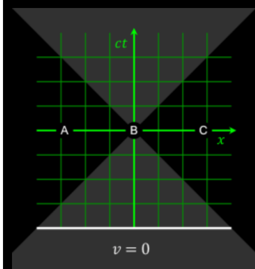
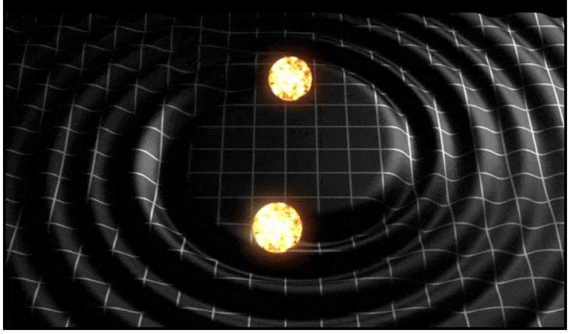
CH3. 狭义相对论

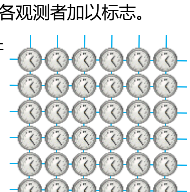


§1 时空性质与爱因斯坦假设



一、惯性观测者

- **时空**：所有事件的集合构成的四维连续体。
  - 每个事件对应某个时刻的某个空间点。
- **假设**：存在一系列惯性观察者。
  - 不同的惯性观测者之间相对作匀速运动。
  - 可依据相对于某个参考观测者的速度对各观测者加以标志。
- 某个**惯性观测者**是一个能用来记录事件发生的时间和地点的信息采集系统。
  - 这些时钟彼此之间相对静止。
  - 时钟是同步的、校准的
  - 时钟的空间关系由欧几里得几何描述。

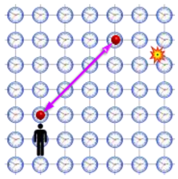


3

1. 如何测量?

- 惯性观测者以时空相重点记录事件发生的时间和地点。
- 惯性观测者以同时记录的首尾相重点的距离定义（静止或运动）尺子的长度

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$



4

2. 时空性质

对于任一特定的惯性观测者，
时间是均匀的，空间是均匀的、各向同性的。

- 对于任意给定的两个事件，它们在某个惯性参考系中所测的时间间隔和空间距离，
  与该参考系的时空原点的选取、空间坐标轴的取向无关，
  也与其它惯性参考系的时空原点及空间坐标轴的取向无关。
  - 静止尺子的长度与其方位以及何时、何地测量无关
  - 静止时钟的走时与其方位以及何时、何地测量无关
  - 匀速运动尺子的长度与何时、何地测量无关
  - 匀速运动时钟的走时均匀，与何时、何地测量无关

5

3. 惯性标架

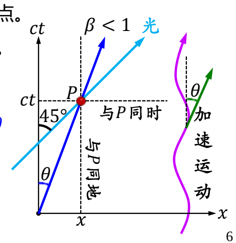
对于某个惯性观测者，选定了时间原点、空间原点以及坐标轴的方位后，就定义了一个**惯性标架**，而任一事件就可以用唯一的一组时空坐标加以标志

$$(ct, \vec{x}) = (ct, x, y, z)$$

- 一个事件对应惯性标架中的一个点。
- 点或事件的一维集合称为**世界线**。
- 世界线在其上某点的切线斜率

$$k = \frac{d(ct)}{dx} = \frac{1}{\beta}, \quad \beta \triangleq \frac{v}{c} = \tan\theta$$

  - 世界线越陡，运动越慢；
  - 光的世界线是 45° 线。



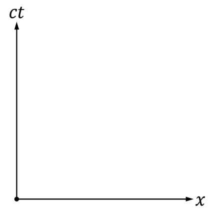
6

时间轴

ct 轴是 K 系中发生于空间原点处的事件集合。

ct 轴是 K 系中静止空间原点处的时钟的世界线。

- 平行于时间轴的世界线
  是 K 系中同地发生事件的集合，
  是 K 系中静止时钟的世界线。

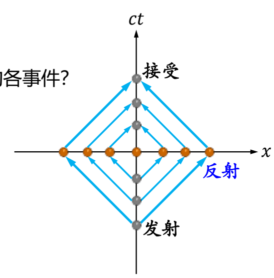


空间轴

x 轴是 K 系中同时发生于 $t = 0$ 时刻的事件集合。

- 平行于 x 轴的世界线是 K 系中同时发生的事件集合。

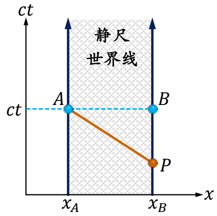
【问题】如何找出 x 轴上的各事件?



尺子长度的测量

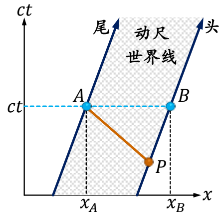
以同时记录的首尾相重点的距离定义尺子的长度 Δl

静尺的长度



$$\Delta l = |\Delta x_{AB}| = |x_A - x_B|$$
$$= |\Delta x_{AP}| = |x_A - x_P|$$

动尺的长度



$$\Delta l = |\Delta x_{AB}| = |x_A - x_B|$$
$$\neq |\Delta x_{AP}| = |x_A - x_P|$$

二、牛顿的时空结构

- Absolute, true, and mathematical **time**, from its own nature, passes equally without relation to anything external, and thus without reference to any change or way of measuring of time.
- Absolute, true, and mathematical **space** remains similar and immovable without relation to anything external. Relative spaces are measures of absolute space defined with reference to some system of bodies or another, and thus a relative space may, and likely will, be in motion.
- The **place** of a body is the space which it occupies, and may be absolute or relative according to whether the space is absolute or relative.
- Absolute **motion** is the translation of a body from one absolute place to another; relative motion the translation from one relative place to another.

"… instead of absolute places and motions, we use relative ones."

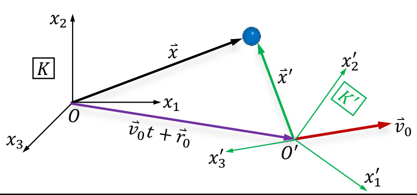
10

1. 伽利略变换

牛顿的时空结构可用**伽利略变换**描述（其中$\lambda \in O(3)$）：

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_0 t - \vec{r}_0 \\ t' = t - t_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i' = \lambda_{ij} x_j - v_{0i} t - x_{0i} \\ t' = t - t_0 \end{cases}$$

这里 $(t, \vec{x})$ 和 $(t', \vec{x}')$ 是任一给定事件分别在惯性标架 K 和 K' 中的时空坐标，K' 相对于 K 系以 $\vec{v}_0$ 匀速运动。



11

相对与绝对

- 事件发生的时刻、地点是相对的
- **两事件之间的时间间隔是绝对的**

  $\Delta t = \Delta t'$

  ➢ 同时性是绝对的：

  $t_2 = t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_2' = t_1'$
- **两同时事件之间的空间间隔是绝对的**

  $|\Delta \vec{x}| = |\Delta \vec{x}'|$
- 速度是相对的（**伽利略速度合成法则**）

  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ or $\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$
- 加速度是绝对的：$\vec{a} = \vec{a}'$

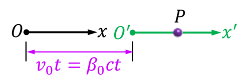
$$\begin{cases} \Delta \vec{x}' = \Delta \vec{x} - \vec{v}_0 \Delta t \\ \boxed{\Delta t' = \Delta t} \end{cases}$$

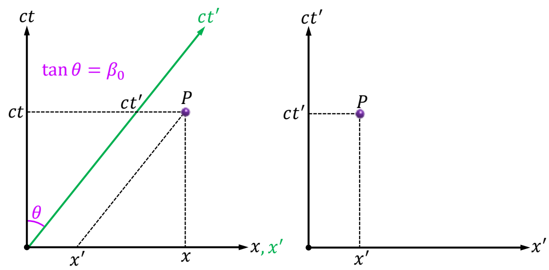
$$\begin{cases} \Delta \vec{x}' = \Delta \vec{x} - \boxed{\vec{v}_0 \Delta t} \\ \Delta t' = \Delta t = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta \vec{x}'}{\Delta t'} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} - \vec{v}_0$$

12

$$\begin{cases} x' = x - v_0 t \\ t' = t \end{cases}$$





2. 伽利略相对性原理

- 在不同的惯性系中，力学定律具有相同的形式，或者说，所有惯性观测者都是等价的，这就是**伽利略相对性原理**。
- 牛顿力学的动力学方程是惯性参考系中写出的。在某个惯性参考系 K 中，粒子的运动由牛顿第二定律决定

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad F_i = ma_i$$

- 假设：力不依赖于惯性参考系的选取，即 $\vec{F}' = \vec{F}$。
  - 牛顿第二定律在 K' 系中表示为：$\vec{F}' = m\vec{a}'$

    粒子的力学定律在伽利略变换下是**不变**的。
  - 牛顿第二定律在 K' 系中写为分量形式：$F_i' = ma_i'$

    粒子的力学定律在伽利略变换下是**协变**的。

粒子动力学的裂缝

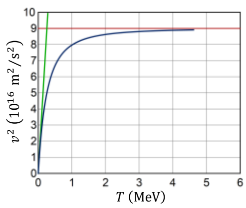
- 根据牛顿方程，物体的速度原则上没有上限。若物体由于受到恒力而以恒定加速度 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 从静止开始运动，1年后，其速度约为 $3\times10^8\ \mathrm{m/s}$，2年后速度将达到 $6\times10^8\ \mathrm{m/s}$。
- 不只限于牛顿力学，我们仍然有线动量守恒定律：只要外力的影响可以忽略，那么相互作用物体的动量之和是常数。

  Newton：动量定义为粒子的惯性质量（恒量）与速度乘积。
- 不只限于牛顿力学，我们也有能量守恒原理：能量可以相互转化，但自然界的总能量为常数。

  Newton：动能定义为动量平方除两倍的粒子质量。

- 动能定理提供了一个检验牛顿力学是否普遍适用的手段：动能一方面可以通过能量守恒由外界提供的能量得到，另一方面，粒子速度是可以独立测量的，从而也就有了另一种得到动能的方法。按照牛顿力学

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \quad \Longrightarrow \quad v^2 \propto T$$



- 实验结果显示：当粒子能量持续增加时，其速度将趋于一个确定的值（c）。随着物体速度的增加，对牛顿力学的偏离也将显著增大。

16

3. 波动

考察一维波动方程（K 系）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(t,z)=0$$

若 K' 系相对于 K 系以速度 $\vec{v}_0=v_0\hat{z}$ 运动，不妨令

$$z'=z-v_0t,\quad t'=t$$

若设场 $\varphi(t,z)$ 用 K' 系中的坐标表示为 $\varphi'(t',z')$，则 K' 系中波动方程变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial t'}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial t'}+\dfrac{\partial z'}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial z'}=\dfrac{\partial}{\partial z'}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial t'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t'}+\dfrac{\partial z'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial z'}=\dfrac{\partial}{\partial t'}-v_0\dfrac{\partial}{\partial z'}\end{cases}$$

$$\left[\left(1-\frac{v_0^2}{v^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+\frac{2v_0}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial z'}\right]\varphi'(t',z')=0$$

波动方程的形式在伽利略变换下并非是不变的。

17

- 显然，$\varphi(t,z)=f(z-vt)$ 是 K 系中波动方程的一个解，该解在 K' 系中表示为

$$\varphi'(t',z')=f\big((z'+v_0t)-vt'\big)=f\big(z'-(v-v_0)t'\big)$$

  - 不难验证 $\varphi'(t',z')$ 确实满足 K' 系中的波动方程。
  - 在 K' 系中波的传播速度为 $v-v_0$。
  - 若 $v_0=v$，则 K' 系根本没有波的传播。

（1）伽利略变换并不能保持波动方程的形式不变。

（2）机械波的传播离不开介质的存在，通常所说波速是与介质质心保持相对静止的观测者测量的波速。

（3）机械波相对于传播媒介的速度与波源的运动无关。

18

三、寻找以太

- 作为麦克斯韦方程组的直接推论，自由空间中的电磁场满足波动方程，电磁波在真空中传播的速度为真空光速 c。
  - 前面的讨论意味着：电磁场的波动方程以及麦克斯韦方程组在伽利略变换下并非不变的。
- 19世纪的很多物理学家认为：光是在某种称为“以太”的媒介中传播的横向扰动，而其传播速度 c 也是相对于以太这一特殊参考系的：
  - 伽利略相对性原理适用于经典力学，
    而电磁理论则只在相对于以太静止的参考系中才成立。
  - 很难理解光速为什么会如此之大。
  - 关于光传播媒介的唯一线索是 c 本身的测量值。

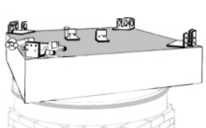
19

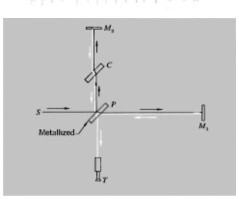
- 1861年，麦克斯韦提出了光的电磁理论：根据可测量的电学和磁学性质，可以预测任何给定介质的光速数值。自此，尽管以太仍然很神秘，但它和普通物质之间的鸿沟消失了，而以太理论似乎是一个无法否认的现实。
- 如果以太存在，“光速”是什么意思就很清楚了。这种速度的大小可能是波长的函数，但至少在各向同性介质中是唯一确定的。特别是，光通过介质的速度应该与光源的任何运动完全无关，这与粒子发射机制形成直接对比。

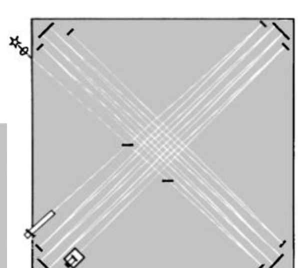
Frequency, sec^{-1}	*Photon energy*, *eV*	*Wavelength*, *m*	*Speed (with error)*, $\times 10^8 m/sec$
4.7×10^7	1.9×10^{-7}	6.4	2.9978 ± 0.0003
1.7×10^8	7.0×10^{-7}	1.8	2.99795 ± 0.00003
3.0×10^8	1.2×10^{-6}	1.0	2.99792 ± 0.00002
3.0×10^9	1.2×10^{-5}	1.0×10^{-1}	2.99792 ± 0.00009
2.4×10^{10}	1.0×10^{-4}	1.2×10^{-2}	2.997928 ± 0.000003
7.2×10^{10}	3.0×10^{-4}	4.2×10^{-3}	2.997925 ± 0.000001
5.4×10^{14}	2.2	5.6×10^{-7}	2.997931 ± 0.000003
1.2×10^{20}	5.1×10^5	2.5×10^{-12}	2.983 ± 0.015
4.1×10^{22}	1.7×10^8	7.3×10^{-15}	2.97 ± 0.03

20

Michelson–Morley 实验







21

Observer; year	*l, cm.*	δ_{calc}	δ_{obs} *(upper limit)*	*Ratio*
Michelson; 1881	120	0.04	0.02	2
Michelson and Morley; 1887	1100	0.40	0.01	40
Morley and Miller; 1902–1904	3220	1.13	0.015	80
Miller, 1921	3220	1.12	0.08	15
Miller; 1923–1924	3220	1.12	0.03	40
Miller (sunlight); 1924	3220	1.12	0.014	80
Tomaschek (starlight); 1924	860	0.3	0.02	15
Miller; 1925–1926	3200	1.12	0.08	13
Kennedy; 1926	200	0.07	0.002	35
Illingworth; 1927	200	0.07	0.0004	175
Piccard and Stahel; 1927	280	0.13	0.006	20
Michelson et al; 1929	2590	0.9	0.01	90
Joos; 1930	2100	0.75	0.002	375

Michelson–Morley 实验意味着地球相对于以太并没有运动。

22

Einstein 面对的几种选择

1. Maxwell方程组是错误的，正确的电磁理论在伽利略变换下是不变的？
   - 几乎不可能！（Hertz等人）
2. 伽利略变换只适用于经典力学，而电磁理论则有一个从优参考系（其中以太是静止的）？
   - 当时大多数物理学家的观点。（Lorentz收缩、Fizeau实验）
3. 存在一种更为一般的坐标变换或者说相对性原理，它对于经典力学和电磁理论都同样是适用的？
   - 需要修改经典力学定律（对大多数人来说太过激进）
   - 需要找到一个相对性原理，或者说需要找到不同坐标系之间的一个合适的联系方式。

23

四、相对论假设

（0）时空假设

空间是均匀的、各向同性的，时间是均匀的。

（1）光速普适原理

真空中的光速对于所有观测者都具相同的数值。

$$c = 299792458\ \mathrm{m/s} \approx 3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

(与光源的运动无关)

（2）相对性原理

物理定律在所有惯性系中都具有形同的形式。

(所有惯性系都是等价的)

24

1. 4–位矢

- 事件的**四维位矢**（或者**逆变时空坐标**）定义为

$$x^\alpha \triangleq \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \triangleq (ct, x_1, x_2, x_3)$$

  - 约定 $\underbrace{\boxed{i, j, k, \cdots \in \{1,2,3\}}}_{\text{空间指标}}$，$\underbrace{\boxed{\alpha, \beta, \gamma, \cdots \in \{0,1,2,3\}}}_{\text{时空指标}}$
  - 简写 $x^i \triangleq \left(x^1, x^2, x^3\right) \leftrightarrow \vec{x}$， $x^\alpha \triangleq (ct, \vec{x}) \leftrightarrow x$
  - x^α 的数值不仅与该事件本身有关，还取决于 ① 时空原点、② 坐标轴方向以及 ③ 惯性观测者的选择。
- 一个点 A 相对于另一点 B 的**时空位移**为

$$\Delta x^\alpha \triangleq x^\alpha(A) - x^\alpha(B) = x_A^\alpha - x_B^\alpha = (c\Delta t, \Delta\vec{x})$$

  - Δx^α 的数值取决于坐标轴方向以及惯性观测者的选择。

25

2、度规矩阵

- **度规矩阵**

α :行指标

$$g = \left(g_{\alpha\beta}\right) \triangleq \mathrm{diag}\{-1, +1, +1, +1\} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

β:列指标

  - 非零元素有：$g_{00} = -1$，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$
  - 度规矩阵 g 的逆矩阵记为 $g^{-1} = \left(g^{\alpha\beta}\right) = g$。
- 对于两个指标的量，总是遵循“左行右列”。

$T^{\alpha\beta}$，$T_{\alpha\beta}$，$T^{\alpha}{}_{\beta}$，$T_{\alpha}{}^{\beta}$：诸 α 均为行指标，诸 β 均为列指标。

26

3. Einstein 求和约定

爱因斯坦求和约定：若在同一单项式中，同一字母分别以上指标和下指标的形式各出现一次，则默认要对其求和。

【例】$X_\alpha Y^\alpha = X_0 Y^0 + X_1 Y^1 + X_2 Y^2 + X_3 Y^3 = X_0 Y^0 + X_i Y^i$

【例】$g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$。其中 δ_β^α 为 **Kronecker 符号**：

$$\delta_\beta^\alpha \triangleq \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

【例】事件的**协变时空坐标**定义为

$$x_\alpha \triangleq g_{\alpha\beta} x^\beta = \left(-x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (-ct, \vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta = \left(+x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (+ct, \vec{x})$$

27

4. 指标的升降

如果一个量可以由另一量乘以若干度规矩阵或其逆得到，那么，在相对论中经常用同一字母表示这两个量，二者的差别通过指标上下位置的不同来体现。定义如下：

指标下降： $g_{\alpha\rho}T^{\cdots\rho\cdots} = T^{\cdots}{}_{\alpha}{}^{\cdots}$

指标抬升： $g^{\alpha\rho}T_{\cdots\rho\cdots} = T_{\cdots}{}^{\alpha}{}_{\cdots}$

- 由于度规矩阵可逆，这样的变换是可逆的。
- 通过指标升降联系的各量用相同的字母表示，而用指标的位置对各量加以区分。

28

【例】

$$X^{\alpha} = (+a, b, c, d) = g^{\alpha\beta}X_{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad X_{\alpha} = (-a, b, c, d) = g_{\alpha\beta}X^{\beta}$$

【例】

$$g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \boxed{= g^{\alpha}{}_{\beta}}$$

【例】

$$g^{\alpha\gamma}\delta^{\beta}_{\gamma} = g^{\alpha\beta} \boxed{= \delta^{\alpha\beta} = \delta^{\beta\alpha}}$$

29

【例】 试由 $T^{\alpha\beta}$ 写出 $T^{\alpha}{}_{\beta}$、$T_{\alpha}{}^{\beta}$ 和 $T_{\alpha\beta}$。已知

$$T = (T^{\alpha\beta}) = \left(\begin{array}{c|ccc} \varphi & p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline q_1 & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ q_2 & t_{21} & t_{22} & t_{33} \\ q_3 & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right)$$

注： 常将上式简写为

$$T = (T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \varphi & \vec{p} \\ \vec{q} & \overleftrightarrow{t} \end{pmatrix}$$

30

【解】

$$\begin{cases} T^{\alpha}{}_{\beta} = \boxed{g_{\beta\gamma}T^{\alpha\gamma}} = (Tg)^{\alpha}{}_{\beta} & \Longrightarrow \quad (T^{\alpha}{}_{\beta}) = \begin{pmatrix} -\varphi & \vec{p} \\ -\vec{q} & \overleftrightarrow{t} \end{pmatrix} \\ T_{\alpha}{}^{\beta} = g_{\alpha\gamma}T^{\gamma\beta} = (gT)_{\alpha}{}^{\beta} & \Longrightarrow \quad (T_{\alpha}{}^{\beta}) = \begin{pmatrix} -\varphi & -\vec{p} \\ \vec{q} & \overleftrightarrow{t} \end{pmatrix} \\ T_{\alpha\beta} = \boxed{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\mu\nu}} = (gTg)_{\alpha\beta} & \Longrightarrow \quad (T_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \varphi & -\vec{p} \\ -\vec{q} & \overleftrightarrow{t} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$T^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}$

$g_{\alpha\mu}T^{\mu\nu}g_{\nu\beta}$

$$T = (T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \varphi & \vec{p} \\ \vec{q} & \overleftrightarrow{t} \end{pmatrix}$$

31

升降指标法则1

表达式中两个相同的自由指标可以同时上升或下降

【例】

$$\begin{aligned} & T^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} \\ \Leftrightarrow \quad & T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} \\ \Leftrightarrow \quad & T^{\alpha}{}_{\beta} = S^{\alpha}{}_{\beta} \\ \Leftrightarrow \quad & T_{\alpha}{}^{\beta} = S_{\alpha}{}^{\beta} \end{aligned}$$

32

升降指标法则2

单项式中的一对哑指标，可调换二者的上下位置

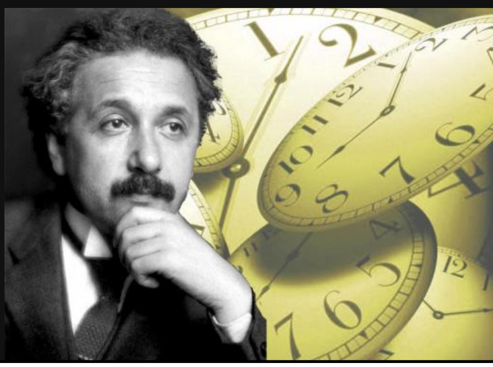
$$T^{\cdots\,\alpha\,\cdots}{}_{\cdots\,\alpha\,\cdots} = T^{\cdots}{}_{\alpha}{}^{\cdots}{}_{\cdots}{}^{\alpha}{}_{\cdots}$$

【例】$T^{\alpha\beta}S_{\alpha\gamma} = T_{\alpha}{}^{\beta}S^{\alpha}{}_{\gamma}$

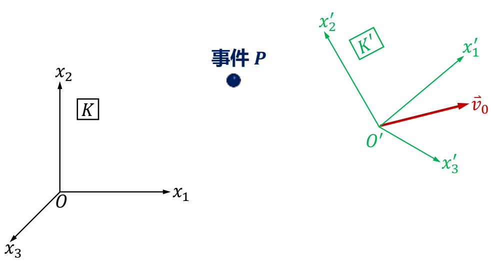
$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}S_{\alpha\gamma} &= \left(g^{\alpha\rho}T_{\rho}{}^{\beta}\right)\left(g_{\alpha\sigma}S^{\sigma}{}_{\gamma}\right) \\ &= \left(g^{\alpha\rho}g_{\alpha\sigma}\right)\left(T_{\rho}{}^{\beta}S^{\sigma}{}_{\gamma}\right) \\ &= \delta^{\rho}_{\sigma}T_{\rho}{}^{\beta}S^{\sigma}{}_{\gamma} \\ &= T_{\rho}{}^{\beta}S^{\rho}{}_{\gamma} \\ &= T_{\alpha}{}^{\beta}S^{\alpha}{}_{\gamma} \end{aligned}$$

33

§2 时空间隔与洛伦兹变换



34



设有两个惯性标架 K 和 K'， K' 相对于 K 以速度 $\vec{v}_0$ 运动。任一给定事件 P 在 K 和 K' 中的时空坐标 x^α 和 x'^α 的关系设为

$$x'^\alpha = f^\alpha(x) = f^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$$ 实的、可逆函数

35

一、线性性

考察两个任意给定的事件：

$$x^\alpha \leftrightarrow x'^\alpha = f^\alpha(x) \quad 和 \quad y^\alpha \leftrightarrow y'^\alpha = f^\alpha(y)$$

由于时空均匀性，改变 K 系中的时空原点不会改变两事件在 K' 系中的时空位移，即对于任意的 b^α，都有

$$y^\alpha = x^\alpha + \epsilon\delta^\alpha_\beta$$

$$y'^\alpha - x'^\alpha = \boxed{f^\alpha(y) - f^\alpha(x) = f^\alpha(y+b) - f^\alpha(x+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^\beta} = \frac{\partial f^\alpha(x+b)}{\partial x^\beta} = const. \triangleq \Lambda^\alpha{}_\beta$$

其中 $\Lambda^\alpha{}_\beta$ 与时空坐标 x 无关，只可能依赖于相对速度 $\vec{v}_0$。

36

● 时空均匀性意味着：

一个事件在两个惯性标架中的时空坐标由线性变换联系

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad \text{where} \quad \Lambda^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta(\vec{v}_0)$$

● 两事件的时空位移满足变换关系：$\Delta x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \Delta x^\beta$

● 当 $\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta$ 时，描述时空平移（a^α 可是任意四个常数）。

● 若 $\boxed{a^\alpha = 0}$，而 $\boxed{\Lambda^i{}_j = k\delta^i_j,\ \Lambda^0{}_0 = 1,\ \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = 0}$

以同一事件作为两惯性标架共同的时空原点

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k\overleftrightarrow{I} \end{pmatrix}$$

则相应的变换为：$ct' = ct,\ \vec{x}' = k\vec{x} \ \Rightarrow \ d\vec{x}'/dt' = k(d\vec{x}/dt)$

➢ 当 $|k| \neq 1$ 时，两个标架中最多只有一个是惯性标架。

➢ $\Lambda^\alpha{}_\beta$ 必然需要满足其他限制条件。

37

二、时空间隔

● 两事件在惯性标架 K 中的**时空间隔**定义为

$$\Delta s^2 \triangleq |\Delta\vec{x}|^2 - (c\Delta t)^2 \quad \leftrightarrow \quad \Delta l^2 \triangleq |\Delta\vec{x}|^2$$

这里 $\Delta x^\alpha = (c\Delta t, \Delta\vec{x})$ 是两事件在惯性标架 K 中的时空位移。

➢ 根据度规定义及升降指标法则，可将时空间隔表示为

$$\Delta s^2 = g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta = g^{\alpha\beta}\Delta x_\alpha \Delta x_\beta = \Delta x^\alpha \Delta x_\alpha$$

● 两个时空位矢 x^α 和 y^α 的 **“内积”** 定义为

$$x \cdot y \triangleq g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta \quad \leftrightarrow \quad \vec{x}\cdot\vec{y} \triangleq \delta_{ij}x^i y^j$$

➢ 该“内积”满足双线性、对称性、非退化的性质。

$$x \cdot y = 0 \ \text{ for } \ \forall y \ \text{ iff } \ x = 0$$

➢ 该“内积”不满足正定性：

存在非零的时空位矢使得 $x \cdot x = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$

38

● 同样的两事件在另一惯性标架 K' 中的时空间隔的数值为

$$\Delta s'^2 \triangleq |\Delta\vec{x}'|^2 - (c\Delta t')^2 = g_{\alpha\beta}\underbrace{\boxed{\Delta x'^\alpha}}_{\Lambda^\alpha{}_\rho \Delta x^\rho}\Delta x'^\beta = \underbrace{\boxed{g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma}}_{-M_{\rho\sigma}}\Delta x^\rho \Delta x^\sigma$$

即 $\Delta s'^2$ 是 Δx^α 的二次齐次函数 $\Delta s'^2 = -M_{\rho\sigma}\,\Delta x^\rho \Delta x^\sigma$，其中

$$M_{\rho\sigma} \triangleq -g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma = M_{\rho\sigma}(\vec{v}_0), \qquad M_{\rho\sigma} = M_{\sigma\rho}$$

● 考察由光信号联系的任意两个给定事件，时空位移设为

$$(c\Delta t, \Delta\vec{x}) = (\Delta l, \hat{n}\Delta l), \quad \forall \hat{n}, \Delta l \quad \Rightarrow \quad \Delta s^2 = 0$$

➢ 由光速普适原理，必有 $\Delta s'^2 = 0$，即

$$\Delta s'^2 = -\underbrace{\boxed{\left(M_{00} + 2\sum M_{0i}n_i + \sum M_{ij}n_i n_j\right)}}_{=0,\quad \forall \hat{n}}\Delta l^2 = 0, \quad \forall \hat{n}, \Delta l$$

39

$$\Longrightarrow \quad 0 = M_{00} + \boxed{M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + M_{33}n_3^2} \; M_{11}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)$$
$$\boxed{+2M_{01}n_1 + 2M_{02}n_2 + 2M_{03}n_3} \quad , \quad \forall \hat{n}$$
$$\boxed{+2M_{12}n_1n_2 + 2M_{23}n_2n_3 + 2M_{31}n_3n_1}$$

① $(n_1, n_2, n_3) \longrightarrow -(n_1, n_2, n_3) \quad \Longrightarrow \quad M_{01} = M_{02} = M_{03} = 0$

② $(n_1, n_2, n_3) \longrightarrow (-n_1, n_2, n_3) \quad \Longrightarrow \quad M_{12} = M_{23} = M_{31} = 0$

③ $(n_1, n_2, n_3) \longrightarrow (n_2, n_1, n_3) \quad \Longrightarrow \quad M_{11} = M_{22} = M_{33}$

④ $\hat{n}$ 为单位矢量 $\Longrightarrow \quad M_{11} = -M_{00}$

因此，对于任意两事件都有

$$\Delta s'^2 = -M_{\rho\sigma}\Delta x^\rho \Delta x^\sigma = -M_{00}(c\Delta t)^2 - M_{11}|\Delta\vec{x}|^2$$
$$\Longrightarrow \quad \Delta s'^2 = -M_{00}\left[(c\Delta t)^2 - |\Delta\vec{x}|^2\right] = M_{00}\Delta s^2$$

40

同样的结论也可如下得到：由光速普适原理，对于任意两个由光信号联系的事件，下面的四个表述是等价的

$$\begin{array}{ccc} \boxed{c\Delta t = \pm|\Delta\vec{x}|} & \Longleftrightarrow & \boxed{c\Delta t' = \pm|\Delta\vec{x}'|} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \boxed{\Delta s^2 = 0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\Delta s'^2 = 0} \end{array}$$

而 $\Delta s'^2$ 作为 $c\Delta t$ 的二次多项式有两个零点 $c\Delta t = \pm|\Delta\vec{x}|$，故

$$\Delta s'^2 = -M_{00}(c\Delta t - |\Delta\vec{x}|)(c\Delta t + |\Delta\vec{x}|)$$
$$\Longrightarrow \quad \Delta s'^2 = M_{00}\Delta s^2$$

41

- 光速普适原理意味着

  任两给定事件在两个惯性标架中的时空间隔满足关系
  $$\Delta s'^2 = M_{00}(\vec{v}_0)\Delta s^2$$

- 由空间的各向同性，M_{00} 只能依赖于 $\vec{v}_0$ 的大小，即
  $$\Delta s'^2 = M_{00}(|\vec{v}_0|)\Delta s^2$$

  - 由于 K 相对于 K' 以速度 $-\vec{v}_0$ 运动，显然有
  $$\Delta s^2 = M_{00}(|-\vec{v}_0|)\Delta s'^2 = [M_{00}(|\vec{v}_0|)]^2\Delta s^2$$
  $$\Longrightarrow \quad M_{00}(|\vec{v}_0|) = \pm 1$$

  - 当 $\vec{v}_0 = 0$ 时，显然应有 $M_{00} = 1$。连续性意味着
  $$M_{00}(|\vec{v}_0|) = 1$$

42

1. 时空间隔的不变性

任意两个给定事件的时空间隔与惯性观测者的选取无关

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2$$

- 类似这样的量称为**不变量**，而时空间隔也称为**不变间隔**。
- 此结论来自相对论的前两条假设：
  - 时间均匀性、空间均匀性和各向同性；
  - 光速普适原理。
- 由时空间隔的不变性不难得到
  - 若粒子在某个惯性系中速度等于 c（或小于 c），则该粒子在所有惯性系中的速度都等于 c（或小于 c）。

43

不变间隔对变换矩阵的限制

- 同一事件在两惯性标架中的时空坐标由如下线性变换相联系

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha \quad \Longrightarrow \quad dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta dx^\beta$$

- 时空间隔不变性意味着变换矩阵 Λ 必须满足如下约束：

$$ds'^2 = g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma = ds^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma} dx^\rho dx^\sigma = \boxed{g_{\rho\sigma}} dx^\rho dx^\sigma, \qquad \forall dx^\alpha$$

  - 因此，4×4 变换矩阵 Λ 须满足条件

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda^T g \Lambda = g$$

  - 矩阵 Λ 的 16 个元素中只有 6 个是独立的。

44

- 方程 $\Lambda^T g \Lambda = g$ 左右两边取行列式，得到

$$\det \Lambda^T \cdot \det g \cdot \det \Lambda = \det g$$

$$\Longrightarrow \quad |\det \Lambda| = 1$$

- 方程 $g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$ 中取 $\rho = \sigma = 0$，得到

$$\overset{-1}{\boxed{g_{00}}} = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^\beta{}_0 = \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda^i{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^0{}_0\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\Lambda^0{}_0\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda^i{}_0\right)^2 \geq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\Lambda^0{}_0\right| \geq 1$$

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda^T g \Lambda = g$$

45

- 不难看出如下 Λ 均满足 $\Lambda^T g \Lambda = g$:
  - **空间反演:** $\Lambda = \mathcal{P} = \mathrm{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$。
  - **时间反演:** $\Lambda = \mathcal{T} = \mathrm{diag}\{-1, +1, +1, +1\}$。
  - **时空反演:** $\Lambda = \mathcal{PT} = \mathrm{diag}\{-1, -1, -1, -1\}$。
  - **空间转动:**

$$\Lambda^0{}_0 = 1,\ \Lambda^i{}_j = R^i{}_j,\ \Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_j = 0, \quad \text{where } R \in \mathrm{SO}(3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R^T R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

2. 不变间隔与狭义相对论的时空结构

- 考察任一事件在任意两个给定惯性标架中的坐标 x^α 和 x'^α。
  - 二者之间的最一般的关系可写为可逆变换 $x' = x'(x)$。
  - 假设该变换保持时空间隔是不变的

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2 \quad \Leftrightarrow \quad g_{\alpha\beta}\Delta x'^\alpha \Delta x'^\beta = g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta$$

- 考察任意的、无限小的时空位移, $ds^2 = ds'^2$ 意味着

$$\boxed{g_{\rho\sigma}} dx^\rho dx^\sigma = g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \boxed{g_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}} dx^\rho dx^\sigma$$

$$\Rightarrow \quad g_{\rho\sigma} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}$$

$$0 = \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} = \boxed{g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}} + \boxed{g_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\tau \partial x^\sigma}}, \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^\rho} = \boxed{g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\tau}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}} + \boxed{g_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\tau}\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}}, \quad (2)$$

$$0 = \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} = \boxed{g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\tau}} + \boxed{g_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}}, \quad (3)$$

(1) + (2) − (3) 得到:

$$0 = \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} = 2 g_{\alpha\beta}\overset{0}{\boxed{\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\rho}}}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}$$

$$g_{\rho\sigma} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}$$

- 由于度规矩阵及变换的雅可比矩阵皆可逆，故

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\rho} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha$$

  - 其中 $\Lambda^\alpha{}_\beta$ 只依赖于两个惯性观测者的相对速度 $\vec{v}_0$、而与点的时空位置无关。
  - 时空间隔的不变性意味着变换必然是线性的。
- 将此变换式代回 $ds'^2 = ds^2$ 中，就给出了

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

时空假设 + 光速普适原理 $\leftrightarrow$ 时空间隔不变

49

- 四个数 $(ct, \vec{x})$ 本身并不能传达给定事件的有意义的信息。
  - 它们不仅取决于事件本身，还取决于 t 和 $\vec{x}$ 的原点选择。
  - 通过考察两事件的时空位移 $(c\Delta t, \Delta\vec{x})$ 可消除原点依赖性，但是，其数值仍将取决于坐标轴方向及惯性观察者的选择。
- 确定由 $(c\Delta t, \Delta\vec{x})$ 构成的哪些量不变这一点极具研究价值。
  - 此类量可被视为源于时空本身的结构。
  - 所有惯性观测者的世界线集合可视为时空结构的另一方面。
- 在狭义相对论之前的物理学中，有两个此类不变量
  - 事件之间的时间间隔：Δt
  - 两同时（$\Delta t = 0$）事件之间的空间间隔：$|\Delta\vec{x}|$
  - **这两个不变量及所有可能惯性观测者的世界线集合提供了牛顿时空结构的完整描述。**

50

- 在狭义相对论中，存在一个不变量
  - 任意两事件之间的时空间隔

$$\Delta s^2 = g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta = |\Delta\vec{x}|^2 - (c\Delta t)^2$$

  - 而且可证，只要知道所有事件对之间的时空间隔，就能构造出惯性观察者的世界线。
  - **时空间隔提供了对狭义相对论中时空结构的完整描述。**
- 同一事件在两个惯性标架中的时空坐标的联系也是有用的。
  - 在相对论之前的物理学中，这由伽利略变换给出。
  - 在狭义相对论中，则由洛伦兹变换（庞加莱变换）给出。
  - 某些物理量仅仅对于某两个特定（而非所有）惯性观测者给出的数值相同，这样的量自然不能称为不变量。

51

三、洛伦兹变换与庞加莱变换

洛伦兹群： $O(3,1) = \left\{ \text{实}4\times 4\text{矩阵}\Lambda \;\middle|\; \Lambda^T g \Lambda = g \right\}$

- **庞加莱变换：** $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha,\quad \Lambda \in O(3,1),\quad a \in \mathbb{R}^4$
- **洛伦兹变换：** $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta,\quad \Lambda \in O(3,1)$
  - **空间反演：** $x'^\alpha = \mathcal{P}^\alpha{}_\beta x^\beta$，其中 $\mathcal{P} = \mathrm{diag}\{+1,-1,-1,-1\}$。
  - **时间反演：** $x'^\alpha = \mathcal{T}^\alpha{}_\beta x^\beta$，其中 $\mathcal{T} = \mathrm{diag}\{-1,+1,+1,+1\}$。
  - **时空反演：** $x'^\alpha = (\mathcal{PT})^\alpha{}_\beta x^\beta = -x^\alpha$。
  - **转动变换：** 相对静止、坐标轴方位不同。
  - **推动变换：** 相对匀速运动、坐标轴相互平行。

52

- 洛伦兹群可以分解为四个互不相交的子集：

$$O(3,1) = SO(3,1)_c \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

其中 $SO(3,1)_c$ 称为**正规洛伦兹群**（对应**正规洛伦兹变换**）

$$SO(3,1)_c = \left\{\Lambda \in O(3,1) \;\middle|\; \det\Lambda = +1,\quad \Lambda^0{}_0 \geq +1\right\}$$

而其余三个连通分支则可表示为

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \left\{\Lambda \in O(3,1) \;\middle|\; \det\Lambda = -1,\quad \Lambda^0{}_0 \geq +1\right\} = \mathcal{P}\cdot SO(3,1)_c \\ \Sigma_2 = \left\{\Lambda \in O(3,1) \;\middle|\; \det\Lambda = -1,\quad \Lambda^0{}_0 \leq -1\right\} = \mathcal{T}\cdot SO(3,1)_c \\ \Sigma_3 = \left\{\Lambda \in O(3,1) \;\middle|\; \det\Lambda = +1,\quad \Lambda^0{}_0 \leq -1\right\} = \mathcal{PT}\cdot SO(3,1)_c \end{cases}$$

53

【例】试由洛伦兹变换推导协变坐标的变换以及反变换。

【解】洛伦兹变换为 $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$，定义

$$\tilde{\Lambda}_\mu{}^\nu \triangleq g_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} \quad\leftrightarrow\quad \tilde{\Lambda} = g\Lambda g$$

则协变坐标的变换为 $x'_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\beta x_\beta$ 。

利用洛伦兹变换有

$$\begin{aligned} & g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\sigma x'^\alpha = g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\sigma \Lambda^\alpha{}_\rho x^\rho = g_{\rho\sigma}x^\rho = x_\sigma \\ \Rightarrow\quad & x_\sigma = g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\sigma x'^\alpha = \Lambda^\beta{}_\sigma x'_\beta \\ \Rightarrow\quad & x_\alpha = \Lambda^\beta{}_\alpha x'_\beta \\ \Rightarrow\quad & x^\alpha = \tilde{\Lambda}_\beta{}^\alpha x'^\beta \end{aligned}$$

54

【思考】洛伦兹群满足的条件可等价地表示为如下数学形式：

$$\Lambda^T g\Lambda = g \quad \leftrightarrow \quad g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

$$\Lambda g\Lambda^T = g \quad \leftrightarrow \quad g^{\rho\sigma}\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma = g^{\alpha\beta}$$

$$\tilde\Lambda^T g\tilde\Lambda = g \quad \leftrightarrow \quad g^{\rho\sigma}\tilde\Lambda_\rho{}^\alpha \tilde\Lambda_\sigma{}^\beta = g^{\alpha\beta}$$

$$\tilde\Lambda g\tilde\Lambda^T = g \quad \leftrightarrow \quad g_{\alpha\beta}\tilde\Lambda_\rho{}^\alpha \tilde\Lambda_\sigma{}^\beta = g_{\rho\sigma}$$

$$\Lambda^T\tilde\Lambda = I \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^\gamma{}_\beta \tilde\Lambda_\gamma{}^\alpha = \delta^\alpha_\beta$$

$$\Lambda\tilde\Lambda^T = I \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^\alpha{}_\gamma \tilde\Lambda_\beta{}^\gamma = \delta^\alpha_\beta$$

55

1. 无穷小洛伦兹变换

考察如下洛伦兹矩阵 $\Lambda^\alpha{}_\beta$ 所定义的**无穷小（正规）洛伦兹变换**

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + \Omega^\alpha{}_\beta, \quad \left(\left|\Omega^\alpha{}_\beta\right| \ll 1\right)$$

其中的无穷小参数 $\Omega^\alpha{}_\beta$ 应满足如下约束：

$$0 = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu - g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\left(\delta^\alpha_\mu + \Omega^\alpha{}_\mu\right)\left(\delta^\beta_\nu + \Omega^\beta{}_\nu\right) - g_{\mu\nu}$$

$$= g_{\alpha\beta}\delta^\alpha_\mu\Omega^\beta{}_\nu + g_{\alpha\beta}\delta^\beta_\nu\Omega^\alpha{}_\mu = g_{\mu\beta}\Omega^\beta{}_\nu + g_{\alpha\nu}\Omega^\alpha{}_\mu$$

即是要求

$$\Omega^T = -g\Omega g \quad \leftrightarrow \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

其中

$$\omega \triangleq g\Omega \quad \leftrightarrow \quad \omega_{\mu\nu} \triangleq g_{\mu\beta}\Omega^\beta{}_\nu$$

56

无穷小洛伦兹变换依赖于六个任意参数，变换矩阵可写为

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + \Omega^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta}, \quad (\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu})$$

- 可将矩阵 $\omega_{\mu\nu}$ 写为

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \vec\xi \\ -\vec\xi & \overleftrightarrow{\theta} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & 0 & \theta n_3 & -\theta n_2 \\ -\xi_2 & -\theta n_3 & 0 & \theta n_1 \\ -\xi_3 & \theta n_2 & -\theta n_1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

其中 $\hat n$ 为单位矢量，而 $\theta_{ij} = \theta\varepsilon_{ijk}n_k = \varepsilon_{ijk}\theta_k$，即有

$$\vec\xi = \left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right), \quad \vec\theta = \theta\hat n, \quad \overleftrightarrow{\theta} = -\overleftrightarrow{I}\times\vec\theta = -\vec\theta\times\overleftrightarrow{I}$$

57

- 由 $\Omega^\alpha{}_\beta$ 定义的无穷小洛伦兹变换为

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta = \left(\delta^\alpha_\beta + \Omega^\alpha{}_\beta\right) x^\beta = x^\alpha + \Omega^\alpha{}_\beta x^\beta$$

因此

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\xi} \\ -\vec{\xi} & \overleftrightarrow{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\vec{\xi} \cdot \vec{x} \\ -\vec{\xi} ct + \overleftrightarrow{\theta} \cdot \vec{x} \end{pmatrix}$$

即无穷小洛伦兹变换可以用三维矢量表示为

$$\begin{cases} ct' = ct - \vec{\xi} \cdot \vec{x} \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{\xi} ct - \theta \hat{n} \times \vec{x} \end{cases}$$

58

无穷小转动

若 $\vec{\xi} = 0$，则无穷小洛伦兹变换写为了

$$ct' = ct, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \theta \hat{n} \times \vec{x}$$

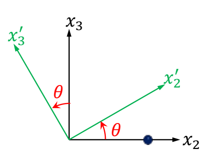
该变换表示绕着 $\hat{n}$ 轴的无穷小转动（转角为 θ）

- 绕着 x_1 轴的无穷小转动为（$t' = t$、$x_1' = x_1$）

$$x_2' = x_2 + \theta x_3, \quad x_3' = x_3 - \theta x_2$$

相应的 2×2 无穷小变换矩阵为

$$\Omega = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



59

无穷小推动

若 $\theta = 0$，则无穷小洛伦兹变换写为了

$$ct' = ct - \vec{\xi} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{\xi} ct$$

- K' 系的空间原点 $\vec{x}' = 0$ 在 K 系中的速度为 $\vec{v}_0 = c\vec{\xi}$。

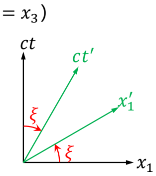
该变换表示沿着 $\vec{\xi}$ 方向的无穷小推动（速度为 $v_0 = c\xi$）

- 沿着 x_1 轴的无穷小推动为（$x_2' = x_2$、$x_3' = x_3$）

$$ct' = ct - \xi x_1, \quad x_1' = x_1 - \xi ct$$

相应的 2×2 无穷小变换矩阵为

$$\Omega = \xi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



60

2. 有限正规洛伦兹变换

在无穷小变换矩阵中作替换（其中 $\vec{\theta}$ 和 $\vec{\xi}$ 有限，而 $N \longrightarrow \infty$ ）

$$\Omega \longrightarrow \frac{1}{N}\Omega = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 0 & -\vec{\xi} \\ -\vec{\xi} & \vec{\theta} \end{pmatrix}$$

由其定义的无限多变换的组合给出有限洛伦兹变换，变换矩阵：

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty}\left(I + \frac{\Omega}{N}\right)^N$$

- 正规洛伦兹群的元素可以写为（定义 $\Omega^0 = I$）

$$\Lambda = e^{\Omega} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega^n}{n!} = I + \Omega + \frac{\Omega^2}{2!} + \frac{\Omega^3}{3!} + \cdots$$

【思考】证明 $\Lambda^T g \Lambda = g$

61

Cayley-Hamilton定理

对于 4×4 方阵 Ω，有

$$e^{\Omega} = \alpha_0 I + \alpha_1\Omega + \alpha_2\Omega^2 + \alpha_3\Omega^3$$

- 为确定诸 α_k，定义

$$f(x) = e^x,\quad R(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

- 设 λ_i 是 Ω 的本征值，则 α_k 可由如下四个代数方程确定

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i),\quad (i = 1,2,3,4)$$

  - 若 λ_i 是 n 重简并的，则相应的 n 个代数方程替换为

$$f^{(m)}(\lambda_i) = R^{(m)}(\lambda_i),\quad (m = 0,1,\cdots,n-1)$$

62

有限转动

绕着 x_1 轴转动的 2×2 变换矩阵（作用于 x_2, x_3）：

$$\Lambda = \boxed{e^{\Omega} = \alpha_0 I + \alpha_1\Omega}\quad \text{where}\ \ \Omega = \theta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$e^x = \alpha_0 + \alpha_1 x$

$$\Longrightarrow\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\theta + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

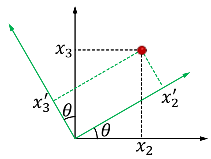
$$|\lambda I - \Omega| = \begin{vmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = +i\theta,\quad \lambda_2 = -i\theta$$

$$\begin{cases} e^{+i\theta} = \alpha_0 + \alpha_1\cdot i\theta \\ e^{-i\theta} = \alpha_0 - \alpha_1\cdot i\theta \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \alpha_0 = \cos\theta,\quad \alpha_1\theta = \sin\theta$$

63

● 绕着 x_1 轴的转动变换为（$t' = t$）

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = \overset{\vec{x}_\perp}{\boxed{x_2}}\cos\theta\ \overset{-\hat{x}_1\times\vec{x}}{\boxed{+\,x_3}}\sin\theta \\ x_3' = \boxed{x_3}\cos\theta\ \boxed{-\,x_2}\sin\theta \end{cases}$$



$$\Longrightarrow\ \begin{cases} \vec{x}_\parallel' = \boxed{\vec{x}_\parallel}^{\,\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{x})} \\ \vec{x}_\perp' = \underset{\vec{x}-\vec{x}_\parallel}{\boxed{\vec{x}_\perp}}\cos\theta - \hat{n}\times\vec{x}\sin\theta \end{cases}$$

● 利用 $\vec{x}' = \vec{x}_\parallel' + \vec{x}_\perp'$，就得到了绕 $\hat{n}$ 轴的转动公式

$$\vec{x}' = \vec{x}\cos\theta + \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{x})(1-\cos\theta) - \hat{n}\times\vec{x}\sin\theta\,,\ \ (x'^i = R^i{}_j x^j)$$

64

有限推动

沿着 x_1 轴推动的 2×2 变换矩阵为（作用于 ct, x_1）：

$$\Lambda = \overset{e^x = \alpha_0 + \alpha_1 x}{\boxed{e^\Omega = \alpha_0 I + \alpha_1 \Omega}} \quad \text{where}\ \ \Omega = \xi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cosh\xi + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sinh\xi = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - \Omega| = \begin{vmatrix} \lambda & \xi \\ \xi & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = +\xi,\quad \lambda_2 = -\xi$$

$$\begin{cases} e^{+\xi} = \alpha_0 + \alpha_1\cdot\xi \\ e^{-\xi} = \alpha_0 - \alpha_1\cdot\xi \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 = \cosh\xi\,,\quad \alpha_1\xi = \sinh\xi$$

65

● 沿着 x_1 轴的推动变换为（$x_2' = x_2$、$x_3' = x_3$）

$$\begin{cases} ct' = ct\,\underset{\gamma_0}{\boxed{\cosh\xi}} - x_1\,\underset{\beta_0\gamma_0}{\boxed{\sinh\xi}} \\ x_1' = x_1\boxed{\cosh\xi} - ct\boxed{\sinh\xi} \end{cases}$$

● 静止于惯性标架 K' 的空间原点的粒子，其世界线方程为

$$x_1' = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = ct\tanh\xi$$

因此 K' 相对于 K 的速度 $v_0 = dx_1/dt$ 满足

$$\beta_0 \triangleq \frac{v_0}{c} = \tanh\xi = \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{e^\xi + e^{-\xi}} \ \Longrightarrow\ \boxed{\xi = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}\ \ \textbf{快度}$$

$$\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1 \ \Longrightarrow\ 1 - \tanh^2\xi = \cosh^{-2}\xi$$

$$\Longrightarrow\ \cosh\xi = \left(1-\beta_0^2\right)^{-1/2} \triangleq \gamma_0$$

$$\Longrightarrow\ \sinh\xi = \tanh\xi\cosh\xi = \beta_0\gamma_0$$

66

- 定义洛伦兹因子

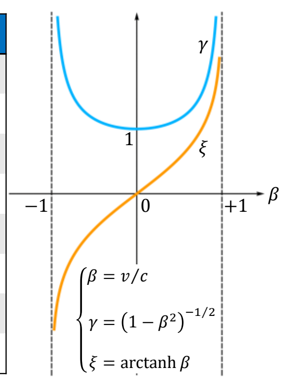
$$\gamma_0 \triangleq \cosh\xi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \implies \beta_0\gamma_0 = \sinh\xi$$

$$\implies \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 \\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

- 利用 γ_0，沿着 x_1 轴的推动可以表示为

$$\begin{cases} ct' = \gamma_0(ct - \beta_0 x_1) \\ x_1' = \gamma_0(x_1 - \beta_0 ct) \\ x_{2,3}' = x_{2,3} \end{cases} \iff \begin{cases} ct = \gamma_0(ct' + \beta_0 x_1') \\ x_1 = \gamma_0(x_1' + \beta_0 ct') \\ x_{2,3} = x_{2,3}' \end{cases}$$

β	γ	ξ
0.5	1.155	0.549
0.9	2.294	1.472
0.99	7.089	2.647
$1-10^{-3}$	22.366	3.800
$1-10^{-4}$	70.712	4.952
$1-10^{-5}$	223.607	6.103
$1-10^{-6}$	707.107	7.254
$1-10^{-10}$	70710.7	11.860



惯性观测者之间的相对速度

- 洛伦兹变换是任一给定事件在两个惯性系中的时空坐标之间的关系。由于时空坐标必须是实数，因而惯性系之间的相对速度就不可能超过光速 c，否则 γ_0 将成为虚数。
- 惯性系之间的相对速度也不应等于光速 c。
  - 否则该惯性系中所有粒子的速度都将等于光速。

两惯性观测者之间的相对速度必小于光速 c。

- 若我们接受：除光之外的、相对于某个惯性观测者匀速运动的物体都可作为某个惯性观测者，则

任何物体相对于任一惯性观测者的速度都不会超过光速 c。

$$\begin{cases} cdt = \gamma_0(cdt' + \beta_0 dx_1') \\ dx_1 = \gamma_0(dx_1' + \beta_0 cdt') \end{cases} \implies \beta = \frac{\beta' + \beta_0}{1 + \beta'\beta_0}$$

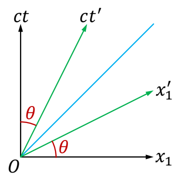
3. 推动的几何意义

考察沿着 x_1 轴的推动：

$$ct' = \gamma_0(ct - \beta_0 x_1), \qquad x_1' = \gamma_0(x_1 - \beta_0 ct)$$

坐标轴

$$ct'\text{轴} = \left\{(ct', x_1') \,\middle|\, x_1' = 0\right\}$$
$$= \left\{(ct, x_1) \,\middle|\, x_1 = \beta_0 ct\right\}$$
$$x_1'\text{轴} = \left\{(ct', x_1') \,\middle|\, ct' = 0\right\}$$
$$= \left\{(ct, x_1) \,\middle|\, ct = \beta_0 x_1\right\}$$



$\tan\theta = \beta_0$

70

标度

- **发生于 ct' 轴上的某事件** A，其在惯性标架 K' 中的坐标设为 $(ct', 0)$，事件 A 在惯性标架 K 中的坐标为

$$ct = \gamma_0 ct', \qquad x_1 = \beta_0 \gamma_0 ct'$$

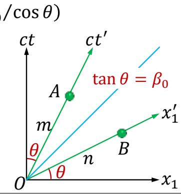
线段 OA 在标架 K' 中的长度为 ct'，在标架 K 中其长度则为

$$m = ct'\left[\gamma_0^2 + (\beta_0\gamma_0)^2\right]^{1/2} = ct'(\gamma_0/\cos\theta)$$

$\Longrightarrow$ $ct' = m\cos\theta/\gamma_0$

- **发生于 x_1' 轴上的某事件** B，若线段 OB 在标架 K' 中的长度为 x_1'，在标架 K 中的长度为 n，则

$x_1' = n\cos\theta/\gamma_0$



$$ct = \gamma_0(ct' + \beta_0 x_1'), \qquad x_1 = \gamma_0(x_1' + \beta_0 ct')$$

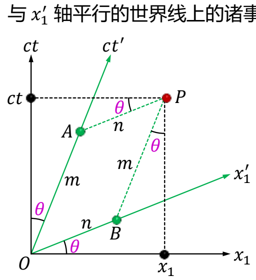
71

推动的几何意义

变换的线性性意味着：在标架 K 中

与 ct' 轴平行的世界线上的诸事件在 K' 系中同地发生。

与 x_1' 轴平行的世界线上的诸事件在 K' 系中同地发生。



$$\begin{cases} ct' = m\cos\theta/\gamma_0 \\ x_1' = n\cos\theta/\gamma_0 \end{cases}$$

$\tan\theta = \beta_0 = \tanh\xi$

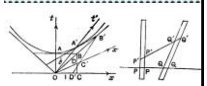
72

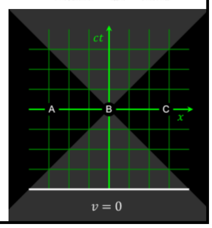
闵可夫斯基空间

闵可夫斯基，1908年

从今以后，
单独的空间和单独的时间
注定逐渐消失而仅仅成为影子，
这两者的融合
将留存而成为一种独立的实在。

时空又称为**闵可夫斯基空间**，它是一个伪欧几里德空间。欧几里德空间中任两不同点之间的距离恒正，而闵可夫斯基空间两不同点之间的“距离” $\sqrt{ds^2}$ 可以为正数，也可以是零甚至虚数。





4. 一般洛伦兹变换

$$\begin{cases} ct' = \gamma_0(ct - \beta_0 x_1) \\ x_1' = \gamma_0(x_1 - \beta_0 ct) \\ x_{2,3}' = x_{2,3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma_0\left(ct - \vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right) \\ \vec{x}_\parallel' = \gamma_0\left(\vec{x}_\parallel - \vec{\beta}_0 ct\right) \\ \vec{x}_\perp' = \vec{x}_\perp \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}' = \vec{x}_\parallel' + \vec{x}_\perp' = \vec{x} + (\gamma_0 - 1)\overbrace{\boxed{\vec{x}_\parallel}}^{(\hat{\beta}_0\cdot\vec{x})\hat{\beta}_0} - \gamma_0\vec{\beta}_0 ct$$

与坐标轴方位、坐标系选择无关的一般洛伦兹变换可表示为

$$\begin{cases} ct' = \gamma_0\left(ct - \vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right) \\ \vec{x}' = \vec{x} + \overbrace{\boxed{(\gamma_0 - 1)(\hat{\beta}_0\cdot\vec{x})\hat{\beta}_0}}^{\frac{\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\left(\vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}_0} - \gamma_0\vec{\beta}_0 ct \end{cases}$$

- 这样的变换不仅描述推动，而且也描述转动。

变换的系数矩阵

设两系均取直角坐标系。

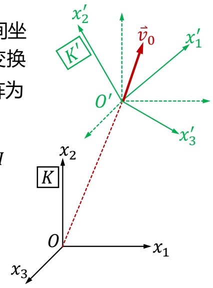
- 若标架 K' 相对于 K 以速度 $\vec{v}_0$ 运动，且两标架的空间坐标轴对应平行，则洛伦兹变换 $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$ 为推动，变换系数为

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0 = \gamma_0 \\ \Lambda^0{}_j = -\gamma_0\beta_{0j} \\ \Lambda^i{}_0 = -\gamma_0\beta_0^i \\ \Lambda^i{}_j = \delta_j^i + \dfrac{\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\beta_0^i\beta_{0j} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\gamma_0\vec{\beta}_0 \\ -\gamma_0\vec{\beta}_0 & \overleftrightarrow{I} + (\gamma_0 - 1)\hat{\beta}_0\hat{\beta}_0 \end{pmatrix}$$

$$ct' = \gamma_0\left(ct - \vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right), \quad \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\left(\vec{\beta}_0\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}_0 - \gamma_0\vec{\beta}_0 ct$$

- 若标架 K' 相对于 K 静止，只是空间坐标轴方位发生了转动，则洛伦兹变换 $x'^{\alpha}=\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta}$ 为转动，变换系数矩阵为

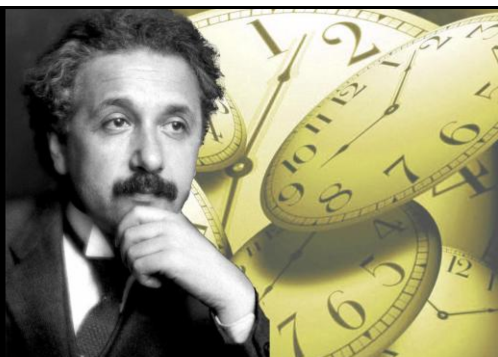
$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix},\quad \text{where } R^TR=I$$



- 一般变换即有转动又有推动。

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_0 & -\gamma_0\vec{\beta}_0\\ -\gamma_0\vec{\beta}_0 & \overleftrightarrow{I}+(\gamma_0-1)\hat{\beta}_0\hat{\beta}_0\end{pmatrix}$$

76



谢谢