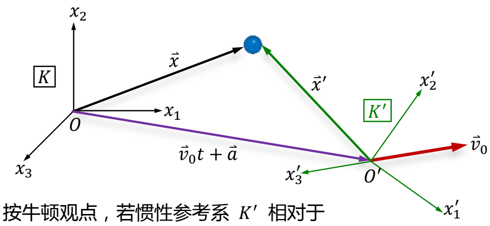
一、伽利略相对性原理

- 如果一个粒子远离其他所有的物体，那么可以找到这样的参考系，粒子相对于该参考系静止或匀速直线运动，这样的参考系就称为**惯性参考系**。
- 牛顿力学的动力学方程是惯性参考系中写出的。在某个惯性参考系 K 中，粒子的运动由牛顿第二定律决定，数学上该定律表示为

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

- 在相互作匀速运动的不同惯性系中，力学定律具有相同的形式，或者说，由任何力学现象都无法断定哪个惯性观测者是绝对静止的，这就是**伽利略相对性原理**。

1. 伽利略变换



按牛顿观点，若惯性参考系 K' 相对于 K 系以速度 $\vec{v}_0$ 匀速运动，则同一物理事件在两系中的时空坐标 $(t, \vec{x})$ 和 $(t', \vec{x}')$ 之间的关系由如下**伽利略变换**描述（其中 $R \in \mathrm{SO}(3)$ 为转动矩阵）：

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_0 t - \vec{a} \\ t' = t - t_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i' = R_{ij} x_j - v_{0i} t - a_i \\ t' = t - t_0 \end{cases}$$

4

2. 牛顿时空观

- Absolute, true, and mathematical **time**, from its own nature, passes equably without relation to anything external, and thus without reference to any change or way of measuring of time.
- Absolute, true, and mathematical **space** remains similar and immovable without relation to anything external. Relative spaces are measures of absolute space defined with reference to some system of bodies or another, and thus a relative space may, and likely will, be in motion.
- The **place** of a body is the space which it occupies, and may be absolute or relative according to whether the space is absolute or relative.
- Absolute **motion** is the translation of a body from one absolute place to another; relative motion the translation from one relative place to another.

“… instead of absolute places and motions,
we use relative ones.”

5

相对与绝对

- 事件发生的时刻、地点是相对的
- 走时（时间间隔）、距离（空间间隔）是绝对的

$$dt = dt', \quad |d\vec{x}| = |d\vec{x}'|$$

- 同时性是绝对的

$$t_2 = t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_2' = t_1'$$

- 速度是相对的，满足**伽利略速度合成法则**：

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \quad \text{or} \quad \vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$$

- 加速度是绝对的：

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

6

3. 粒子动力学

若假设力不依赖于惯性参考系的选取，即 $\vec{F}' = \vec{F}$，则牛顿第二定律在 K' 系中表示为

$$\vec{F}' = m\vec{a}'$$

它与 K 系中的方程具有完全相同的形式。

粒子的力学定律在伽利略变换下是不变的。

粒子动力学的裂缝

- 根据牛顿方程，物体的速度原则上没有上限。若物体由于受到恒力而以恒定加速度 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 从静止开始运动，1年后，其速度约为 $3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$，2年后速度将达到 $6 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$。
- 不只限于牛顿力学，我们仍然有线动量守恒定律：只要外力的影响可以忽略，那么相互作用物体的动量之和是常数。

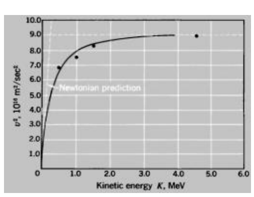
Newton：动量定义为粒子的惯性质量（恒量）与速度乘积。

- 不只限于牛顿力学，我们也有能量守恒原理：能量可以相互转化，但自然界的总能量为常数。

Newton：动能定义为动量平方除两倍的粒子质量。

- 动能定理提供了一个检验牛顿力学是否普遍适用的手段：动能一方面可以通过能量守恒由外界提供的能量得到，另一方面，粒子速度是可以独立测量的，从而也就有了另一种得到动能的方法。按照牛顿力学

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Longrightarrow \quad v^2 \propto T$$



- 实验结果显示：当粒子能量持续增加时，其速度将趋于一个确定的值（c）。随着物体速度的增加，对牛顿力学的偏离也将显著增大。

4. 波动

考察一维波动方程（K 系）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(t,z)=0$$

若 K' 系相对于 K 系以速度 $\vec{v}_0=v_0\hat{z}$ 运动，不妨令

$$z'=z-v_0t,\quad t'=t$$

若设场 $\varphi(t,z)$ 用 K' 系中的坐标表示为 $\varphi'(t',z')$，则 K' 系中波动方程变为

$$\left[\left(1-\frac{v_0^2}{v^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+\frac{2v_0}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial z'}\right]\varphi'(t',z')=0$$

波动方程的形式在伽利略变换下并非是不变的。

- 显然，$\varphi(t,z)=f(z-vt)$ 是 K 系中波动方程的一个解，该解在 K' 系中表示为

$$\varphi'(t',z')=f\big((z'+v_0t)-vt'\big)=f(z'-(v-v_0)t')$$

  - 满足 K' 系中的波动方程。
  - 在 K' 系中波的传播速度为 $v-v_0$。
  - 若 $v_0=v$，则 K' 系根本没有波的传播。

（1）伽利略变换并不能保持波动方程的形式不变。

（2）机械波的传播离不开介质的存在，通常所说波速是与介质质心保持相对静止的观测者测量的波速。

（3）机械波相对于传播媒介的速度与波源的运动无关。

二、寻找以太

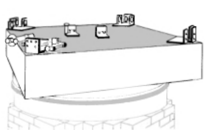
- 作为麦克斯韦方程组的直接推论，自由空间中的电磁场满足波动方程，电磁波在真空中传播的速度为真空光速 c。前面的讨论意味着：电磁场的波动方程以及麦克斯韦方程组在伽利略变换下并非不变的。
- 19世纪的很多物理学家认为：光是在某种称为“以太”的媒介中传播的横向扰动，而其传播速度 c 也是相对于以太这一特殊参考系的：
  - 伽利略相对性原理适用于经典力学，而电磁理论则只在相对于以太静止的参考系中才成立。
  - 很难理解光速为什么会如此之大。
  - 关于光传播媒介的唯一线索是 c 本身的测量值。

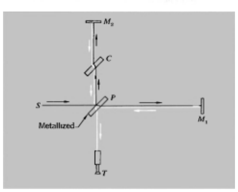
- 1861年，麦克斯韦提出了光的电磁理论：根据可测量的电学和磁学性质，可以预测任何给定介质的光速数值。自此，尽管以太仍然很神秘，但它和普通物质之间的鸿沟消失了，而以太理论似乎是一个无法否认的现实。
- 如果以太存在，“光速”是什么意思就很清楚了。这种速度的大小可能是波长的函数，但至少在各向同性介质中是唯一确定的。特别是，光通过介质的速度应该与光源的任何运动完全无关，这与粒子发射机制形成直接对比。

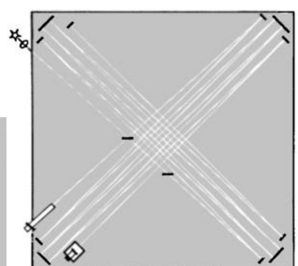
Frequency, sec^{-1}	*Photon energy*, eV	*Wavelength*, m	*Speed (with error)*, $\times 10^8 m/sec$
4.7×10^7	1.9×10^{-7}	6.4	2.9978 ± 0.0003
1.7×10^8	7.0×10^{-7}	1.8	2.99795 ± 0.00003
3.0×10^8	1.2×10^{-6}	1.0	2.99792 ± 0.00002
3.0×10^9	1.2×10^{-5}	1.0×10^{-1}	2.99792 ± 0.00009
2.4×10^{10}	1.0×10^{-4}	1.2×10^{-2}	2.997928 ± 0.000003
7.2×10^{10}	3.0×10^{-4}	4.2×10^{-3}	2.997925 ± 0.000001
5.4×10^{14}	2.2	5.6×10^{-7}	2.997931 ± 0.000003
1.2×10^{20}	5.1×10^5	2.5×10^{-12}	2.983 ± 0.015
4.1×10^{22}	1.7×10^8	7.3×10^{-15}	2.97 ± 0.03

13

Michelson–Morley 实验







14

Observer; year	*l, cm.*	δ_{calc}	δ_{obs} *(upper limit)*	*Ratio*
Michelson; 1881	120	0.04	0.02	2
Michelson and Morley; 1887	1100	0.40	0.01	40
Morley and Miller; 1902–1904	3220	1.13	0.015	80
Miller, 1921	3220	1.12	0.08	15
Miller; 1923–1924	3220	1.12	0.03	40
Miller (sunlight); 1924	3220	1.12	0.014	80
Tomaschek (starlight); 1924	860	0.3	0.02	15
Miller; 1925–1926	3200	1.12	0.08	13
Kennedy; 1926	200	0.07	0.002	35
Illingworth; 1927	200	0.07	0.0004	175
Piccard and Stahel; 1927	280	0.13	0.006	20
Michelson et al; 1929	2590	0.9	0.01	90
Joos; 1930	2100	0.75	0.002	375

Michelson–Morley 实验意味着地球相对于以太并没有运动。

15

Einstein 面对的几种选择

1. Maxwell方程组是错误的，正确的电磁理论在伽利略变换下是不变的？
   - 几乎不可能！（Hertz等人）
2. 伽利略变换只适用于经典力学，而电磁理论则有一个从优参考系（其中以太是静止的）？
   - 当时大多数物理学家的观点。（Lorentz收缩、Fizeau实验）
3. 存在一种更为一般的坐标变换或者说相对性原理，它对于经典力学和电磁理论都同样是适用的？
   - 需要修改经典力学定律（对大多数人来说太过激进）
   - 需要找到一个相对性原理，或者说需要找到不同坐标系之间的一个合适的联系方式。

四、相对论假设

（0）时空假设

空间是均匀的、各向同性的，时间是均匀的。

（1）光速普适原理

真空中的光速对于所有观测者都具相同的数值。

$$c = 299792458\ \mathrm{m/s} \approx 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

(与光源的运动无关)

（2）相对性原理

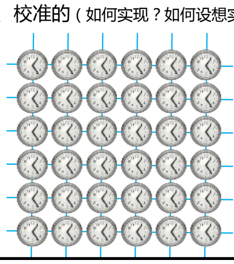
物理定律在所有惯性系中都具有形同的形式。

(所有惯性系都是等价的)

五、惯性观测者

惯性观测者是一个用来记录事件发生的时间和地点的信息采集系统。

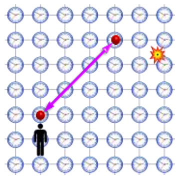
- 时钟位置可由笛卡尔坐标描述，即是说空间是欧几里德的
- 时钟是同步的、校准的（如何实现？如何设想实现？）



1. 如何测量？

- 惯性观测者以时空相重点记录事件发生的时间和地点。
- 惯性观测者以同时记录的首尾相重点的距离定义（静止或运动）尺子的长度

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2}$$



19

2. 时空性质

时间是均匀的；空间是均匀的、各向同性的。

- 对于任意给定的两个事件，它们在某个惯性参考系中所测的时间间隔和空间位移，
  与该参考系的时空原点的选取、空间坐标轴的取向无关，
  也与其它惯性参考系的时空原点及空间坐标轴的取向无关。
  - 静止尺子的长度与其方位以及何时、何地测量无关
  - 静止时钟的走时与其方位以及何时、何地测量无关
  - 匀速运动尺子的长度与何时、何地测量无关
  - 匀速运动时钟的走时均匀，与何时、何地测量无关

20

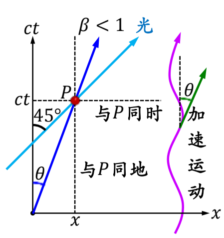
3. 时空图

可以将某个惯性观测者视为以时空坐标 ct, x^1, x^2, x^3 作为直角坐标构建的一个坐标系，因而又将惯性观测者称为**惯性标架**，或简称为**标架**。

- 一个事件由标架中的一个点表示。
- 点或事件的一维集合称为**世界线**。
- 世界线在其上某点的切线斜率

$$k = \frac{d(ct)}{dx} = \frac{1}{\beta}, \quad \beta \triangleq \frac{v}{c} = \tan\theta$$

  - 世界线越陡，运动越慢；
  - 光的世界线是 $45°$ 线。



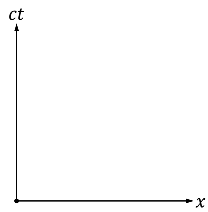
21

时间轴

ct 轴是 K 系中发生于位置 $x=0$ 处的事件集合。

ct 轴是 K 系中静止于 $x=0$ 处的时钟的世界线。

- 平行于时间轴的世界线
  是 K 系中同地发生事件的集合，
  是 K 系中静止时钟的世界线。



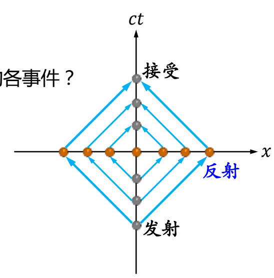
22

空间轴

x 轴是 K 系中同时发生于 $t=0$ 时刻的事件集合。

- 平行于 x 轴的世界线是 K 系中同时发生的事件集合。

【问题】如何找出 x 轴上的各事件？

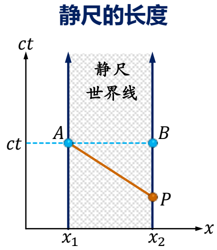


23

尺子长度的测量

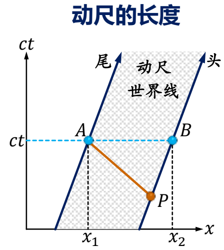
以同时记录的首尾相重点的距离定义尺子的长度 Δl

静尺的长度



$\Delta l = |\Delta x_{AB}| = |x_2 - x_1|$
$= |\Delta x_{AP}|$

动尺的长度



$\Delta l = |\Delta x_{AB}| = |x_2 - x_1|$
$\neq |\Delta x_{AP}|$

24

六、数学符号

1. 4-位矢

事件的**逆变时空坐标**（或者 **四维位矢**）定义为

$$x^\alpha \triangleq (x^0,x^1,x^2,x^3) \triangleq (ct,x_1,x_2,x_3)$$

● 约定

$$i,j,k,\cdots \in \{1,2,3\},\quad \alpha,\beta,\gamma,\cdots \in \{0,1,2,3\}$$

● 记号

$$x^i \triangleq (x^1,x^2,x^3) \leftrightarrow \vec{x},\quad x^\alpha \triangleq (ct,\vec{x}) \leftrightarrow x$$

25

2、度规矩阵

度规矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 及其**逆矩阵** $g^{\alpha\beta}$ 定义为

α：行指标

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \triangleq \begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} & \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\end{array}$$

β：列指标

即 $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \triangleq \mathrm{diag}\{-1,+1,+1,+1\}$，其非零元素只有

$$g^{00} = -1,\quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$$

● 对于两个指标的量，总是遵循**“左行右列”**。如$T^{\alpha\beta}$、$T_{\alpha\beta}$、$T^{\alpha}{}_{\beta}$、$T_{\alpha}{}^{\beta}$ 中，诸 α 均表示行指标，而 β 则为列指标。

26

3. Einstein 求和约定

爱因斯坦求和约定：若在同一单项式中，同一字母分别以上指标和下指标的形式各出现一次，则默认要对其求和。

【例】 $X_\alpha Y^\alpha = X_0Y^0 + X_1Y^1 + X_2Y^2 + X_3Y^3 = X_0Y^0 + X_iY^i$

【例】 $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$。其中 δ^α_β 为 **Kronecker 符号**：

$$\delta^\alpha_\beta \triangleq \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

【例】 事件的**协变时空坐标**定义为

$$x_\alpha \triangleq g_{\alpha\beta}x^\beta = (-x^0,x^1,x^2,x^3) = (-ct,\vec{x})$$

$$\Rightarrow\quad x^\alpha = g^{\alpha\beta}x_\beta = (+x^0,x^1,x^2,x^3) = (+ct,\vec{x})$$

27

4. 指标的升降

在相对论中，如果一个量可以由另一量乘以若干度规矩阵或其逆得到，这样的两个经常用同一字母表示，二者的差别通过指标上下位置的不同来体现。定义如下：

$$\begin{cases} \textbf{指标下降：} & g_{\alpha\rho}T^{\cdots\rho\cdots} = T^{\cdots\blacksquare\cdots}{}_{\alpha} \\ \textbf{指标抬升：} & g^{\alpha\rho}T_{\cdots\rho\cdots} = T_{\cdots\blacksquare\cdots}{}^{\alpha} \end{cases}$$

- 由于度规矩阵可逆，这样的变换是可逆的。
- 通过指标升降联系的各量用相同的字母表示，而用指标的位置对各量加以区分。

28

【例】

$$X^\alpha = (a, b, c, d) = g^{\alpha\beta}X_\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad X_\alpha = (-a, b, c, d) = g_{\alpha\beta}X^\beta$$

【例】

$$g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad \boxed{\left(= g^\alpha{}_\beta\right)}$$

【例】

$$g^{\alpha\gamma}\delta^\beta_\gamma = g^{\alpha\beta} \quad \boxed{\left(= \delta^{\alpha\beta} = \delta^{\beta\alpha}\right)}$$

29

【例】 试写出 $T^\alpha{}_\beta$、$T_\alpha{}^\beta$ 和 $T_{\alpha\beta}$。已知

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & * & * & * \\ f & * & * & * \\ g & * & * & * \end{pmatrix} \qquad T^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ -e & * & * & * \\ -f & * & * & * \\ -g & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$T_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} -a & -b & -c & -d \\ e & * & * & * \\ f & * & * & * \\ g & * & * & * \end{pmatrix} \qquad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ -e & * & * & * \\ -f & * & * & * \\ -g & * & * & * \end{pmatrix}$$

30

升降指标法则1

两个多项式之和，同一自由指标可以同时上升或下降

【例】

$$
\begin{aligned}
& T^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} \\
\Leftrightarrow\quad & T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} \\
\Leftrightarrow\quad & T^{\alpha}{}_{\beta} = S^{\alpha}{}_{\beta} \\
\Leftrightarrow\quad & T_{\alpha}{}^{\beta} = S_{\alpha}{}^{\beta}
\end{aligned}
$$

31

升降指标法则2

一对哑指标，上指标下降的同时下指标抬升，不改变单项式：

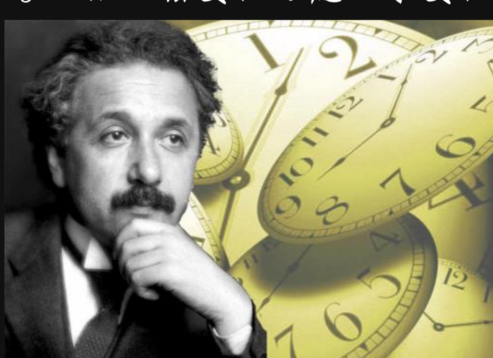
$$T^{\cdots\alpha\cdots}{}_{\cdots\alpha\cdots} = T^{\cdots\blacksquare\cdots}{}_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\cdots\blacksquare\cdots}$$

【例】 $T^{\alpha\beta}S_{\alpha\gamma} = T_{\alpha}{}^{\beta}S^{\alpha}{}_{\gamma}$

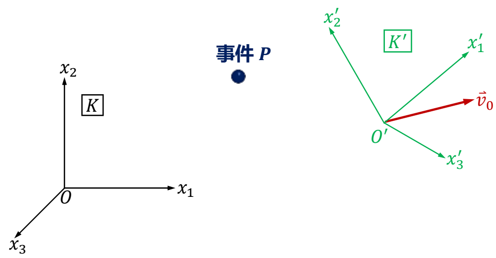
$$
\begin{aligned}
T^{\alpha\beta}S_{\alpha\gamma} &= \left(g^{\alpha\rho}T_{\rho}{}^{\beta}\right)\left(g_{\alpha\sigma}S^{\sigma}{}_{\gamma}\right) \\
&= \left(g^{\alpha\rho}g_{\alpha\sigma}\right)\left(T_{\rho}{}^{\beta}S^{\sigma}{}_{\gamma}\right) \\
&= \delta^{\rho}_{\sigma}T_{\rho}{}^{\beta}S^{\sigma}{}_{\gamma} \\
&= T_{\rho}{}^{\beta}S^{\rho}{}_{\gamma} \\
&= T_{\alpha}{}^{\beta}S^{\alpha}{}_{\gamma}
\end{aligned}
$$

32

§2 洛伦兹变换与庞加莱变换



33



设有两个标架 K 和 K'， K' 相对于 K 以速度 $\vec{v}_0$ 运动。任一给定事件 P 在 K 和 K' 中的时空坐标 x^α 和 x'^α 的关系设为

$$x'^\alpha = f^\alpha(x) = f^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

34

一、线性性

考察两个事件：

$$x^\alpha \leftrightarrow x'^\alpha = f^\alpha(x) \quad 和 \quad y^\alpha \leftrightarrow y'^\alpha = f^\alpha(y)$$

由于时空均匀性，改变 K 系中的时空原点不会改变两事件在 K' 系中的时空位移，即对于任意的 b^α，都有

$$y'^\alpha - x'^\alpha = \boxed{f^\alpha(y) - f^\alpha(x) = f^\alpha(y+b) - f^\alpha(x+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^\beta} = \frac{\partial f^\alpha(x+b)}{\partial x^\beta} = const. \triangleq \Lambda^\alpha{}_\beta$$

其中 $\Lambda^\alpha{}_\beta$ 与时空坐标 x 无关，只可能依赖于相对速度 $\vec{v}_0$。

35

时空均匀性意味着：

一个事件在两个惯性标架中的时空坐标
是通过线性变换联系的

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad \text{where} \;\; \Lambda^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta(\vec{v}_0)$$

- 当 $\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta$ 时，描述时空平移。
- 如果 $a^\alpha = 0$，而

$$\Lambda^i{}_j = k\delta^i_j, \quad \Lambda^0{}_0 = 1, \quad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = 0$$

当常数 $|k| \neq 1$ 时，由变换

$$ct' = ct, \quad \vec{x}' = k\vec{x}$$

所联系的两个标架，其中最多只有一个是惯性标架。

36

二、时空间隔的不变性

若两个事件在标架 K 中的时空坐标分别为 x^α 和 $x^\alpha+\Delta x^\alpha$，则两事件的**时空间隔**定义为

$$\Delta s^2 \triangleq g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta = |\Delta\vec{x}|^2-(c\Delta t)^2$$

- 根据升降指标法则，时空间隔可以表示为

$$\Delta s^2 = g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha\Delta x^\beta = g^{\alpha\beta}\Delta x_\alpha\Delta x_\beta = \Delta x^\alpha\Delta x_\alpha$$

- 同样的两事件在标架 K' 中的时空间隔可以写为

$$\Delta s'^2 = g_{\alpha\beta}\Delta x'^\alpha\Delta x'^\beta = \boxed{g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma}\Delta x^\rho\Delta x^\sigma = \boxed{-M_{\rho\sigma}}\Delta x^\rho\Delta x^\sigma$$

即 $\Delta s'^2$ 是 Δx^α 的二次齐次函数，其中

$$M_{\rho\sigma} \triangleq -g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma = M_{\rho\sigma}(\vec{v}_0),\quad M_{\rho\sigma}=M_{\sigma\rho}$$

37

（1）由光速普适原理，对于任意两个由光信号联系的事件，下面的四个表述是等价的

$$\begin{array}{ccc} \boxed{c\Delta t = \pm|\Delta\vec{x}|} & \longleftrightarrow & \boxed{c\Delta t' = \pm|\Delta\vec{x}'|} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \boxed{\Delta s^2 = 0} & \longleftrightarrow & \boxed{\Delta s'^2 = 0} \end{array}$$

而 $\Delta s'^2$ 作为 $c\Delta t$ 的二次多项式有两个零点 $c\Delta t=\pm|\Delta\vec{x}|$，故

$$\Delta s'^2 = -M_{00}(c\Delta t-|\Delta\vec{x}|)(c\Delta t+|\Delta\vec{x}|)$$

$$\Longrightarrow\quad \Delta s'^2 = M_{00}\Delta s^2$$

38

光速普适原理意味着

任两给定事件在两个惯性标架中的时空间隔满足关系

$$\Delta s'^2 = M_{00}(\vec{v}_0)\Delta s^2$$

（2）由空间的各向同性，M_{00} 只能依赖于 $\vec{v}_0$ 的大小，即

$$\Delta s'^2 = M_{00}(|\vec{v}_0|)\Delta s^2$$

（3）由于 K 相对于 K' 以速度 $-\vec{v}_0$ 运动，显然有

$$\Delta s^2 = M_{00}(|-\vec{v}_0|)\Delta s'^2 = [M_{00}(|\vec{v}_0|)]^2\Delta s^2$$

$$\Longrightarrow\quad M_{00}(|\vec{v}_0|) = \pm 1$$

（4）当 $\vec{v}_0=0$ 时，显然应有 $M_{00}=1$。连续性意味着

$$M_{00}(|\vec{v}_0|) = 1$$

39

不变间隔

【定理】任意两个给定事件的时空间隔与参考系无关

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2$$

- 此结论来自相对论的前两条假设：
  - 时间均匀性、空间均匀性和各向同性；
  - 光速普适原理。
- 时空间隔又称为**不变间隔**。

【思考】若一个粒子在一个惯性参考系里是以低于光速运动的，则在所有其它的惯性参考系里其速度都小于光速。

40

相对论假设与时空间隔的不变性

【定理】使得时空间隔不变的变换必然是线性变换。
即是说，时空间隔不变性与相对论的前两条假设是等价的。

【证明】一般地有 $x' = x'(x)$。由时空间隔的不变性，有

$$\begin{aligned} ds'^2 &= g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \\ &= \boxed{g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}} dx^\rho dx^\sigma \\ &= \boxed{g_{\rho\sigma}} dx^\rho dx^\sigma = ds^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g_{\rho\sigma} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}$$

41

$$0 = \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} = \boxed{g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}} + \boxed{g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\tau \partial x^\sigma}}, \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^\rho} = \boxed{g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\tau} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}} + \boxed{g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}}, \quad (2)$$

$$0 = \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} = \boxed{g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\tau}} + \boxed{g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}}, \quad (3)$$

$(1) + (2) - (3)$ 得到：

$$0 = \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} = 2 g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}$$

42

由于度规矩阵及变换的雅可比矩阵皆可逆，故

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\rho} = 0$$

从而变换是线性的

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha$$

时空假设＋光速普适原理 ↔ 时空间隔不变

43

三、两惯性系之间的一般变换

两惯性系之间的时空坐标由线性变换 $x' = \Lambda x + a$ 相联系，其中的 a 可以是任意 4 常数，而由于时空间隔不变的限制， 4×4 变换矩阵 Λ 必须满足相应的约束：

$$ds'^2 = g_{\alpha\beta}dx'^\alpha dx'^\beta = g_{\rho\sigma}dx^\rho dx^\sigma = ds^2$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma} dx^\rho dx^\sigma = \boxed{g_{\rho\sigma}} dx^\rho dx^\sigma, \quad (\forall dx^\alpha)$$

因此

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

矩阵 Λ 的16个元素中只有6个是独立的。上式写成矩阵形式为

$$\Lambda^T g\Lambda = g$$

44

1. 洛伦兹群

洛伦兹群： $O(3,1) = \{\ 实4\times 4矩阵\Lambda \mid \Lambda^T g\Lambda = g\ \}$

- **庞加莱变换：** $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad \Lambda \in O(3,1), \quad a \in \mathbb{R}^4$
- **洛伦兹变换：** $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta, \quad \Lambda \in O(3,1)$
  - **转动变换：**相对静止、坐标轴方位不同。
  - **推动变换：**相对匀速运动、坐标轴相互平行。
  - **空间反演：**$x'^\alpha = \mathcal{P}^\alpha{}_\beta x^\beta$，其中$\mathcal{P} = \mathrm{diag}\{+1,-1,-1,-1\}$。
  - **时间反演：**$x'^\alpha = \mathcal{T}^\alpha{}_\beta x^\beta$，其中$\mathcal{T} = \mathrm{diag}\{-1,+1,+1,+1\}$。
  - **时空反演：**$x'^\alpha = (\mathcal{PT})^\alpha{}_\beta x^\beta = -x^\alpha$。

45

2. 变换矩阵的性质

洛伦兹变换矩阵的满足如下两个条件：

$$|\det\Lambda| = 1, \quad |\Lambda^0{}_0| \geq 1$$

（1）$\Lambda^T g\Lambda = g$

$$\Rightarrow \quad \det\Lambda^T \cdot \det g \cdot \det\Lambda = \det g \quad \Rightarrow \quad (\det\Lambda)^2 = 1$$

（2）$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

$$\Rightarrow \quad g_{00} = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_0\Lambda^\beta{}_0 = \sum_{i=1}^{3}\left(\Lambda^i{}_0\right)^2 - (\Lambda^0{}_0)^2$$

$$\Rightarrow \quad (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}\left(\Lambda^i{}_0\right)^2 \geq 1$$

- 洛伦兹群可以分解为四个互不相交的子集：

$$O(3,1) = SO(3,1)_c \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

其中 $SO(3,1)_c$ 称为**正规洛伦兹群**（对应正规洛伦兹变换）

$$SO(3,1)_c = \{\Lambda \in O(3,1) \mid \det\Lambda = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq +1\}$$

而

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \{\Lambda \in O(3,1) \mid \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq +1\} = \mathcal{P}\cdot SO(3,1)_c \\ \Sigma_2 = \{\Lambda \in O(3,1) \mid \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1\} = \mathcal{T}\cdot SO(3,1)_c \\ \Sigma_3 = \{\Lambda \in O(3,1) \mid \det\Lambda = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1\} = \mathcal{PT}\cdot SO(3,1)_c \end{cases}$$

【例】试由洛伦兹变换推导协变坐标的变换以及反变换。

【解】洛伦兹变换为 $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$，定义

$$\tilde{\Lambda}_\mu{}^\nu \triangleq g_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\Lambda} = g\Lambda g$$

则协变坐标的变换为 $x'_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\beta x_\beta$。

利用洛伦兹变换有

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\sigma x'^\alpha = g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\sigma\Lambda^\alpha{}_\rho x^\rho = g_{\rho\sigma}x^\rho = x_\sigma$$

$$\Rightarrow \quad x_\sigma = g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\sigma x'^\alpha = \Lambda^\beta{}_\sigma x'_\beta$$

$$\Rightarrow \quad x_\alpha = \Lambda^\beta{}_\alpha x'_\beta$$

$$\Rightarrow \quad x^\alpha = \tilde{\Lambda}_\beta{}^\alpha x'^\beta$$

【思考】洛伦兹群满足的条件有等价的不同数学表示：

$$\Lambda^T g\Lambda = g \quad \leftrightarrow \quad g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

$$\Lambda g\Lambda^T = g \quad \leftrightarrow \quad g^{\rho\sigma}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma = g^{\alpha\beta}$$

$$\tilde{\Lambda}^T g\tilde{\Lambda} = g \quad \leftrightarrow \quad g^{\rho\sigma}\tilde{\Lambda}_\rho{}^\alpha\tilde{\Lambda}_\sigma{}^\beta = g^{\alpha\beta}$$

$$\tilde{\Lambda} g\tilde{\Lambda}^T = g \quad \leftrightarrow \quad g_{\alpha\beta}\tilde{\Lambda}_\rho{}^\alpha\tilde{\Lambda}_\sigma{}^\beta = g_{\rho\sigma}$$

$$\Lambda^T\tilde{\Lambda} = I \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^\gamma{}_\beta\tilde{\Lambda}_\gamma{}^\alpha = \delta^\alpha_\beta$$

$$\Lambda\tilde{\Lambda}^T = I \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^\alpha{}_\gamma\tilde{\Lambda}_\beta{}^\gamma = \delta^\alpha_\beta$$

49

四、正规洛伦兹变换

考察如下洛伦兹矩阵 $\Lambda^\alpha{}_\beta$ 所定义的**无穷小（正规）洛伦兹变换**

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + \Omega^\alpha{}_\beta, \quad (|\Omega^\alpha{}_\beta| \ll 1)$$

其中的无穷小参数 $\Omega^\alpha{}_\beta$ 应满足如下约束：

$$0 = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu - g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\left(\delta^\alpha_\mu + \Omega^\alpha{}_\mu\right)\left(\delta^\beta_\nu + \Omega^\beta{}_\nu\right) - g_{\mu\nu}$$

$$= g_{\alpha\beta}\delta^\alpha_\mu\Omega^\beta{}_\nu + g_{\alpha\beta}\delta^\beta_\nu\Omega^\alpha{}_\mu = g_{\mu\beta}\Omega^\beta{}_\nu + g_{\alpha\nu}\Omega^\alpha{}_\mu$$

即是要求

$$\Omega^T = -g\Omega g \quad \leftrightarrow \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

其中

$$\omega \triangleq g\Omega \quad \leftrightarrow \quad \omega_{\mu\nu} \triangleq g_{\mu\beta}\Omega^\beta{}_\nu$$

50

1. 无穷小洛伦兹变换

无穷小洛伦兹变换依赖于六个任意参数，变换矩阵可写为

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + \Omega^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta}, \quad (\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu})$$

- 可将矩阵 $\omega_{\mu\nu}$ 写为

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\xi} \\ -\vec{\xi} & \overleftrightarrow{\theta} \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & 0 & \theta n_3 & -\theta n_2 \\ -\xi_2 & -\theta n_3 & 0 & \theta n_1 \\ -\xi_3 & \theta n_2 & -\theta n_1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

其中 $\hat{n}$ 为单位矢量，而 $\theta_{ij} = \theta\varepsilon_{ijk}n_k = \varepsilon_{ijk}\theta_k$，即有

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \vec{\theta} = \theta\hat{n} = (\theta n_1, \theta n_2, \theta n_3)$$

51

- 由 $\Omega^\alpha{}_\beta$ 定义的无穷小洛伦兹变换为

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta = (\delta^\alpha_\beta + \Omega^\alpha{}_\beta)x^\beta = x^\alpha + \Omega^\alpha{}_\beta x^\beta$$

因此

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\xi} \\ -\vec{\xi} & \overleftrightarrow{\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\vec{\xi}\cdot\vec{x} \\ -\vec{\xi}ct + \overleftrightarrow{\theta}\cdot\vec{x} \end{pmatrix}$$

即无穷小洛伦兹变换可以用三维矢量表示为

$$\begin{cases} ct' = ct - \vec{\xi}\cdot\vec{x} \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{\xi}ct - \theta\hat{n}\times\vec{x} \end{cases}$$

52

无穷小转动

若 $\vec{\xi} = 0$，则无穷小洛伦兹变换写为了

$$ct' = ct, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \theta\hat{n}\times\vec{x}$$

该变换表示绕着 $\hat{n}$ 轴的无穷小转动（转角为 θ）

- 绕着 x_1 轴的无穷小转动为（$t' = t$、$x_1' = x_1$）

$$x_2' = x_2 + \theta x_3, \quad x_3' = x_3 - \theta x_2$$

相应的 2×2 无穷小变换矩阵为

$$\Omega = \theta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

53

无穷小推动

若 $\theta = 0$，则无穷小洛伦兹变换写为了

$$ct' = ct - \vec{\xi}\cdot\vec{x}, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{\xi}ct$$

该变换表示沿着 $\vec{\xi}$ 方向的无穷小推动（速度为 $v_0 = c\xi$）

这是由于 K' 系中一个静止的粒子（$d\vec{x}' = 0 = d\vec{x} - \vec{\xi}cdt$），其在 K 系中的速度为 $\vec{v} = d\vec{x}/dt = c\vec{\xi} = \vec{v}_0$。

- 沿着 x_1 轴的无穷小推动为（$x_2' = x_2$、$x_3' = x_3$）

$$ct' = ct - \xi x_1, \quad x_1' = x_1 - \xi ct$$

相应的 2×2 无穷小变换矩阵为

$$\Omega = \xi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

54

2. 有限正规洛伦兹变换

在无穷小变换中令

$$\Omega \longrightarrow \frac{1}{N}\Omega = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 0 & -\vec{\xi} \\ -\vec{\xi} & \overleftrightarrow{\theta} \end{pmatrix}$$

其中，$\vec{\theta}$ 和 $\vec{\xi}$ 有限，而 $N \longrightarrow \infty$。无限多无穷小洛伦兹变换的组合将给出有限的洛伦兹变换，其变换矩阵为：

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty}\left(I + \frac{\Omega}{N}\right)^N$$

- 正规洛伦兹群的元素可以写为

$$\Lambda = e^{\Omega} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega^n}{n!} = I + \Omega + \frac{\Omega^2}{2!} + \frac{\Omega^3}{3!} + \cdots$$

【思考】证明 $\Lambda^T g \Lambda = g$

55

Cayley-Hamilton定理

对于 4×4 方阵 Ω，有

$$e^{\Omega} = \alpha_0 I + \alpha_1\Omega + \alpha_2\Omega^2 + \alpha_3\Omega^3$$

- 为确定诸 α_k，定义

$$f(x) = e^x, \quad R(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

- 设 λ_i 是 Ω 的本征值，则 α_k 可由如下四个代数方程确定

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i), \quad (i = 1,2,3,4)$$

  - 若 λ_i 是 n 重简并的，则相应的 n 个代数方程替换为

$$f^{(m)}(\lambda_i) = R^{(m)}(\lambda_i), \quad (m = 0,1,\cdots,n-1)$$

56

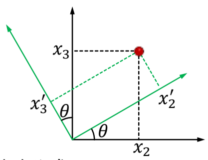
有限转动

绕着 x_1 轴转动的 2×2 变换矩阵 Λ（作用于x_2, x_3）：

$$\Omega = \theta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \Lambda = e^{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

相应的变换为（$t' = t$、$x_1' = x_1$）

$$\begin{cases} x_2' = x_2\cos\theta + x_3\sin\theta \\ x_3' = x_3\cos\theta - x_2\sin\theta \end{cases}$$



由此可得（与坐标系无关）绕 $\hat{n}$ 轴的转动公式（$t' = t$）

$$\vec{x}' = \vec{x}\cos\theta + \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{x})(1-\cos\theta) - \hat{n}\times\vec{x}\sin\theta, \quad \left(x'^i = R^i{}_j x^j\right)$$

57

有限推动

沿着 x_1 轴推动的 2×2 变换矩阵为

$$\Omega = \xi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;\Longrightarrow\; \Lambda = e^{\Omega} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix}$$

相应的变换为（$x_2' = x_2$、$x_3' = x_3$）

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\xi - x_1\sinh\xi \\ x_1' = x_1\cosh\xi - ct\sinh\xi \end{cases}$$

静止于 K' 系中的粒子，其在 K 系中的速度 $v_0 = dx_1/dt$ 满足

$$\beta_0 \triangleq \frac{v_0}{c} = \tanh\xi \;\Longrightarrow\; \xi = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}$$

通常将 ξ 称为**快度**。

58

- 定义洛伦兹因子

$$\gamma_0 \triangleq \cosh\xi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \;\Longrightarrow\; \beta_0\gamma_0 = \sinh\xi$$

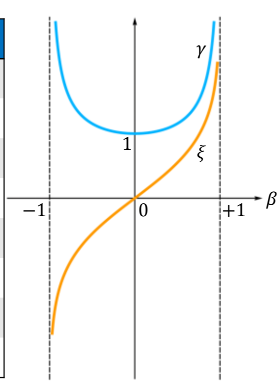
$$\Longrightarrow\; \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 \\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

- 利用 γ_0 由此，沿着 x_1 轴的推动可以表示为

$$\begin{cases} ct' = \gamma_0(ct - \beta_0 x_1) \\ x_1' = \gamma_0(x_1 - \beta_0 ct) \\ x_{2,3}' = x_{2,3} \end{cases} \;\Longleftrightarrow\; \begin{cases} ct = \gamma_0(ct' + \beta_0 x_1') \\ x_1 = \gamma_0(x_1' + \beta_0 ct') \\ x_{2,3} = x_{2,3}' \end{cases}$$

59

β	γ	ξ
0.5	1.155	0.549
0.9	2.294	1.472
0.99	7.089	2.647
$1-10^{-3}$	22.366	3.800
$1-10^{-4}$	70.712	4.952
$1-10^{-5}$	223.607	6.103
$1-10^{-6}$	707.107	7.254
$1-10^{-10}$	70710.7	11.860



60

惯性参考系的相对速度

- 洛伦兹变换是任一给定事件在两个惯性系中的时空坐标之间的关系。由于坐标必须是实数，因而惯性系之间的相对速度就不可能超过光速 c，否则 γ_0 将成为虚数。
- 惯性系之间的相对速度也不应等于光速 c，否则，$\Delta s^2 \neq 0$ 的任意两事件的时间间隔和空间间隔都将趋于无穷。

一惯性观测者相对于另一惯性观测者的速度必小于光速 c。

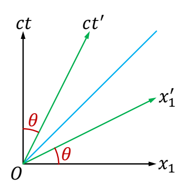
3. 推动的几何意义

考察沿着 x_1 轴的推动：

$$ct' = \gamma_0(ct - \beta_0 x_1), \quad x_1' = \gamma_0(x_1 - \beta_0 ct)$$

坐标轴

$$ct'\text{轴} = \{(ct', x_1') \mid x_1' = 0\}$$
$$= \{(ct, x_1) \mid x_1 = \beta_0 ct\}$$
$$x_1'\text{轴} = \{(ct', x_1') \mid ct' = 0\}$$
$$= \{(ct, x_1) \mid ct = \beta_0 x_1\}$$



$\tan\theta = \beta_0$

标度

- 发生于 ct' 轴上的某事件 A，其在 K' 中的坐标设为 $(ct', 0)$，事件 A 点在标架 K 中的坐标为

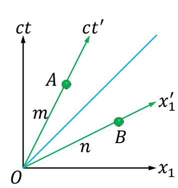
$$ct = \gamma_0 ct', \quad x_1 = \beta_0\gamma_0 ct'$$

故线段 OA 在标架 K' 中的长度为 ct'。而在标架 K 中其长度则为

$$m = ct'\sqrt{\gamma_0^2 + (\beta_0\gamma_0)^2} = \frac{\gamma_0}{\cos\theta} ct'$$

- 类似地，发生于 x_1' 轴上的某事件 B，若线段 OB 在标架 K' 中的长度为 x_1'，则其在标架 K 中的长度则为

$$n = \frac{\gamma_0}{\cos\theta} x_1'$$



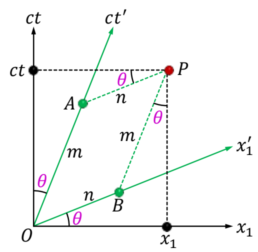
$$\begin{cases} ct' = m\cos\theta/\gamma_0 \\ x_1' = n\cos\theta/\gamma_0 \end{cases}$$

推动的几何意义

变换的线性性意味着：在标架 K 中

与 ct' 轴平行的世界线上的诸事件在 K' 系中同地发生。

与 x_1' 轴平行的世界线上的诸事件在 K' 系中同时发生。



$$\begin{cases} ct' = m\cos\theta/\gamma_0 \\ x_1' = n\cos\theta/\gamma_0 \end{cases}$$

$$\tan\theta = \beta_0$$

64

闵可夫斯基空间

闵可夫斯基空间

（Minkowski，1908）

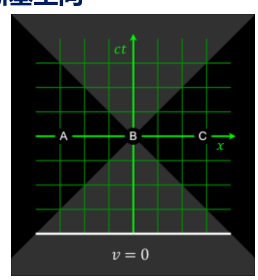
从今以后，

单独的空间和单独的时间

注定逐渐消失而仅仅成为影子，

这两者的融合

将留存而成为一种独立的实在。



时空又称为**闵可夫斯基空间**。它是一个伪欧几里德空间。欧几里德空间中任两不同点之间的距离恒正，而闵可夫斯基空间两不同点之间的“距离” $\sqrt{ds^2}$ 可以为正数，也可以是零甚至虚数。

65

4. 一般洛伦兹变换

与坐标系选择无关的洛伦兹变换可表示为

$$ct' = \gamma_0\left(ct - \vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right),\quad \vec{x}_\parallel' = \gamma_0\left(\vec{x}_\parallel - \vec{\beta}_0 ct\right),\quad \vec{x}_\perp' = \vec{x}_\perp$$

其中，$\vec{x}_\parallel$ 和 $\vec{x}_\perp$ 分别表示 $\vec{x}$ 的平行和垂直于 $\vec{\beta}_0$ 的分量。

- 这样的变换不仅描述推动，而且也描述转动。
- 由于 $\vec{x}' = \vec{x}_\parallel' + \vec{x}_\perp' = \vec{x} + (\gamma_0 - 1)\vec{x}_\parallel - \gamma_0\vec{\beta}_0 ct$

$$= \vec{x} + (\gamma_0 - 1)\frac{\left(\vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}_0}{\beta_0^2} - \gamma_0\vec{\beta}_0 ct$$

因而，与坐标系选择无关的一般洛伦兹变换可表示为

$$ct' = \gamma_0\left(ct - \vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right),\quad \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0 + 1}\left(\vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}_0 - \gamma_0\vec{\beta}_0 ct$$

66

变换的系数矩阵

设两系均取直角坐标系。

- 若标架 K' 相对于 K 以速度 $\vec{v}_0$ 运动，且两标架的空间坐标轴对应平行，则洛伦兹变换 $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$ 为推动，变换系数为

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0 = \gamma_0 \\ \Lambda^0{}_j = -\gamma_0 \beta_{0j} \\ \Lambda^i{}_0 = -\gamma_0 \beta_0^i \\ \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \dfrac{\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\beta_0^i \beta_{0j} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\gamma_0 \vec{\beta}_0 \\ -\gamma_0 \vec{\beta}_0 & \overleftrightarrow{I} + \dfrac{\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\vec{\beta}_0\vec{\beta}_0 \end{pmatrix}$$

【思考】请检验条件 $\Lambda^T g \Lambda = g$ 确实成立。

67

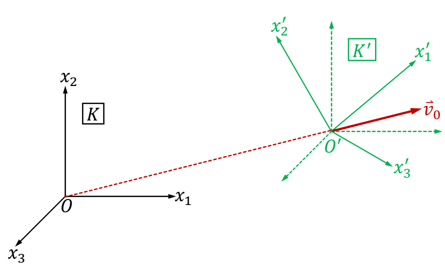
- 若标架 K' 相对于 K 静止，只是空间坐标轴方位发生了转动，则洛伦兹变换 $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$ 为转动，变换系数矩阵为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad \text{where } R^T R = I$$

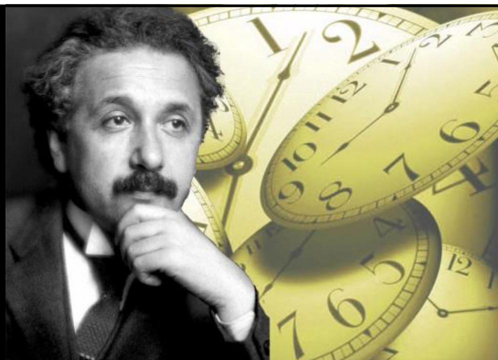
- 一般变换即有转动又有推动。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\gamma_0 \vec{\beta}_0 \\ -\gamma_0 \vec{\beta}_0 & \overleftrightarrow{I} + (\gamma_0 - 1)\hat{\beta}_0\hat{\beta}_0 \end{pmatrix}$$

68



69



谢谢