§4 电磁规律的规范不变性

1

一、电磁势

由于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$，因此可以引入矢量函数 $\vec{A}(t,\vec{x})$ 使得

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(t,\vec{x})$$

将其代入Faraday定律，得到

$$0 = \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

因此可以引入标量函数 $\varphi(t,\vec{x})$ 使得

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

$$\Longrightarrow \vec{E}(t,\vec{x}) = -\nabla\varphi(t,\vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

2

电磁场可以用标量势和矢量势共四个分量完全描述

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- 时变情形下，电场不再是保守力场，因此：标势 φ 不再具有“势能”的含义，相应“电压”概念不确切。
- 矢势的物理含义是：在任意时刻沿任意闭曲线C的环量等于该时刻穿过以C为边界的的任一曲面Σ的磁通量

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

- 对于时变电磁场，电场与磁场是相互作用着的整体，必须把矢势与标势作为整体来描写电磁场，并将其统一称为**电磁势**。电磁场又称为电磁势的**场强**。

3

二、规范变换

给定的电磁场可以用不同的电磁势描述，不同电磁势之间的关系称为**规范变换**（gauge transformation），其一般表达式为：

$$\varphi' = \varphi - \partial_t \psi, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$$

其中，$\psi(t,\vec{x})$ 可以是任一给定的标量函数，称为**规范函数**。

- 电磁势又称为**规范势**。对于给定的电磁场，每一组合格的$\{\varphi,\vec{A}\}$称为一种“规范”。
- 规范变换自由度的存在是由于规范势中矢势 $\vec{A}$ 的定义不完整：电磁场只规定了 $\nabla\times\vec{A}$，但对 $\nabla\cdot\vec{A}$ 却未作出任何规定。从物理上讲，可以随意地选择 $\nabla\cdot\vec{A}$，每一种选择就对应一种规范。

4

1. Coulomb规范与Lorenz规范

从实践角度讲，应用最广泛的规范有如下两种：

（1）**Coulomb 规范**：规范选择条件为

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0$$

（2）**Lorenz 规范**：规范选择条件为

$$L \triangleq \nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

请自行证明：
对于给定的电磁场，总可以选择规范函数，使其电磁势满足 Coulomb 规范或 Lorenz 规范。

【思考】对于给定的电磁场，是否总可以选择规范函数，使其标量势为零？或使其矢量势为零？

5

2. 规范不变性

经典电动力学中，可观测物理量是场强矢量$\vec{E}$和$\vec{B}$，而非φ和$\vec{A}$。由规范变换联系的不同规范势对应着同一组$\{\vec{E},\vec{B}\}$，所以，物理规律——此处特指 Maxwell 方程组与 Lorentz 方程——具有**规范变换下的不变性**。

电磁场是一种规范场
电磁相互作用是一种规范相互作用

【思考】除$\vec{E}$和$\vec{B}$外，其他物理量也可能是规范变换下的不变量，如$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$。

【思考】为什么强调电磁规律的规范不变性？

6

3. 剩余规范不变性

设两组电磁势 $\{\varphi, \vec{A}\}$ 和 $\{\varphi', \vec{A}'\}$ 均对应相同的电磁场，且均满足 Lorenz 规范 $L = 0 = L'$。

- 两组电磁势由规范变换相联系：

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$$

- 规范函数满足

$$L' - L = \nabla \cdot (\vec{A}' - \vec{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\varphi' - \varphi)}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0$$

7

- 对于给定的电磁场，电磁势在 Lorenz 规范下并不唯一，仍然可以做规范变换，这样的变换称为**剩余规范变换**（residual gauge transformation）：

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi, \quad \left(\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0\right)$$

即剩余规范函数 ψ 可以是波动方程的任一解。

【思考】对于给定的电磁场，在要求其电磁势满足 Lorenz 规范的条件下，是否可以通过合适的剩余规范函数的选择使得的电磁势唯一确定下来？即是否存在**完全的规范固定**（complete gauge–fixing）？

8

三、电磁势方程

将规范势的定义代入AM定律，给出

$$\mu_0\vec{J} = \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\nabla^2\vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A})\right] - \frac{1}{c^2}\left[\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right] = -\mu_0\vec{J}$$

而将规范势的定义代入EG定律，给出

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \left(\nabla\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

9

电磁势的演化满足如下二阶偏微分方程：

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}$$

亦即

$$\Box\,\varphi + \partial_t L = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \Box\,\vec{A} - \nabla L = -\mu_0\vec{J}$$

其中，$\Box$ 为 **d'Alembert 算子**：

$$\Box \triangleq \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2},\quad L \triangleq \nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

- **渐近条件：**物理的电荷、电流分布都是局域的，相应地，我们假定对任一固定的 t，物理的规范势在无穷远处趋于零。

10

1. Coulomb规范下的电磁势方程

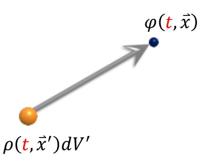
若采用Coulomb规范，则规范势方程写为：

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi,\quad \nabla\cdot\vec{A} = 0$$

- Coulomb规范的特点1：

标量势仅由电荷分布完全决定，
满足静电Poisson方程，
其解具有Coulomb势形式

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\frac{\rho(t,\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$



超距作用？

11

- Coulomb规范的特点2：

矢量势仅由“横向”电流决定

$$\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\varphi(t,\vec{x})}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\nabla\int dV'\,\frac{\partial_t\rho(t,\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

$$= -\mu_0\nabla\left[\frac{1}{4\pi}\int dV'\,\frac{\nabla'\cdot\vec{J}(t,\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]$$

$$= \mu_0\vec{J}_{\parallel}(t,\vec{x})$$

$$\Longrightarrow \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}_{\perp},\quad (\nabla\cdot\vec{J}_{\perp} = 0)$$

12

【例】 稳恒电流的矢量势。

【解】 由于稳恒电流无源，因而

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad (\nabla \cdot \vec{J} = 0)$$

因此，类比静电势即可得到

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

13

2. Lorenz规范下的电磁势方程

若采用 Lorenz 规范 $L = 0$ ，则规范势方程写为：

$$\boxed{\Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad L \triangleq \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0}$$

其中， $\Box$ 为 **d'Alembert 算子**：

$$\Box \triangleq \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

规范势各自满足的方程称为 **d'Alembert 方程**，
齐次d'Alembert 方程即是**波动方程**。

14

- Lorenz 规范的特点1：

  电磁势的方程相似而相互独立；

  电荷是标势之源，电流是矢势之源。

- Lorenz 规范的特点2：

  具有明显的 Lorentz 协变性。

15

【例】试求匀速运动点电荷的规范势，设

$$\begin{cases}\rho(t,\vec{x}) = e\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3 - vt) = e\delta^3(\vec{R}) \\ \vec{J}(t,\vec{x}) = ev\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3 - vt)\hat{x}_3 = e\vec{v}\delta^3(\vec{R})\end{cases}$$

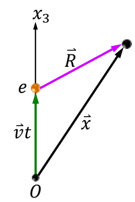
其中，$\vec{R} \triangleq \vec{x} - \vec{v}t = X_i\hat{x}_i$。

【解】规范势满足方程

$$\Box\varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{R}),\quad \Box\vec{A} = -\frac{e\vec{v}}{\varepsilon_0 c^2}\delta^3(\vec{R})$$

矢量势只有 x_3 分量，且匀速运动意味着 φ 和 $\vec{A}$ 可以写为

$$\varphi = \varphi(\vec{R}),\quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi(\vec{R})$$



16

令 $\vec{\beta} = \vec{v}/c$，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$，$\varphi$ 满足方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial X_2^2} + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial X_3^2} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{R})$$

做变量变换：

$$X_1' = X_1 = x_1,\quad X_2' = X_2 = x_2,\quad X_3' = \gamma X_3 = \gamma(x_3 - vt)$$

标量势方程写为Poisson方程形式

$$\nabla'^2\varphi \triangleq \frac{\partial^2\varphi}{\partial X_1'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial X_2'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial X_3'^2} \triangleq -\frac{\gamma e}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{R}')$$

因此，匀速运动点电荷的规范势为

$$\varphi = \frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0 R'} = \frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \gamma^2 X_3^2}},\quad \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi$$

17

电场：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\hat{x}_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\hat{x}_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\hat{x}_3$$

$$= -\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}\hat{x}_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}\hat{x}_2 - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\varphi}{\partial X_3}\hat{x}_3$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = \frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{X_i\hat{x}_i}{(X_1^2 + X_2^2 + \gamma^2 X_3^2)^{3/2}}$$

磁场：

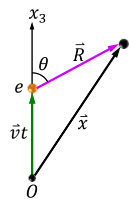
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \nabla\times\left(\frac{\vec{v}}{c^2}\varphi\right) = \nabla\varphi\times\frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{B} = \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}$$

18

令 θ 为 $\vec{R}$ 和 $\vec{v}$ 的夹角，则

$$X_1^2 + X_2^2 + \gamma^2 X_3^2 = R^2 \sin^2\theta + \gamma^2 R^2 \cos^2\theta$$
$$= \gamma^2 R^2 (1 - \beta^2 \sin^2\theta)$$



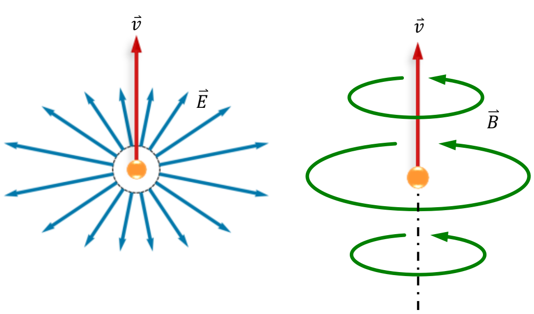
因而，匀速运动点电荷的电磁势可以写为

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi$$

电磁场则可以写为

$$\vec{E} = \frac{e\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}$$

19



20