§6 电磁场的
能量、动量和角动量

一、电磁场的能量

1. 能量守恒的物理图像

- 电磁场的能量守恒应是一种局域的守恒，而为了描述这样一种守恒定律，需要两个物理量：

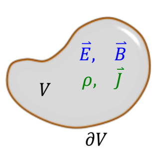
  （1）**能量密度** $w = w(t, \vec{x})$：单位体积的能量；

  （2）**能流密度** $\vec{S} = \vec{S}(t, \vec{x})$：沿能量传输方向，大小为单位时间穿过单位横截面积的能量。

- 电磁场与实物粒子之间的相互作用会引起能量、动量、角动量等的交换，因此，一个给定区域 V 内电磁场能量减少的原因，即可能是由于电磁场携带着能量从区域边界流出去了，也可能是其能量转移给了实物粒子，或者两者兼而有之。

- 数学上，能量守恒定律表示为：

$$-\frac{d}{dt}\int_V dV\, w = \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{S} + \int_V dV\, \vec{f}\cdot\vec{v}$$



其中，V 是空间中任一给定区域，其内可能有电荷、电流和电磁场。

单位时间区域内减少的电磁场能量等于
单位时间由区域边界流出的电磁场能量与
单位时间电磁场对区域内实物粒子做功之和。

- 能量守恒定律可以写为微分形式：

$$-\partial_t w = \nabla\cdot\vec{S} + \vec{f}\cdot\vec{v} \quad \text{or} \quad \vec{f}\cdot\vec{v} = -\partial_t w - \nabla\cdot\vec{S}$$

2. 电磁场消耗的功率密度

电磁场在单位体积实物粒子上消耗的功率（**功率密度**）可由力密度给出。由于$\vec{J}=\rho\vec{v}$，因而为

$$\vec{f}\cdot\vec{v}=\left(\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}=\rho\vec{E}\cdot\vec{v}=\vec{E}\cdot\vec{J}$$

所以，微分形式的能量守恒定律可写为：

$$-\partial_t w=\nabla\cdot\vec{S}+\vec{E}\cdot\vec{J}\quad\text{or}\quad\vec{E}\cdot\vec{J}=-\partial_t w-\nabla\cdot\vec{S}$$

在对电磁场能量一无所知的情况下，
我们应坚定这样的信心：
能量守恒！
能量一定守恒！
能量只能转化而不能消失！
——刘万东

4

3. Poynting定理

$$\vec{E}\cdot\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)-\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad\textbf{(AM)}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\right)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)\qquad\textbf{(Leibnitz)}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\right)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\textbf{(F)}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)-\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\right)\qquad\textbf{(Leibnitz)}$$

$$=-\partial_t w-\nabla\cdot\vec{S}$$

5

电磁场的能量守恒定律（**Poynting定律**）

（积分形式）$-\frac{d}{dt}\int_V dV\,w-\oint_{\partial V}d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}=\int_V dV\,\vec{E}\cdot\vec{J}$

（微分形式）$-\partial_t w-\nabla\cdot\vec{S}=\vec{E}\cdot\vec{J}$

- **电磁场的能量密度**

$$w\triangleq\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2+c^2B^2\right)$$

- **电磁场的能流密度（Poynting矢量）**

$$\vec{S}\triangleq\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\varepsilon_0c^2\vec{E}\times\vec{B}$$

6

总能量守恒

将 V 取为全空间。设 $r\longrightarrow\infty$ 时，$\vec{E},\vec{B}\sim O(1/r)$，则

$$\int dV\,\vec{E}\cdot\vec{J}=-\frac{d}{dt}\int dV\,w$$

即电磁场在实物上消耗的总功率等于场总能量的时间减小率。
因此，电磁场与带电粒子构成的体系的总能量守恒。

- 电磁场消耗的总功率等于实物粒子**力学能量**（记为 U）增加的速率，若用 W 表示全空间电磁场的总能量，则

$$\frac{d(U+W)}{dt}=0 \Longrightarrow U+W=const.$$

7

- 对于通过电磁作用的带电粒子系统，此处所指力学能量就是带电粒子系统的总动能或总相对论能量。这是由于

$$\vec{J}(t,\vec{x})=\sum_k e_k\vec{v}_k(t)\delta^3\big(\vec{x}-\vec{x}_k(t)\big)$$

$$\Longrightarrow \int dV\,\vec{E}\cdot\vec{J}=\sum_k e_k\int dV\,\vec{E}(t,\vec{x})\cdot\vec{v}_k(t)\delta^3\big(\vec{x}-\vec{x}_k(t)\big)$$

$$=\sum_k e_k\vec{E}(t,\vec{x}_k)\cdot\vec{v}_k(t)$$

根据动能定理，作用于各带电粒子上的Lorentz力消耗的总功率等于力学能量（动能或相对论能量）的时间变化率，即

$$\sum_k e_k\vec{E}\cdot\vec{v}_k=\frac{d}{dt}\left(\sum_k\frac{1}{2}m_k v_k^2\right)\quad\text{or}\quad\frac{d}{dt}\left(\sum_k\frac{m_kc^2}{\sqrt{1-v_k^2/c^2}}\right)$$

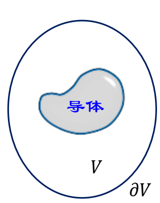
8

存在导体的情形

若区域 V 内的实物为Ohm型导体，由于 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$，故

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\,w+\int_V dV\,\frac{J^2}{\sigma}=-\oint_{\partial V}d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}$$

由边界流进区域的电磁场能量，
一部分使得区域内电磁场的能量增加，
一部分则以焦耳热的形式损耗掉了。



$$-\frac{d}{dt}\int_V dV\,w=\int_V dV\,\frac{J^2}{\sigma}+\oint_{\partial V}d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}$$

导致区域内电磁场能量减少的原因有二，
一是作用于实物产生焦耳热，
二是电磁场携带着能量由边界流出去了。

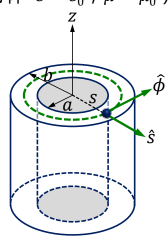
9

【例】 同轴传输线内导体半径为 a，外导线半径为 b，两导线间为真空。 导线载有电流 I，两导线间的电压为 V。

（1）忽略导线电阻，计算导线间的能流和传输功率；

（2）计及导线电阻，计算通过内导线表面进入导线内的能流，证明它等于导线的损耗功率（设内导体 $\varepsilon=\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$）。

【解】（1）设导线上单位长度的电量为 λ，则由Gauss定理以及Ampere环路定理，有



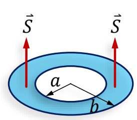
$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{s},\quad \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi},\quad (a<s<b)$$

10

其中，λ 可由导线间的电压 V 给出：

$$V=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^b E_s ds=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln(b/a)}$$



故能流密度矢量为

$$\vec{S}\triangleq\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0 s^2}\hat{z}=\frac{IV}{2\pi s^2\ln(b/a)}\hat{z},\quad (a<s<b)$$

传输线的总传输功率为

$$P=\oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}=\int_a^b S\cdot 2\pi s ds=IV$$

11

（2）计及内导体的有限电导率 σ，则内导体内部一点的电场强度不再为零，利用Ohm定律以及Ampere环路定理，有

$$\vec{E}_{\rm in}=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\frac{I}{\pi a^2\sigma}\hat{z},\quad \vec{B}_{\rm in}=\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\phi},\quad (0\le s\le a)$$

故内导体内的能流密度矢量为

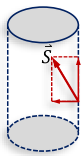
$$\vec{S}_{\rm in}\triangleq\frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{\rm in}\times\vec{B}_{\rm in}=-\frac{I^2 s}{2\pi^2 a^4\sigma}\hat{s},\quad (0\le s\le a)$$

这部分流入导体内部的能量以焦耳热的形式消耗掉了，流入长度为 L 的一段导线内部的功率为

$$P_{\rm in}=\vec{S}_{\rm in}(s=a)\cdot(-2\pi a L\hat{s})=I^2\frac{L}{\pi a^2\sigma}=I^2 R,\quad R\triangleq\frac{L}{\pi a^2\sigma}$$

12

计及内导体电阻时，导线内电场沿着电流方向。根据边值关系，在导线表面外侧附近，电场不仅有法向分量，也有切向分量。因此，能流密度矢量即有沿着导线方向的分量，也有垂直于导线指向其内部的分量。



13

【思考】半径为 a、电量为 e 的均匀带电球壳以常速度 $v(\ll c)$ 运动。试分别由

$$W_e = m_0 c^2, \quad W_m = \frac{1}{2} m v^2$$

计算球壳的 "静止质量" m_0 和 "运动质量" m。二者有什么关系？

14

4. w 与 $\vec{S}$ 不确定性

电磁场的能量密度与能流密度的表达式并不唯一。若

$$-\partial_t w - \nabla \cdot \vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{J} = -\partial_t w' - \nabla \cdot \vec{S}'$$

令 $\alpha \triangleq w' - w$ 以及 $\vec{\beta} \triangleq \vec{S}' - \vec{S}$，得到

$$\partial_t \alpha + \nabla \cdot \vec{\beta} = 0$$

即

$$w' = w + \alpha, \quad \vec{S}' = \vec{S} + \vec{\beta}, \quad \left(\partial_t \alpha + \nabla \cdot \vec{\beta} = 0\right)$$

其中 α 和 $\vec{\beta}$ 可以是由 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 确定的、满足连续性方程的任意标量和矢量。

【思考】这种不确定性是否会有可观测的物理效应？
这种不确定性是否可以通过施加某些限制消除？

15

5. Maxwell方程组的完备性

描述电磁场演化的 **Maxwell 方程组是完备的**。含义是：

在电荷、电流分布已知的情形下，若给定 $t=0$ 时刻电磁场在区域 V 内任一点的数值

$$\vec{E}(t=0,\vec{x}\in V) \quad \text{and} \quad \vec{B}(t=0,\vec{x}\in V)$$

并且给定边界 ∂V 上电场或磁场的切向分量

$$\vec{E}_\tau(t,\vec{x}\in \partial V) \quad \text{or} \quad \vec{B}_\tau(t,\vec{x}\in \partial V)$$

则由Maxwell方程组可以唯一确定

$$\vec{E}(t,\vec{x}\in V) \quad \text{and} \quad \vec{B}(t,\vec{x}\in V)$$

16

【证明】设有两组解 $\{\vec{E}_1,\vec{B}_1\}$、$\{\vec{E}_2,\vec{B}_2\}$ 同时满足上述条件及Maxwell方程组。则 $\{\vec{E}=\vec{E}_1-\vec{E}_2,\vec{B}=\vec{B}_1-\vec{B}_2\}$ 满足

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=0,\quad \nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & ① \\ \vec{E}(t=0,\vec{x}\in V)=0 \quad \text{and} \quad \vec{B}(t=0,\vec{x}\in V)=0 & ② \\ \vec{E}_\tau(t,\vec{x}\in\partial V)=0 \quad \text{or} \quad \vec{B}_\tau(t,\vec{x}\in\partial V)=0 & ③ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\int_V dV\,\frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2+c^2B^2) \overset{①}{=} -\frac{1}{\mu_0}\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) \overset{③}{=} 0$$

$$\Longrightarrow E^2+c^2B^2=const. \overset{②}{\equiv} 0$$

$$\Longrightarrow \vec{E}=\vec{E}_1-\vec{E}_2=0,\quad \vec{B}=\vec{B}_1-\vec{B}_2=0$$

17

二、电磁场的动量

1. 动量守恒的物理图像

- 电磁场的动量守恒应是一种局域的守恒，而为了描述这样一种守恒定律，需要两个物理量：

  （1）**动量密度**：$\vec{g}=\vec{g}(t,\vec{x})$

  （2）**动量流密度** ：$\overleftrightarrow{T}=\overleftrightarrow{T}(t,\vec{x})$

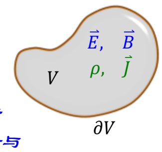
  - 由于流过面元$d\vec{\sigma}$的动量（$d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$）是一个矢量，因而$\overleftrightarrow{T}$应是一个二阶张量。

- 电磁场与实物粒子之间可能交换动量，对于给定区域 V，电磁场携带着能量从∂V流出去，以及电磁场对V内的实物粒子施加力，都会使得V内电磁场的动量减少。

18

- 数学上，动量守恒定律表示为：

$$-\frac{d}{dt}\int_V dV\,\vec{g} = \int_V dV\,\vec{f} + \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$



单位时间区域内减少的电磁场动量等于单位时间由区域边界流出的电磁场动量与电磁场对区域内实物粒子施加的力之和。

（后者等于单位时间区域内实物粒子增加的动量）

- 能量守恒定律可以写为微分形式：

$$-\partial_t\vec{g} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} + \vec{f} \quad \text{or} \quad \vec{f} = -\partial_t\vec{g} - \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

19

2. 动量守恒定理

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$$

$$= \varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + \varepsilon_0 c^2(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} - \varepsilon_0\partial_t\vec{E}\times\vec{B} \quad \text{（EG、AM）}$$

$$= -\partial_t(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}) + \varepsilon_0\vec{E}\times\partial_t\vec{B} \quad \text{（Leibnitz）}$$

$$+\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + \varepsilon_0 c^2(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}$$

$$= -\partial_t(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B})$$

$$+\varepsilon_0[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}] \quad \text{（F）}$$

$$+\varepsilon_0 c^2[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} + (\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}] \quad \text{（BG）}$$

20

由于

$$(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\nabla\times\vec{E})\times\vec{E} = (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + \vec{E}\cdot\nabla\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla(\vec{E}\cdot\vec{E})$$

$$= \nabla\cdot\left(\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right)$$

$$(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} + (\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} = \nabla\cdot\left(\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{I}\right)$$

因此

$$\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}) + \varepsilon_0\nabla\cdot\left(\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right) + \varepsilon_0 c^2\nabla\cdot\left(\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{I}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}) - \nabla\cdot\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2 + c^2B^2)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B})\right]$$

$$= -\partial_t\vec{g} - \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

21

电磁场的动量守恒定律

（积分形式） $-\frac{d}{dt}\int_V dV\,\vec{g} - \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T} = \int_V dV\,\vec{f}$

（微分形式） $-\partial_t\vec{g} - \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} = \vec{f}$

- **电磁场的动量密度**

$$\vec{g} \triangleq \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

- **电磁场的动量流密度**

$$\overleftrightarrow{T} \triangleq \frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2 + c^2B^2)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B})$$
$$= w\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B})$$

22

总动量守恒

将 V 取为全空间。若 $r\longrightarrow\infty$ 时，$\vec{E},\vec{B}\sim O(1/r)$，则

$$\int dV\,\vec{f} = -\frac{d}{dt}\int dV\,\vec{g}$$

即电磁场施加于实物上的力

等于场总动量的时间减小率。

因此，电磁场与带电粒子构成的体系的总动量守恒。

- 电磁场施加的作用等于实物粒子**力学动量**（记为 $\vec{P}$）增加的速率，若用 $\vec{G}$ 表示全空间电磁场的总动量，则

$$\frac{d(\vec{P}+\vec{G})}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{P}+\vec{G} = const.vector$$

23

- 事实上，由于

$$\rho = \sum_k e_k\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k(t)),\quad \vec{J} = \sum_k e_k\vec{v}_k(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k(t))$$

因而对于通过电磁作用的带电粒子系统

$$\int dV\,\vec{f} = \int dV\,(\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B})$$
$$= \sum_k e_k\int dV\,(\vec{E} + \vec{v}_k\times\vec{B})\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k)$$
$$= \sum_k e_k[\vec{E}(t,\vec{x}_k) + \vec{v}_k(t)\times\vec{B}(t,\vec{x}_k)]$$

根据Lorentz方程，有（其中 $\gamma_k = [1 - v_k^2/c^2]^{-1/2}$）

$$\vec{F} \triangleq \int dV\,\vec{f} = \frac{d\vec{P}}{dt},\quad \text{where } \vec{P} \triangleq \sum_k \gamma_k m_k\vec{v}_k$$

24

3. 动量流密度的含义

动量流密度张量的物理意义体现在

$d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$ =单位时间通过面元 $d\vec{\sigma}$ 流到区域 V 外部的动量。

因而，其分量 $T_{ij} \triangleq \hat{x}_i\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{x}_j$的含义也就明确了。

- 按照 Lorentz 方程或者 Newton 第二定律，$\overleftrightarrow{T}$ 穿过区域 V 边界的动量就是电磁场通过边界**施加给外部环境的力**：

$$\vec{F}_{\text{exterier}} = \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

区域V内的电磁场通过单位面积边界作用于外部环境的力称为**应力**。法向力称为**压力**，切向力称为**剪切力**。

25

【例】设空间存在着均匀的电场分布 $\vec{E}$。任取给定区域V内的电磁场通过∂V上单位面积（外法向$\hat{n}$）作用于外部的应力为

$$\vec{f}_n = \hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\hat{n} - \varepsilon_0(\hat{n}\cdot\vec{E})\vec{E}$$

$$\Longrightarrow \vec{f}_n = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2[\hat{n} - 2(\hat{n}\cdot\hat{E})\hat{E}]$$

若将电场方向定义为 x_3 轴，则

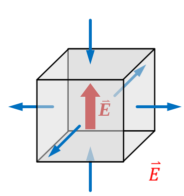
$$\vec{f}_n = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2[n_i\hat{x}_i - 2(n_i\hat{x}_i\cdot\hat{x}_3)\hat{x}_3]$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(n_1\hat{x}_1 + n_2\hat{x}_2 - n_3\hat{x}_3)$$

26

考察单位正方体，有

$$\begin{cases} \vec{f}_{\pm 1} = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\hat{x}_1 \\ \vec{f}_{\pm 2} = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\hat{x}_2 \\ \vec{f}_{\pm 3} = \mp\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\hat{x}_3 \end{cases}$$



- 电场方向的应力表现为“拉力”
- 垂直于电场方向的应力表现为“压缩力”
- 纵向拉力与横向压缩力大小相等，均为电场能量密度。

电场线好像是拉紧了的橡皮筋。场的各部分之间存在着作用力。即使在静电场情形下电场力的传递也不是超距的。

27

平面电磁波的力学性质

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_\perp\left(\hat{k}\cdot\vec{x} - kct\right),\quad c\vec{B}(t,\vec{x}) = \hat{k}\times\vec{E}(t,\vec{x})$$

- 能量密度

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2 + c^2B^2) \Longrightarrow w = \varepsilon_0 E^2$$

平面电磁波的电场和磁场对能量密度的贡献相同

- Poynting矢量

$$\vec{S} \triangleq \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = c\varepsilon_0 E^2\hat{k} \Longrightarrow \vec{S} = wc\hat{k}$$

平面电磁波的能量流动的方向就是波传播的方向

28

- 动量密度

$$\vec{g} = \varepsilon_0 c^2\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\vec{S}}{c^2} \Longrightarrow \vec{g} = \frac{w}{c}\hat{k}$$

平面电磁波的动量密度沿着能量流动的方向

- 动量流密度张量

$$\overleftrightarrow{T} = w\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B}\right) = w\overleftrightarrow{I} - w\left(\hat{E}\hat{E} + \hat{B}\hat{B}\right)$$

$$\Longrightarrow \overleftrightarrow{T} = w\hat{k}\hat{k}$$

29

单色平面电磁波的力学性质

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)},\quad c\vec{B} = \hat{k}\times\vec{E}$$

- 平均能量密度

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}_0\right|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}_0^*\cdot\vec{E}_0$$

- 平均动量密度和平均能流密度

$$\langle\vec{S}\rangle = \langle w\rangle c\hat{k} = c^2\langle\vec{g}\rangle$$

- 平均动量流密度张量

$$\langle\overleftrightarrow{T}\rangle = \langle w\rangle\hat{k}\hat{k}$$

30

4. Maxwell 应力张量

如果区域 V 内的电磁场动量不随时间变化，则**电磁场对区域 V 内的实物粒子施加的力**可以写为

$$\vec{F} \triangleq \int_V dV\,\vec{f} = -\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

因此，又将 $\overleftrightarrow{T}$ 的负值称为 **Maxwell应力张量**

$$-\overleftrightarrow{T} = \varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 + c^2B^2\right)\overleftrightarrow{I}$$

31

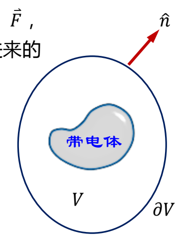
- 考察静电场，此时

$$\overleftrightarrow{T} \triangleq \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0\vec{E}\vec{E} = w_e\left(\overleftrightarrow{I} - 2\hat{E}\hat{E}\right)$$

因此，为求某个带电体受到的静电力 $\vec{F}$，只需任取一个将该带电体完全包含进来的闭曲面V即可。

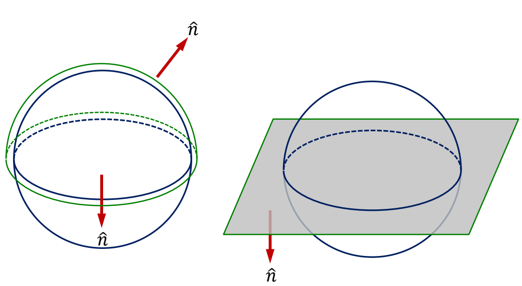
$$\vec{F} = -\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T} = -\oint_{\partial V} d\sigma\,\left(\hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{F} = -\oint_{\partial V} d\sigma\, w_e\left[2\left(\hat{n}\cdot\hat{E}\right)\hat{E} - \hat{n}\right]$$



32

【例】半径为 a、总电量为 Q 的均匀带电实心球，试计算其北半球受到的静电力（赤道面定义为 x_1x_2 平面）。



33

【解】北半球受到的力等于单位时间通过 x_1x_2 平面由下方流到上方的动量。由对称性，该力沿着 x_3 轴方向，因此

$$\vec{F}=F\hat{x}_3=-\hat{x}_3\oint_{\partial V}d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{x}_3=\hat{x}_3\oint_{\partial V}d\sigma\,\hat{x}_3\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{x}_3$$

由于 x_1x_2 平面上的电场与 x_3 轴垂直，因此

$$\hat{x}_3\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{x}_3=\hat{x}_3\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\left(\overleftrightarrow{I}-2\hat{r}\hat{r}\right)\cdot\hat{x}_3=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\triangleq w$$

所以

$$F=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}rdr\,w=2\pi\int_0^{\infty}wrdr$$

34

由于

$$\begin{cases}w_1=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0a^3}\right)^2=\dfrac{Q^2r^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^6}, & (r<a)\\ w_2=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2=\dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0r^4}, & (r>a)\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}F&=2\pi\left[\int_0^a w_1rdr+\int_a^{\infty}w_2rdr\right]\\&=\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0a^2}\left[\int_0^a\frac{r^3}{a^4}dr+\int_a^{\infty}\frac{a^2}{r^3}dr\right]\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow F=\frac{3}{16}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0a^2}$$

35

【例】质量为 m、电荷量为 e 的荷电粒子在静磁场 $\vec{B}$ 中运动。试求此粒子的总动量。设带电粒子速度远小于光速，其激发的电场可近似看作静电场。

【解】若粒子的运动速度为 $\vec{v}$，则其机械动量为 $m\vec{v}$。此外，此粒子因为荷电将在周围空间激发静电场，从而粒子周围空间中的总场既有电场成分又有磁场成分的电磁场。鉴于静电场不能脱离荷电粒子独立存在，此情形中电磁场的总动量可以看作带电粒子动量的一部分。

设带电粒子激发的电场为 $\vec{E}$，磁场的矢量势为 $\vec{A}$，则电磁动量为

$$\vec{G}\triangleq\int dV\,\vec{g}=\varepsilon_0\int dV\,\vec{E}\times\vec{B}=\varepsilon_0\int dV\,\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)$$

36

利用 Leibniz 法则，有

$$\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A})=(\nabla\vec{A})\cdot\vec{E}-(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{A}$$
$$=[\nabla(\vec{A}\cdot\vec{E})-(\nabla\vec{E})\cdot\vec{A}]-[\nabla\cdot(\vec{E}\vec{A})-(\nabla\cdot\vec{E})\vec{A}]$$

静电场无旋意味着 $\nabla\vec{E}$ 是对称张量，故上式第二项

$$(\nabla\vec{E})\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\nabla\vec{E}=\nabla\cdot(\vec{A}\vec{E})-(\nabla\cdot\vec{A})\vec{E}$$

若采用**Coulomb规范**，则

$$(\nabla\vec{E})\cdot\vec{A}=\nabla\cdot(\vec{A}\vec{E})$$

所以

$$\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A})=(\nabla\cdot\vec{E})\vec{A}+\nabla\cdot[(\vec{A}\cdot\vec{E})\overleftrightarrow{I}-(\vec{A}\vec{E}+\vec{E}\vec{A})]$$

37

因此，利用（物理、数学）Gauss 定理得到

$$\vec{G}=\varepsilon_0\int dV\,(\nabla\cdot\vec{E})\vec{A}+\varepsilon_0\int dV\,\nabla\cdot[(\vec{A}\cdot\vec{E})\overleftrightarrow{I}-(\vec{A}\vec{E}+\vec{E}\vec{A})]$$
$$=\int dV\,\rho\vec{A}+\varepsilon_0\int d\vec{\sigma}\cdot[(\vec{A}\cdot\vec{E})\overleftrightarrow{I}-(\vec{A}\vec{E}+\vec{E}\vec{A})]$$

由于当$r\longrightarrow\infty$ 时，$\vec{E}\sim 1/r^2$，$\vec{A}\sim 1/r$（局域电流），$d\sigma=r^2d\Omega$，因此上面的面积分为零。如果设粒子轨道为 $\vec{x}_0(t)$，那么

$$\vec{G}=\int dV\,e\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)\vec{A}(\vec{x})=e\vec{A}(\vec{x}_0)$$

因此，带电粒子在外磁场中运动时的总动量（**正则动量**）为

$$\vec{P}=m\vec{v}+e\vec{A}$$

38

- 磁场的矢势本身也具有鲜明的物理意义：它是单位点电荷处于此磁场中获得的电磁动量。
- 带电粒子的动量不仅与参考系的选择有关，也与规范选择有关。换言之，即使带电粒子在某个参考系中静止不动，它在此参考系中也可能具有非零的动量。

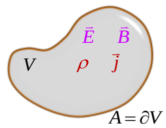
【思考】两个运动点电荷之间的 Lorentz 力在一般情形下满足牛顿第三定律吗？服从动量守恒定律吗？为什么 ？

39

三、电磁场的角动量

动量守恒定律

$$\vec{f} = -\partial_t \vec{g} - \nabla \cdot \vec{T}$$



用位置矢量叉乘上式，得到

$$\begin{aligned}\vec{x}\times\vec{f} &= -\vec{x}\times\partial_t\vec{g} - \vec{x}\times(\nabla\cdot\vec{T}) \\ &= -\partial_t(\vec{x}\times\vec{g}) + \nabla\cdot(\vec{T}\times\vec{x}) \\ &= -\partial_t \vec{l}_{\text{em}} - \nabla\cdot\vec{R}\end{aligned}$$

40

电磁场的角动量守恒定律

（积分形式）$-\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_V dV\, \vec{l}_{\text{em}} - \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{R} = \int_V dV\, \vec{x}\times\vec{f}$

（微分形式）$-\partial_t \vec{l}_{\text{em}} - \nabla\cdot\vec{R} = \vec{x}\times\vec{f}$

- **电磁场（相对于O点）的角动量密度**

$$\vec{l}_{\text{em}} \triangleq \vec{x}\times\vec{g}$$

- **电磁场（相对于O点）的角动量流密度**

$$\vec{R} \triangleq -\vec{T}\times\vec{x}$$

41

【例】半径为 a、带电量为 Q 的铁磁性金属球被均匀磁化，磁化强度为 $\vec{M}$，电荷在球表面均匀分布。
（1）试计算球的电磁角动量；
（2）试计算在去磁过程中球获得的力学角动量。

【解】(1) 由Gauss定理得到球内电场为零，而

$$\vec{E}_{\text{out}} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad (r>a)$$

可证明：均匀磁化介质球激发的磁场为

$$\begin{cases}\vec{B}_{\text{in}} = \dfrac{2}{3}\mu_0\vec{M}, & (r<a) \\ \vec{B}_{\text{out}} = \dfrac{\mu_0 a^3}{3r^3}\left[3(\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{M}\right], & (r>a)\end{cases}$$

42

【例】半径为 a、带电量为 Q 的铁磁性金属球被均匀磁化，磁化强度为 $\vec{M}$，电荷在球表面均匀分布。
（1）试计算球的电磁角动量；
（2）试计算在去磁过程中球获得的力学角动量。

【解】(1) 由Gauss定理得到球内电场为零，而

$$\vec{E}_{\text{out}} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad (r > a)$$

可证明：均匀磁化介质球激发的磁场为

$$\begin{cases} \vec{B}_{\text{in}} = \dfrac{2}{3}\mu_0\vec{M}, \quad (r < a) \\ \vec{B}_{\text{out}} = \dfrac{\mu_0 a^3}{3r^3}\left[3(\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{M}\right], \quad (r > a) \end{cases}$$

43

电磁场只有在球外有非零的动量，密度为

$$\vec{g} = \varepsilon_0\vec{E}_{\text{out}} \times \vec{B}_{\text{out}} = \varepsilon_0\frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times \frac{\mu_0 a^3}{3r^3}\left[3(\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{M}\right]$$

$$\Longrightarrow \vec{g} = \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi r^5}\vec{M}\times\hat{r}, \quad (r > a)$$

电磁场相对于球心的角动量密度为（球外）

$$\vec{l}_{\text{em}} = \vec{x}\times\vec{g} = \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi r^4}\hat{r}\times(\vec{M}\times\hat{r}) = \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi r^4}\left[\vec{M} - (\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r}\right]$$

$$\Longrightarrow \vec{l}_{\text{em}} = \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi r^4}(M_i - M_j n_j n_i)\hat{x}_i, \quad (r > a)$$

其中 n_i 是径向单位矢量的直角分量。

44

总的电磁角动量为

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{em}} &= \int_{r>a} dV\,\vec{l}_{\text{em}} \\ &= \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi}\cdot\int_a^\infty \frac{dr}{r^2}\cdot\left[M_i\oint d\Omega - M_j\oint n_i n_j d\Omega\right]\hat{x}_i \\ &= \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi}\cdot\frac{1}{a}\cdot\left[M_i\cdot 4\pi - M_j\cdot\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\right]\hat{x}_i \end{aligned}$$

因此

$$\vec{L}_{\text{em}} = \frac{2\mu_0 Q a^2}{9}M_i\hat{x}_i = \frac{2}{9}\mu_0 Q a^2\vec{M}$$

45

(2) **方法一：**去磁过程中磁场减小诱导出的电场对球面上的电荷施加力矩。对称性意味着涡旋电场 $\vec{E}'=\vec{E}'(r,\theta)\hat{\phi}$，选择以 x_3 轴为对称轴、半径为 a 的圆 C 作为闭合曲线，由Faraday定律有

$$2\pi a\sin\theta\cdot E'=-\dot{B}_{\text{in}}\cdot\pi a^2\sin^2\theta \Longrightarrow \vec{E}'=-\frac{a\sin\theta}{2}\dot{B}_{\text{in}}\hat{\phi}$$

作用于球上的力矩为

$$\vec{\tau}=\frac{Q}{4\pi a^2}\oint_S d\sigma\left(a\hat{r}\times\vec{E}'\right)=\hat{x}_3\frac{Q}{4\pi a^2}\oint_S d\sigma\,(aE'\sin\theta)=-\frac{1}{3}Qa^2\dot{\vec{B}}_{\text{in}}$$

由角动量定理得到

$$\vec{L}_{\text{mech}}=\int_0^\infty\vec{\tau}dt=\frac{1}{3}Qa^2\vec{B}_{\text{in}}(t=0)=\frac{2}{9}\mu_0Qa^2\vec{M}$$

正如角动量守恒所预期的，有 $\vec{L}_{\text{mech}}=\vec{L}_{\text{em}}$。

46

（2）**方法二：**去磁过程中，感应电场对球面上的电荷施加力矩

$$\begin{aligned}\vec{\tau}&=\frac{Q}{4\pi a^2}\oint_{r=a}d\sigma\left(a\hat{r}\times\vec{E}\right)\\&=\frac{Q}{4\pi a}\oint_{r=a}d\vec{\sigma}\times\vec{E}\\&=\frac{Q}{4\pi a}\int_{r<a}dV\,\nabla\times\vec{E}\\&=\frac{Q}{4\pi a}\int_{r<a}dV\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\\&=-\frac{Q}{4\pi a}\frac{d}{dt}\int_{r<a}dV\vec{B}\end{aligned}$$

47

由角动量定理得到金属球最终获得的（力学）角动量为

$$\vec{L}_{\text{mech}}=\int_0^\infty\vec{\tau}dt=\frac{Q}{4\pi a}\left[\int_{r<a}dV\vec{B}\right]_{t=0}$$

由于初始时，球内的磁场 $\vec{B}_{\text{in}}$ 均匀，因而

$$\vec{L}_{\text{mech}}=\frac{Q}{4\pi a}\cdot\frac{4\pi a^3}{3}\vec{B}_{\text{in}}=\frac{2}{9}\mu_0Qa^2\vec{M}$$

即初始时电磁场的角动量完全转移给实物金属球，金属球最终会绕着初始磁矩的方向转动起来（设 $Q>0$）。

【思考】初始时磁场是否提供力矩？去磁过程中，电场也会变化，从而激发新的磁场成分，是否有必要将磁场提供的力矩考虑进来？若有必要，我们的结论会否因此而改变？为什么？

48

四、电磁场-介质系统的守恒定律

束缚电荷、束缚电流是作为对场的响应以因变量的方式出现的。从实际应用角度，需要分析外界克服电磁力对自由电荷的功、冲量和冲量距，并建立相应的能量、动量、角动量守恒定理。

- 以做功为例：由 $\vec{J}_f=\vec{J}-\vec{J}'$ 得到 $-\vec{E}\cdot\vec{J}_f=-\vec{E}\cdot\vec{J}+\vec{E}\cdot\vec{J}'$

  $-\vec{E}\cdot\vec{J}_f$——外界对传导电流（搬运自由电荷）的功率密度。

  $-\vec{E}\cdot\vec{J}$——外界对总电流（搬运全部电荷）的功率密度：转化为电磁能。

  $+\vec{E}\cdot\vec{J}'$——电磁场对束缚电流（搬运束缚电荷）的功率密度：一部分电磁能转化为介质的内部能量（极化能、磁化能、热能……）。

49

- 外界对自由电荷的冲量和冲量矩存在类似结果：一部分转化为电磁动量和角动量，另一部分以某种方式转移给介质。

- 是否存在相应的能量、动量和角动量守恒定理，取决于转移给介质的部分能否写成介质电磁参量（与其他参量例如温度无关）的态函数，后者与介质的电磁特性有关。

50

1. 功率密度

电磁场对自由电荷、传导电流的功率密度为

$$\vec{E}\cdot\vec{J}_f=\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})-\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}\quad\text{（AM）}$$

$$=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}\quad\text{（Leibnitz）}$$

$$\Longrightarrow\ \vec{E}\cdot\vec{J}_f=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})-\underbrace{(\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}+\vec{H}\cdot\partial_t\vec{B})}_{\text{非纯时间偏导数项}}\quad\text{（F）}$$

【结论】有介质存在时，对自由电荷、传导电流的功一般与过程有关，不能化为标准的守恒形式。

51

对介质的附加条件

对于线性、无色散、无损耗介质：

(参考教材例2.13和例3.7)

$$\vec{D}=\vec{\vec{\varepsilon}}\cdot\vec{E},\quad \vec{B}=\vec{\vec{\mu}}\cdot\vec{H},\quad \text{where } \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}, \mu_{ij}=\mu_{ji}$$

$$\begin{cases}\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}=\vec{E}\cdot\partial_t(\vec{\vec{\varepsilon}}\cdot\vec{E})=\vec{E}\cdot\vec{\vec{\varepsilon}}\cdot\partial_t\vec{E}=\vec{D}\cdot\partial_t\vec{E}\\ \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}=\vec{H}\cdot\partial_t(\vec{\vec{\mu}}\cdot\vec{H})=\vec{H}\cdot\vec{\vec{\mu}}\cdot\partial_t\vec{H}=\vec{B}\cdot\partial_t\vec{H}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}=\partial_t\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right),\quad \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}=\partial_t\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

化为纯时间偏导数

线　性： $\vec{\vec{\varepsilon}}$和$\vec{\vec{\mu}}$与电磁场无关

无色散： $\vec{\vec{\varepsilon}}$和$\vec{\vec{\mu}}$与电磁场的时间变化率（频率）无关

无损耗： $\vec{\vec{\varepsilon}}$和$\vec{\vec{\mu}}$为实数量

52

能量守恒定律

电磁场—线性、无色散、无损耗介质系统的能量守恒定律为

（积分形式）$-\frac{d}{dt}\int_V dV\, w-\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}=\int_V dV\,\vec{E}\cdot\vec{J}_f$

（微分形式）$-\partial_t w-\nabla\cdot\vec{S}=\vec{E}\cdot\vec{J}_f$

- **电磁场的能量密度**

$$w\triangleq\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

- **电磁场的能流密度（Poynting矢量）**

$$\vec{S}\triangleq\vec{E}\times\vec{H}$$

53

介质界面上的能量守恒

对于分区均匀（线性、无色散、无损耗）的介质，能量守恒定律在介质界面处表现为边值关系：

$$\hat{n}\cdot(\vec{S}_2-\vec{S}_1)=0$$

即Poynting矢量的法向分量连续：从一侧流入界面的电磁场能量，等于从另一侧流出的电磁场能量。

54

2. 力密度

电磁场对自由电荷、传导电流施加的力密度为

$$
\begin{aligned}
&\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}\\
&=(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E}+(\nabla\times\vec{H})\times\vec{B}-\partial_t\vec{D}\times\vec{B} \quad \text{(EG、AM)}\\
&=-\partial_t(\vec{D}\times\vec{B})+(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E}+(\nabla\times\vec{H})\times\vec{B}+\vec{D}\times\partial_t\vec{B} \quad \text{(Leibnitz)}\\
&=-\partial_t(\vec{D}\times\vec{B})+(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E}+(\nabla\times\vec{E})\times\vec{D} \quad \text{(F)}\\
&\qquad +(\nabla\cdot\vec{B})\vec{H}+(\nabla\times\vec{H})\times\vec{B} \quad \text{(BG)}\\
&=-\partial_t(\vec{D}\times\vec{B})+\nabla\cdot(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H}) \quad \text{(Leibnitz)}\\
&\qquad \underline{-[(\nabla\vec{E})\cdot\vec{D}+(\nabla\vec{H})\cdot\vec{B}]} \quad \text{非全散度项}
\end{aligned}
$$

【结论】有介质存在时，对自由电荷、传导电流的冲量不能化为标准的守恒形式。

对介质的附加条件

对于线性、均匀介质：

$$
\begin{cases}
(\nabla\vec{E})\cdot\vec{D}=(\nabla\vec{E})\cdot\vec{\vec{\varepsilon}}\cdot\vec{E}=\nabla(\vec{E}\cdot\vec{\vec{\varepsilon}})\cdot\vec{E}=(\nabla\vec{D})\cdot\vec{E}\\
(\nabla\vec{H})\cdot\vec{B}=(\nabla\vec{H})\cdot\vec{\vec{\mu}}\cdot\vec{H}=\nabla(\vec{H}\cdot\vec{\vec{\mu}})\cdot\vec{H}=(\nabla\vec{B})\cdot\vec{H}
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow (\nabla\vec{E})\cdot\vec{D}+(\nabla\vec{H})\cdot\vec{B}=\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)
$$

化为纯散度项 $=\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\vec{\vec{I}}\right]$

线性： $\vec{\vec{\varepsilon}}$和$\vec{\vec{\mu}}$与电磁场无关

均匀： $\vec{\vec{\varepsilon}}$和$\vec{\vec{\mu}}$与空间位置无关

动量守恒定律

电磁场–线性、均匀介质系统的动量守恒定律为

（积分形式） $-\frac{d}{dt}\int_V dV\,\vec{g}-\oint_{\partial V}d\vec{\sigma}\cdot\vec{\vec{T}}=\int_V dV\,(\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B})$

（微分形式） $-\partial_t\vec{g}-\nabla\cdot\vec{\vec{T}}=\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}$

- **电磁场的动量密度**

$$\vec{g}\triangleq\vec{D}\times\vec{B}$$

- **电磁场的动量流密度**

$$\vec{\vec{T}}\triangleq\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\vec{\vec{I}}-(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H})$$

介质界面上的动量守恒

利用动量守恒定律：

$$-\partial_t\vec{g}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}=\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}$$

在简单介质交界面附近

$$\hat{n}\cdot\left(\overleftrightarrow{T}_2-\overleftrightarrow{T}_1\right)=0$$

- 该动量守恒定理要求介质**均匀**，不能用来导出边值关系。

正确的方法应从非均匀介质中的动量守恒关系出发。

58

正确的方法应从非均匀介质中的动量守恒关系出发：

$$\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}=-\partial_t\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)+\nabla\cdot\left(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H}\right)$$
$$-\left[\left(\nabla\vec{E}\right)\cdot\vec{D}+\left(\nabla\vec{H}\right)\cdot\vec{B}\right]$$

对于线性、各向同性、无色散、非均匀（ε和μ依赖于$\vec{x}$）介质，满足本构关系$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$和$\vec{B}=\mu\vec{H}$，因而

$$\begin{cases}\left(\nabla\vec{E}\right)\cdot\vec{D}=\left(\nabla\vec{E}\right)\cdot\varepsilon\vec{E}=\nabla\left(\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\right)-\dfrac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon\\[2ex]\left(\nabla\vec{H}\right)\cdot\vec{B}=\left(\nabla\vec{H}\right)\cdot\mu\vec{H}=\nabla\left(\dfrac{1}{2}\mu H^2\right)-\dfrac{1}{2}H^2\nabla\mu\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}-\frac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon-\frac{1}{2}H^2\nabla\mu=-\partial_t\vec{g}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

59

定义 **Minkowski 力密度：**

$$\vec{f}_M\triangleq\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}-\frac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon-\frac{1}{2}H^2\nabla\mu$$

因而简单介质中的动量守恒定律写为（Minkowski，1908）

$$\vec{f}_M=-\partial_t\vec{g}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

介质界面处单位面积受到的力：

$$\frac{d\vec{F}}{d\sigma}=-\hat{n}\cdot\left(\overleftrightarrow{T}_2-\overleftrightarrow{T}_1\right)$$

介质界面上的**压强**为：

$$p=\hat{n}\cdot\frac{d\vec{F}}{d\sigma}=\hat{n}\hat{n}:\left(\overleftrightarrow{T}_1-\overleftrightarrow{T}_2\right)$$

【思考】请调研 Abraham 力密度并将其与 Minkowski 力密度对比。

60

3. 角动量守恒定律

对于线性、均匀、各向同性介质，由于动量流密度为对称张量，因而可仿照真空情形给出

$$\vec{x}\times\left(\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}\right)=-\partial_t(\vec{x}\times\vec{g})-\nabla\cdot\left(-\overleftrightarrow{T}\times\vec{x}\right)$$

这就是电磁场—线性、均匀、各向同性介质系统的角动量守恒定律。

61