# §5 电磁场的波动性



## 一、基本方程

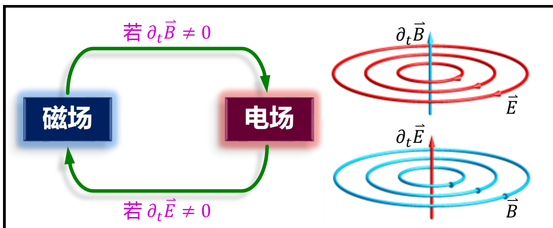
自由空间中，电磁场满足齐次 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}, & \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E}, & \nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$$

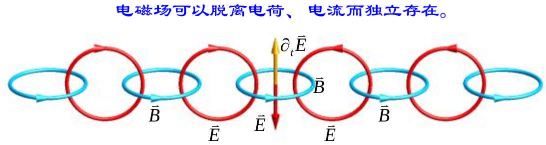
- 两个旋度方程可看作电磁场关于时间的一阶微分方程，已知 $\vec{E}(0,\vec{x})$和$\vec{B}(0,\vec{x})$，此二方程足以唯一确定$\vec{E}(t,\vec{x})$和$\vec{B}(t,\vec{x})$。
- 两个散度方程可视为对场的约束（**无散条件**：未必是横波条件 ）。若$\vec{E}(0,\vec{x})$和 $\vec{B}(0,\vec{x})$散度为零，则两个旋度方程保证了：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}(0,\vec{x}) = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B}(0,\vec{x}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0 \end{cases}$$






变化的 $\vec{E}$ 和变化的 $\vec{B}$ 相互耦合，相互为源，
电磁场可以脱离电荷、电流而独立存在。



## 二、波动方程

用 $\partial_t$ 作用于 Faraday 定律上，得到

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla\times(-\partial_t\vec{B})=-\partial_t(\nabla\times\vec{B})=-\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\vec{E}$$

而由于无散条件，我们有

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla\boxed{(\nabla\cdot\vec{E})}-\nabla^2\vec{E}$$

由此得到

$$\nabla^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\vec{E}$$

若用 $\partial_t$作用于 Ampere−Maxwell 定律上，类似可得到

$$\nabla^2\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\vec{B}$$

**自由空间中，电磁场的每一个笛卡尔分量都满足波动方程。**

4

- 自由空间中，电场、磁场形式上可以分离：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, & \nabla\cdot\vec{E}=0 \quad \text{电波动方程＋无散条件}\\ \nabla^2\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, & \nabla\cdot\vec{B}=0 \quad \text{磁波动方程＋无散条件}\end{cases}$$

其中 $c$ 为**真空中的光速**：

$$c\triangleq\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

- 但不能代替 Maxwell 方程，还需要考虑电场与磁场的联系：

$$\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B},\quad \nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$$

5

求解自由空间中电磁场的基本方程可以写为

$$\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla\cdot\vec{E}=0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

- 给定$t=0$时刻的$\vec{E}$（无散）和$\partial_t\vec{E}$，波动方程就足以确定 $\vec{E}(t,\vec{x})$，而由Faraday定律和$t=0$时刻的$\vec{B}$又可确定 $\vec{B}(t,\vec{x})$。

$$\vec{E}(0,\vec{x})\text{ and }\vec{B}(0,\vec{x})\quad\Longrightarrow\quad\vec{E}(0,\vec{x})\text{ and }\partial_t\vec{E}(0,\vec{x})$$

- 自由空间中电磁场的基本方程也可写为：

$$\nabla^2\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad \nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

6

**【例】**如果自由空间的电磁场只依赖于一个空间坐标 $z$，即

$$\vec{E}=\vec{E}(t,z),\quad \vec{B}=\vec{B}(t,z)$$

试确定电磁场的一般表达式。

## 波动方程对解的限制

电场满足波动方程

$$0=\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E}$$

引入新变量 $\xi=z+ct$ 和 $\eta=z-ct$，方程简化为

$$4\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

7

**【结论1】**波动方程有两个独立的**平面行波解**：

$$\vec{E}_+(t,z)=\vec{f}(z+ct),\quad \vec{E}_-(t,z)=\vec{g}(z-ct)$$

其中 $\vec{f}(\xi)$ 和 $\vec{g}(\eta)$ 是两个任意矢量函数。

$\vec{f}(z+ct)$：沿着 $z$ 轴负向以速度 $c$ 传播；
在平面 $z+ct=const.$ 上 $\vec{f}$ 取相同的值；

$\vec{g}(z-ct)$：沿着 $z$ 轴正向以速度 $c$ 传播；
在平面 $z-ct=const.$ 上 $\vec{g}$ 取相同的值；

**【结论2】**波动方程的一般解为：

$$\vec{E}(t,z)=\vec{f}(z+ct)+\vec{g}(z-ct)$$

8

## 无散条件对电场的限制

由于

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

因此，对于每一个独立的平面行波解，电场的 $z$ 分量至多只是一个常数，不妨设其为零。

**【结论3】**两个独立平面行波解的电场均与传播方向垂直，谓之**横电（TE）**，即有

$$\vec{E}_+(t,z)=\vec{f}_\perp(z+ct),\quad \vec{E}_-(t,z)=\vec{g}_\perp(z-ct)$$

9

## 与电场联系的磁场

由 Faraday 定律可得分别与$\vec{E}_{\pm}$相伴的$\vec{B}_{\pm}$满足：

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix}\vec{B}_{+}(t,z)\\ \vec{B}_{-}(t,z)\end{Bmatrix} = -\hat{z}\times\frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix}\vec{E}_{+}(t,z)\\ \vec{E}_{-}(t,z)\end{Bmatrix} = -\hat{z}\times\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix}+\vec{E}_{+}(t,z)\\ -\vec{E}_{-}(t,z)\end{Bmatrix}$$

由此确定的 $\vec{B}_{\pm}$ 可相差一个与时间 $t$ 无关的任意函数，不妨取该任意函数为零。

**【结论4】**与电场的两个独立解对应的磁场分别为：

$$c\vec{B}_{+}(t,z) = -\hat{z}\times\vec{E}_{+}(t,z),\quad c\vec{B}_{-}(t,z) = +\hat{z}\times\vec{E}_{-}(t,z)$$

即每个平面行波解的磁场与传播方向垂直，谓之**横磁（TM）**。

10

## 横电磁波

- 每一个独立的平面行波解$\{\vec{E}_{+},\vec{B}_{+}\}$和$\{\vec{E}_{-},\vec{B}_{-}\}$，电场与磁场均与传播方向垂直，这样的电磁场称为**横电磁波（TEM）**：

  $\left(\vec{E}_{+},\quad c\vec{B}_{+} = -\hat{z}\times\vec{E}_{+},\quad -\hat{z}\right)$ 两两垂直且构成右手系；

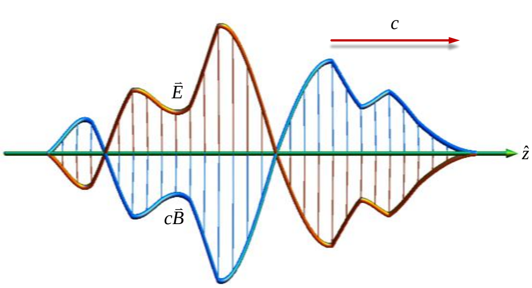
  $\left(\vec{E}_{-},\quad c\vec{B}_{-} = +\hat{z}\times\vec{E}_{+},\quad +\hat{z}\right)$ 两两垂直且构成右手系；

- 一般解为两个沿着相反方向传播的波的叠加

  $$\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-},\quad c\vec{B} = c\vec{B}_{+} + c\vec{B}_{-} = -\hat{z}\times\vec{E}_{+} + \hat{z}\times\vec{E}_{-}$$

  该解多少具有驻波的特性，而且电磁场一般并不正交。

11




12

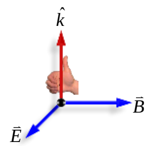
## 三、平面行波解

沿着**波矢量** $\vec{k}$ 的方向传播的平面电磁波为：

$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_{\perp}(\phi),\quad c\vec{B}(t,\vec{x}) = \hat{k}\times\vec{E}_{\perp}(\phi)$

其中，无量纲函数 $\phi$ 称为波的**相位**：

$\phi \triangleq \vec{k}\cdot\vec{x} - kct$

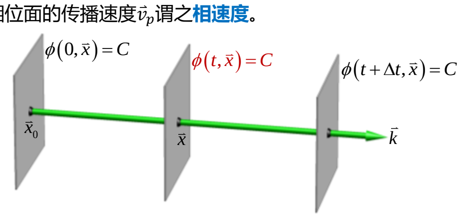



- 单色平面波传播的速度为真空中的光速 $c$。
- $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ 两两正交、构成右手系、且 $E = cB$。
- 在任一特定时刻，等相位面（$\phi = const.$）上$\vec{E}$和$\vec{B}$皆均匀。



### 1. 相速度

等相位面的传播速度$\vec{v}_p$谓之**相速度**。




**【方法一】**相速度等于等相位面上相应点的传播速度

$\phi(t,\vec{x}) = \vec{k}\cdot\vec{x} - kct = \vec{k}\cdot(\vec{x}-\hat{k}ct) = \vec{k}\cdot\vec{x}_0 = \phi(0,\vec{x}_0)$

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + \hat{k}ct \quad \Rightarrow \vec{v}_p = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = c\hat{k}$



**【方法二】**由$\phi(t,\vec{x}) = \vec{k}\cdot\vec{x} - kct = const.$可得

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\nabla\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \vec{k}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} - kc = 0$$

$$\Rightarrow v_p = \hat{k}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} = c$$

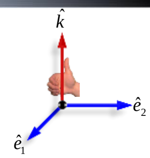
**【思考】**请直接验证：平面电磁波

$\vec{E} = \vec{E}_{\perp}(\vec{k}\cdot\vec{x} - kct),\quad c\vec{B} = \hat{k}\times\vec{E}_{\perp}(\vec{k}\cdot\vec{x} - kct),\quad (\vec{k}\cdot\vec{E}_{\perp} = 0)$

满足自由空间的 Maxwell 方程组。

## 四、单色平面波

单频率的平面电磁波称为**单色平面波**。




- 定义与波矢量 $\vec{k}$ 垂直的两个单位矢量：

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0, \quad \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k}$$

- 由此，单色平面波的电磁场可表示为

$$\begin{cases} \vec{E}(t,\vec{x}) = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 = A_1\cos(\phi+\delta_1)\,\hat{e}_1 + A_2\cos(\phi+\delta_2)\,\hat{e}_2 \\ c\vec{B}(t,\vec{x}) = \hat{k}\times\vec{E}(t,\vec{x}) \end{cases}$$

其中$\phi \triangleq \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$，而$\omega = kc$。$\delta_{1,2}$称为$E_{1,2}$的**初相位**。

**【注】**重要的是电场两个分量的**相位差**：$\delta \triangleq \delta_2 - \delta_1$

16

## 1. 电磁波的偏振

利用

$$E_1 = A_1\cos(\phi+\delta_1), \quad E_2 = A_2\cos(\phi+\delta_2)$$

可得

$$\begin{cases} \dfrac{E_1}{A_1}\sin\delta_2 - \dfrac{E_2}{A_2}\sin\delta_1 = \cos\phi\sin(\delta_2-\delta_1) \\ \dfrac{E_1}{A_1}\cos\delta_2 - \dfrac{E_2}{A_2}\cos\delta_1 = \sin\phi\sin(\delta_2-\delta_1) \end{cases}$$

两式平方求和得到（其中$\delta \triangleq \delta_2 - \delta_1$）：

$$\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{A_2}\right)^2 - 2\frac{E_1}{A_1}\frac{E_2}{A_2}\cos\delta = \sin^2\delta$$

17

在 $\hat{e}_1 - \hat{e}_2$平面内，电场矢尖所绘曲线的一般形状是椭圆：

$$\left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{A_2}\right)^2 - 2\frac{E_1}{A_1}\frac{E_2}{A_2}\cos\delta = \sin^2\delta$$

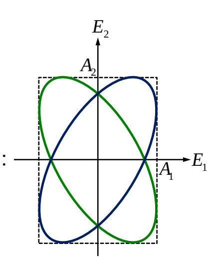
- **线偏振：** $\sin\delta = 0$ ：

$$\frac{E_1}{A_1} = \pm\frac{E_2}{A_2}$$

- **圆偏振：** $\cos\delta = 0$ 且 $A_1 = A_2 \triangleq A$ ：

$$E_1^2 + E_2^2 = A^2$$

- **椭圆偏振：**其他情形。




18

考察原点处电场矢尖的轨迹。不妨设 $\delta_1 = 0$，从而$\delta = \delta_2$：

$$E_1 = A_1 \cos \omega t\,,\quad E_2 = A_2 \cos(\omega t - \delta)$$

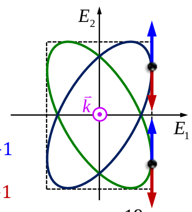
在 $t = 0$ 时刻，有

$$(E_1,\quad E_2) = (A_1,\quad A_2 \cos \delta),\quad (\dot{E}_1,\quad \dot{E}_2) = (0,\quad \omega A_2 \sin \delta)$$

- **右旋椭圆偏振**：$\sin \delta > 0$ 。
- **左旋椭圆偏振**：$\sin \delta < 0$。
- 对于圆偏振，

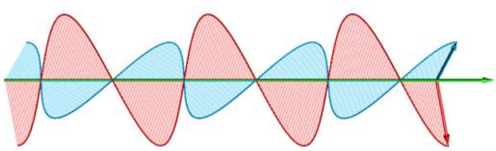
  （1）**右旋圆偏振（RCP）**：$\sin \delta = +1$

  （2）**左旋圆偏振（LCP）**：$\sin \delta = -1$



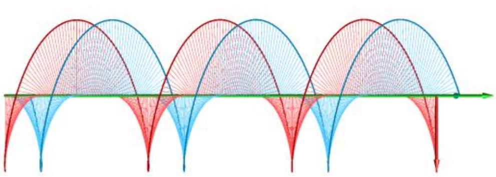

19

## 线偏振



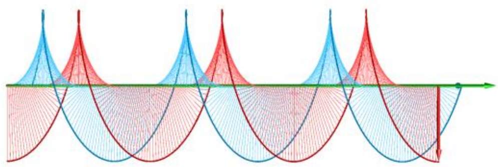
20

## 右旋圆偏振



21

### 左旋圆偏振



22

## 2. 偏振度

定义单色平面波的**偏振度**

$$\tilde{R} \triangleq \frac{A_2}{A_1} e^{i\delta} = \frac{A_2}{A_1} e^{i(\delta_2-\delta_1)}$$

- 线偏振：$\mathrm{Im}\,\tilde{R} = 0$
- 椭圆偏振：$\mathrm{Im}\,\tilde{R} \neq 0 \begin{cases} \text{右旋圆偏振：} \mathrm{Im}\,\tilde{R} > 0 \\ \text{左旋圆偏振：} \mathrm{Im}\,\tilde{R} < 0 \end{cases}$
- 圆偏振：$\tilde{R} = \pm i \begin{cases} \text{右旋圆偏振（RCP）：} \tilde{R} = +i \\ \text{左旋圆偏振（LCP）：} \tilde{R} = -i \end{cases}$

23

## 3. 单色平面波的复数表示

用下面的复数描述单色平面波是极为方便的：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\phi} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad c\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E}$$

其中$\vec{E}_0$为**复振幅**，它可用两个**线偏振基**$\hat{e}_1$和$\hat{e}_2$表示为

$$\vec{E}_0 = E_{01}\hat{e}_1 + E_{02}\hat{e}_2 = A_1 e^{i\delta_1}\hat{e}_1 + A_2 e^{i\delta_2}\hat{e}_2$$

- 物理的电场是其实部，复数描述与真实的场是一一对应的

$$\mathrm{Re}\,\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0 e^{i\phi}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\phi}$$

- **偏振度：**

$$\tilde{R} \triangleq \frac{E_{02}}{E_{01}} = \frac{A_2}{A_1} e^{i\delta}$$

24

## 圆偏振基

定义**圆偏振（复）基矢量**

$$\begin{cases} \hat{e}_+ \triangleq \dfrac{\hat{e}_1 + i\hat{e}_2}{\sqrt{2}} & \text{（右旋圆偏振基矢）} \\ \hat{e}_- \triangleq \dfrac{\hat{e}_1 - i\hat{e}_2}{\sqrt{2}} & \text{（左旋圆偏振基矢）} \end{cases}$$

- 圆偏振基满足

$$\hat{e}_- = \hat{e}_+^*, \quad \hat{e}_\pm^* \cdot \hat{e}_\pm = 1, \quad \hat{e}_\pm^* \cdot \hat{e}_\mp = 0$$

- 单色平面波也可视为左旋和右旋偏振波的叠加：

$$\vec{E} = (E_+\hat{e}_+ + E_-\hat{e}_-)e^{i\phi}, \quad E_\pm = \hat{e}_\pm^* \cdot \vec{E}_0$$

25

**【例】**自由空间的电磁波，其电场的复表示如下，试写出真实的电场和磁场（其中的 $k$ 与 $\omega$ 均大于零）：

$$\vec{E} = \frac{A}{2}(\hat{x} + i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)} + \frac{A}{2}(\hat{x} + i\hat{y})e^{i(kz+\omega t)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$\vec{E}_1$ 为沿着正 $z$ 轴方向传播的 RCP；

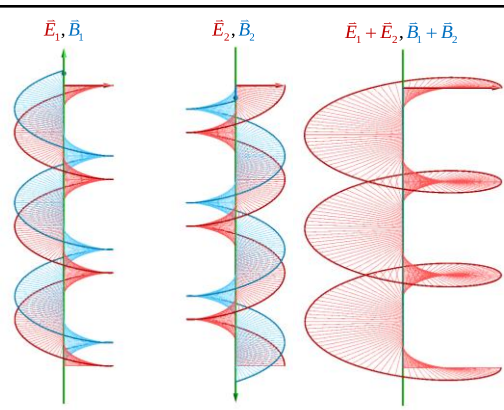
$\vec{E}_2$ 为沿着负 $z$ 轴方向传播的 LCP。

**【解】**

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = A(\hat{x} + i\hat{y})e^{ikz}\cos\omega t \\ c\vec{B} = \hat{z} \times \vec{E}_1 - \hat{z} \times \vec{E}_2 = -A(\hat{x} + i\hat{y})e^{ikz}\sin\omega t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\,\vec{E} = A(\hat{x}\cos kz - \hat{y}\sin kz)\cos\omega t \\ \mathrm{Re}(c\vec{B}) = -A(\hat{x}\cos kz - \hat{y}\sin kz)\sin\omega t \end{cases}$$

26



**【例】** 自由空间的电磁波，其电场的复表示如下，试写出真实的电场和磁场（其中的 $k$ 与 $\omega$ 均大于零）：

$$\vec{E} = \frac{A}{2}(\hat{x} + i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)} + \frac{A}{2}(\hat{x} - i\hat{y})e^{i(kz+\omega t)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$\vec{E}_1$ 为沿着正 $z$ 轴方向传播的 RCP；

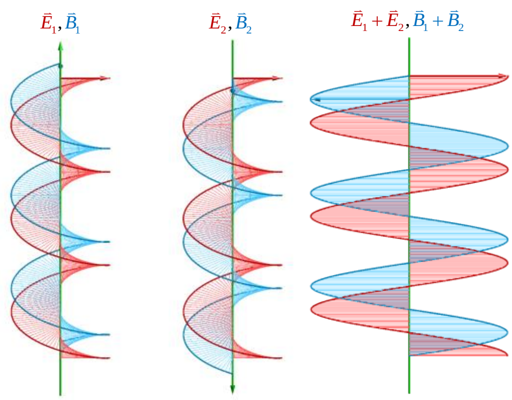
$\vec{E}_2$ 为沿着负 $z$ 轴方向传播的 RCP。

**【解】**

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = A(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)e^{ikz} \\ c\vec{B} = \hat{z}\times\vec{E}_1 - \hat{z}\times\vec{E}_2 = -iA(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)e^{ikz} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\,\vec{E} = A(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)\cos kz \\ \mathrm{Re}(c\vec{B}) = A(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)\sin kz \end{cases}$$

28




## 复数表述的优点

- 复数描述与真实场一一对应：

$$\vec{E}_{01}e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{x}-\omega_1 t)} = \vec{E}_{02}e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{x}-\omega_2 t)}$$

$$\Longleftrightarrow \vec{E}_{01} = \vec{E}_{02},\quad \vec{k}_1 = \vec{k}_2,\quad \omega_1 = \omega_2$$

- 如果物理的电磁场满足线性、齐次方程（譬如波动方程、自由空间的麦克斯韦方程组），则其复表示也满足同样的方程。反之亦然：

$$L\{\mathrm{Re}\,\vec{E}, \mathrm{Re}\,\vec{B}\} = 0 \quad \leftrightarrow \quad L\{\vec{E}, \vec{B}\} = 0$$

30

- 对于单色平面波，求导运算转化为代数乘法运算

$$\partial_t \quad \leftrightarrow \quad -i\omega$$
$$\nabla \quad \leftrightarrow \quad i\vec{k}$$

$$\begin{cases} \partial_t \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] = -i\omega \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] \\ \partial_i \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] = ik_i \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] \\ \nabla \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] = i\vec{k} \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] \\ \nabla \cdot \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] = i\vec{k} \cdot \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] \\ \nabla \times \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] = i\vec{k} \times \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] \end{cases}$$

31

- 线性组合的振幅与相位

$$\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{x}-\omega_1 t)} + \vec{E}_2 e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{x}-\omega_2 t)}$$

$$\Longleftrightarrow \vec{E}_0 = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02}, \quad \vec{k} = \vec{k}_1 = \vec{k}_2, \quad \omega = \omega_1 = \omega_2$$

简单起见，考察关系 $f_0 e^{-i\omega t} = f_1 e^{-i\omega_1 t} + f_2 e^{-i\omega_2 t}$。

将该式及其对 $t$ 的一阶、二阶导数在 $t = 0$ 处取值：

$$\begin{cases} f_0 = f_1 + f_2 \\ \omega f_0 = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 \\ \omega^2 f_0 = \omega_1^2 f_1 + \omega_2^2 f_2 \end{cases}$$

由此易证

$$f_0 = f_1 + f_2, \quad \omega = \omega_1 = \omega_2$$

32

**【例】**已知自由空间中单色平面波的电场为$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$，试确定$\vec{E}_0$、$\vec{k}$和$\omega$满足的条件，并确定相应的磁场$\vec{B}$。

**【解】**（1）波动方程 $\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ $\Rightarrow$ $\vec{k}\cdot\vec{k} = \frac{\omega^2}{c^2}$

（2）无散条件 $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$

（3）Faraday定律 $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$

- 如果$\vec{k}$是实矢量，则这些条件可以写为

$$\omega = kc, \quad \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0, \quad \boxed{c\vec{B} = \hat{k}\times\vec{E}}$$

$\vec{E}$和$\vec{B}$是同相位的

33

- 如果$\vec{k}$是复矢量，设$\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}$，则

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=\vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}} e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

电磁波沿$\vec{\alpha}$方向衰减，电磁波沿$\vec{\beta}$方向传播，相速度$v_p=\omega/\beta$。

$$\vec{k}\cdot\vec{k}=\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \beta^2-\alpha^2=\frac{\omega^2}{c^2},\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$$

传播方向与衰减方向垂直

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0 \Rightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{E}_0+i\vec{\alpha}\cdot\vec{E}_0=0$$

电场一般不再与传播方向垂直

$$\vec{B}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega} \Rightarrow \vec{B}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$$

电场与磁场不再同相位，
且磁场一般也不再与传播方向垂直。

34

## 同频率物理量的乘积平均值

对于两个同频率振荡的物理量：

$$f=f_0(\vec{x})e^{-i\omega t},\quad g=g_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

真实场（实部）的乘积（非线性）并不等于复表示乘积的实部

$$\mathrm{Re}\,f\cdot\mathrm{Re}\,g=\frac{f+f^*}{2}\cdot\frac{g+g^*}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(f_0 g_0^*+f_0^* g_0+f_0 g_0 e^{-2i\omega t}+f_0^* g_0^* e^{2i\omega t}\right)$$

而$\mathrm{Re}\,f\cdot\mathrm{Re}\,g$在一个周期内的平均值则为

$$\langle\mathrm{Re}\,f\cdot\mathrm{Re}\,g\rangle=\frac{1}{4}(f_0 g_0^*+f_0^* g_0)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(f_0^* g_0)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(f_0 g_0^*)$$

35

- 同频率标量乘积的平均值：

$$\langle\mathrm{Re}\,f\cdot\mathrm{Re}\,g\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(f_0^* g_0)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(f_0 g_0^*)$$

- 同频率矢量点乘的平均值：

$$\left\langle\mathrm{Re}\,\vec{f}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{g}\right\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{f}^*\cdot\vec{g}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{f}\cdot\vec{g}^*\right)$$

$$\Rightarrow \left\langle\left(\mathrm{Re}\,\vec{f}\right)^2\right\rangle=\frac{1}{2}\vec{f}^*\cdot\vec{f}\triangleq\frac{1}{2}\left|\vec{f}\right|^2$$

- 同频率矢量叉乘的平均值：

$$\left\langle\mathrm{Re}\,\vec{f}\times\mathrm{Re}\,\vec{g}\right\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{f}^*\times\vec{g}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{f}\times\vec{g}^*\right)$$

36