CH2. 电磁现象的基本规律

§1 真空中的麦克斯韦方程组

一、电荷的描述

1. 宏观电荷分布

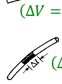
在宏观电磁理论中，通常将电荷视为是体分布的，而将面电荷、线电荷和点电荷视为体电荷在一定条件下的近似。

体密度：$Q_V(t) = \int_V dV\, \rho(t, \vec{x})$

面密度：$Q_S(t) = \int_\Sigma dS\, \sigma(t, \vec{x})$

$(\Delta V = \Delta S \cdot d_\perp)$

线密度：$Q_c(t) = \int_C dl\, \lambda(t, \vec{x})$



$(\Delta V = \Delta l \cdot S_\perp)$

- 关系：$\sigma = \rho d_\perp$，$\lambda = \rho S_\perp$。

点、线、面电荷分布的体密度

- **点电荷系统**（$\vec{x}_k(t)$ 为带电粒子 e_k 的路径）

$$\rho(t,\vec{x}) = \sum_k e_k \delta^3\big(\vec{x} - \vec{x}_k(t)\big)$$

- **线电荷体密度**（位于 x_3 轴上）

$$\rho(t,\vec{x}) = \lambda(t,x_3)\delta(x_1)\delta(x_2)$$

- **面电荷体密度**（位于 x_1x_2平面内）

$$\rho(t,\vec{x}) = \sigma(t,x_1,x_2)\delta(x_3)$$

4

2. 电流的描述

穿过某个给定曲面的电流强度定义为单位时间穿过该曲面的电量。通常用**体电流密度**描述电荷流动的快慢及方向：

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \int_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}(t,\vec{x})$$

- 密度为 ρ 的电荷以速度 $\vec{v}$ 运动时，体电流密度为

$$\vec{J}(t,\vec{x}) = \rho(t,\vec{x})\vec{v}(t,\vec{x}) \quad\longrightarrow\quad \rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_- \quad\longrightarrow\quad \sum_k \rho_k\vec{v}_k$$

  - 点电荷系统的电流体密度：

$$\vec{J}(t,\vec{x}) = \sum_k e_k\vec{v}_k(t)\delta^3\big(\vec{x} - \vec{x}_k(t)\big)$$

- 有时引入**面电流密度**、**线电流密度**是方便的：

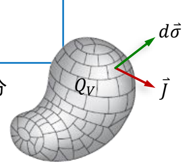
$$\vec{K} = \sigma\vec{v},\quad \vec{I} = \lambda\vec{v}$$

5

3. 电荷守恒

电荷、电流分布满足连续性方程

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{J} = 0$$



- 将连续性方程在任意给定区域V 内积分

$$-\int_V dV\,\partial_t\rho = \int_V dV\,\nabla\cdot\vec{J}$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{dQ_V}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V dV\,\rho(t,\vec{x}) = \oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}(t,\vec{x}) = I$$

- 全空间的总电量守恒（**物理电流在远处足够快地趋于零**）。

定域守恒：V 内增加的电量等于通过 ∂V 流进来的电量。

6

【例】证明点电荷系统的电荷密度与电流密度满足连续性方程

$$\begin{cases} \rho(t,\vec{x}) = \sum_k e_k \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k(t)) \\ \vec{J}(t,\vec{x}) = \sum_k e_k \vec{v}_k(t) \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k(t)) \end{cases}$$

【证明】
$$\begin{aligned} -\partial_t \rho(t,\vec{x}) &= -\sum_k e_k \partial_t \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k(t)) \\ &= \sum_k e_k \vec{v}_k(t) \cdot \nabla \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k(t)) \\ &= \sum_k e_k \nabla \cdot [\vec{v}_k(t) \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k(t))] \\ &= \nabla \cdot \left[\sum_k e_k \vec{v}_k(t) \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_k(t))\right] = \nabla \cdot \vec{J}(t,\vec{x}) \end{aligned}$$

7

二、麦克斯韦方程组

电动力学研究带电粒子之间的（电磁）相互作用。电磁作用是通过电磁场实现的。电磁场与实物粒子一样，都是物质存在的一种形态，具有能量、动量、角动量和自旋等基本属性。

（1）带电粒子系统的位形用其位矢（$3N$ 个变量）描述

$$\vec{x}_k(t), \quad k = 1,2,\cdots,N$$

（2）电磁场的位形用两个矢量函数（6 个场）描述

$$\begin{cases} \vec{E}(t,\vec{x}) & \textbf{电场强度} \\ \vec{B}(t,\vec{x}) & \textbf{磁感应强度（磁场强度）} \end{cases}$$

8

- 电磁场不带电，但它会对处于其中的带电粒子将施加**Lorentz 力**作用

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

（1）Lorentz 力公式可视为电磁场的定义。

（2）电磁作用是一种局域的作用（引入 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 的出发点）。

（3）**力密度**（电磁场对单位体积电荷施加的力）为

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

9

1. 实物粒子的动力学方程

带电粒子 e 在电磁场中的运动满足 **Lorentz 方程**：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- 其中

$$\vec{p} \triangleq \gamma m \vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- 在电磁场已知的情形下，一旦给定初始条件 $\vec{x}(0)$ 和 $\vec{v}(0)$，带电粒子在任一时刻的位置 $\vec{x}(t)$ 就唯一确定了。

10

2. 麦克斯韦方程组

电磁场 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 的演化分布满足**Maxwell方程组**：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \textbf{EG}\text{（电场的高斯定律）} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \textbf{BG}\text{（磁场的高斯定律）} \\ \nabla \times \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & \textbf{F}\text{（法拉第定律）} \\ \nabla \times \vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} & \textbf{AM}\text{（安培-麦克斯韦定律）} \end{cases}$$

- 真空中的光速 $c \triangleq 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$；**位移电流密度** $\vec{J}_D \triangleq \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$。
- 电场高斯定律可作为电荷测量的依据。

11

【例】证明电磁相互作用过程中电荷是守恒的。

【证明】

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \left[\nabla \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

12

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

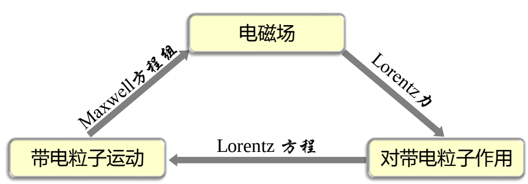
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- 在源已知的情形下，给定初值 $\vec{E}(0,\vec{x})$ 和 $\vec{B}(0,\vec{x})$，两个对时间的一阶微分矢量方程可唯一确定 $\vec{E}(t,\vec{x})$ 和 $\vec{B}(t,\vec{x})$。
- $\vec{E}(0,\vec{x})$ 和 $\vec{B}(0,\vec{x})$ 需满足两个标量方程提供的“约束”，即

$$\nabla \cdot \vec{E}(0,\vec{x}) = \frac{\rho(0,\vec{x})}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \vec{B}(0,\vec{x}) = 0$$

  - 若“约束”在初始时刻成立，则任一时刻也都成立（？）。

13



Maxwell 方程组
Lorentz 力
Lorentz 方程

描述粒子、电磁场体系的完整、自洽的动力学方程

14

完备的电动力学方程

对于由电磁作用相联系的 N 个带电粒子，描述该体系的完备动力学方程是

- **Lorentz 方程**

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = e_k\left[\vec{E}(t,\vec{x}_k) + \vec{v}_k \times \vec{B}(t,\vec{x}_k)\right], \quad (k = 1,2,\cdots,N)$$

- **Maxwell 方程组**

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

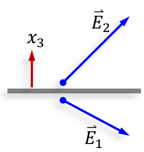
$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

15

三、边值关系

【例】假设 $x_3=0$ 平面上存在面电荷分布，平面附近可能有体电荷，但无奇异电荷分布（点电荷和线电荷），试由微分形式的Gauss定律以及Faraday定律确定面电荷两侧的电场关系。

【注】讨论面电荷或面电流上的电磁场是没有意义的。



16

【解】空间中电荷体密度、电场、磁场可以分别表示为

$$\begin{cases} \rho(t,\vec{x})=\rho_+(t,\vec{x})\Theta(x_3)+\rho_-(t,\vec{x})\Theta(-x_3)+\sigma(t,x_1,x_2)\delta(x_3) \\ \vec{E}(t,\vec{x})=\vec{E}_+(t,\vec{x})\Theta(x_3)+\vec{E}_-(t,\vec{x})\Theta(-x_3) \\ \vec{B}(t,\vec{x})=\vec{B}_+(t,\vec{x})\Theta(x_3)+\vec{B}_-(t,\vec{x})\Theta(-x_3) \end{cases}$$

先给出一个后面用到的关系：

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\left[\vec{f}\Theta(\pm x_3)\right] &= \left(\nabla\cdot\vec{f}\right)\Theta(\pm x_3)+[\nabla\Theta(\pm x_3)]\cdot\vec{f} \\ &= \left(\nabla\cdot\vec{f}\right)\Theta(\pm x_3)\pm\left(\hat{x}_3\cdot\vec{f}\right)\delta(x_3) \end{aligned}$$

17

（1）Gauss定理

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\left[\boxed{\left(\nabla\cdot\vec{E}_+\right)}\Theta(x_3)+\boxed{\left(\nabla\cdot\vec{E}_-\right)}\Theta(-x_3)\right] \\ \qquad +\hat{x}_3\cdot\left(\vec{E}_+-\vec{E}_-\right)\delta(x_3) \\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}=\left[\boxed{\dfrac{\rho_+}{\varepsilon_0}}\Theta(x_3)+\boxed{\dfrac{\rho_-}{\varepsilon_0}}\Theta(-x_3)\right]+\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta(x_3) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad \hat{x}_3\cdot\left(\vec{E}_+-\vec{E}_-\right)\delta(x_3)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta(x_3)$$

设当 $x_3\longrightarrow 0$ 时，$\vec{E}_+\longrightarrow\vec{E}_2$，$\vec{E}_-\longrightarrow\vec{E}_1$，因此

$$\hat{x}_3\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

18

（2）Faraday定理

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = \left[\boxed{\nabla\times\vec{E}_+}\Theta(x_3) + \boxed{\nabla\times\vec{E}_-}\Theta(-x_3)\right] \\ \qquad +\hat{x}_3\times(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)\delta(x_3) \\ -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \boxed{-\dfrac{\partial\vec{B}_+}{\partial t}}\Theta(x_3)\boxed{-\dfrac{\partial\vec{B}_-}{\partial t}}\Theta(-x_3) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad \hat{x}_3\times(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)\delta(x_3) = 0$$

由于当$x_3\longrightarrow 0$时，$\vec{E}_+\longrightarrow\vec{E}_2$，$\vec{E}_-\longrightarrow\vec{E}_1$，因此

$$\hat{x}_3\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

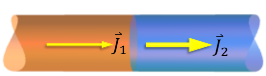
19

“由微分方程给出边值关系”的法则

- 任意约定面的1、2两侧，并定义法向$\hat{n}: 1\longrightarrow 2$；
- 将∇改写为$\hat{n}$，作用对象（场或源）$\vec{F}$改写为$\vec{F}_2-\vec{F}_1$；
- 删去场对时间的导数项；
- 源及其对时间的导数项均将其中的体密度改为面密度。

【例】连续性方程

$$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad\Longrightarrow\quad \hat{n}\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$



20

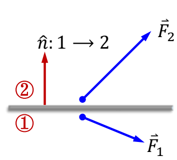
面电荷、面电流两侧的电磁场满足**边值关系**

$$\hat{n}\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = 0$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1) = 0$$

$$\hat{n}\times(\vec{B}_2-\vec{B}_1) = \mu_0\vec{K}$$



- 边值关系也可以写为

$$\vec{E}_2-\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n},\quad \vec{B}_2-\vec{B}_1 = \mu_0\vec{K}\times\hat{n}$$

【注】边值关系本质上就是面电荷、面电流附近的Maxwell方程组。

21

§2 物质中的麦克斯韦方程组

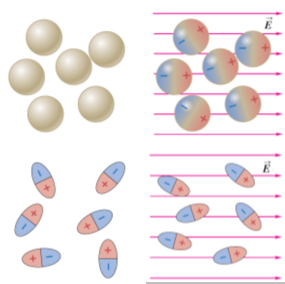
22

一、介质的极化

无外场时　有外场时

无极分子

有极分子



位移极化
（似弹性电偶极子）

取向极化
（似刚性电偶极子）

极化导致介质中局域电中性被破坏，会出现束缚电荷

23

1. 电极化强度与极化电荷

为了描述极化电荷的宏观分布，定义**电极化强度**

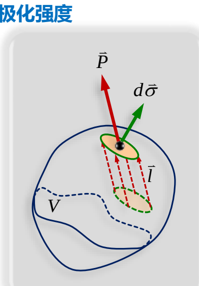
$$\vec{P} \triangleq \frac{\sum \vec{p}_{分子}}{\Delta V} = n\vec{p} = nq\vec{l}$$

- 穿过面元 $d\vec{\sigma}$ 到区域外的电荷量为：

$$dQ = nq\vec{l} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{P} \cdot d\vec{\sigma}$$

- 任意给定区域 V 内的净**极化电荷**为

$$Q_P = \int_V \rho_P dV = -\oint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{\sigma}$$



$$\Longrightarrow \quad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad \sigma_P = \hat{n} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$$

24

2. 电位移矢量

有介质时，除了自由电荷 ρ_f，也会出现束缚电荷 $\rho' = \rho_P$。因此，电场的 Gauss 定律写为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_P) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \vec{P})$$

引入辅助矢量 —— **电位移矢量：**

$$\vec{D} \triangleq \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

因此**介质中的 Gauss 定律**写为：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

25

3. 极化电流

若$\vec{P}$随时间变化，则极化电荷密度也会变化，从而产生**极化电流**。

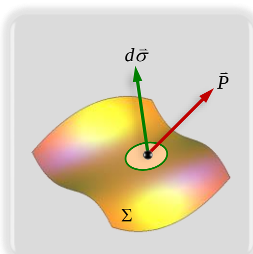
- 穿过任一给定曲面 Σ 的极化电流强度为：

$$I_P = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{P} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma \vec{J}_P \cdot d\vec{\sigma} = \int_\Sigma \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{\sigma}$$

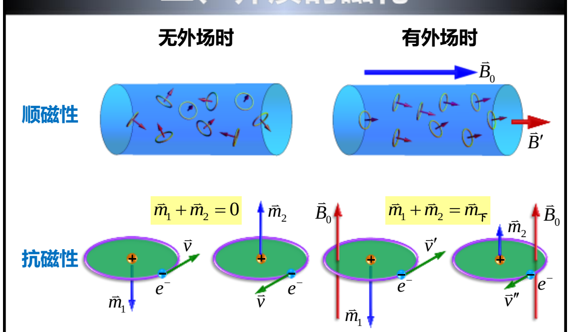
- 因此，**极化电流体密度**为

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$



26

二、介质的磁化



磁化导致介质中出现宏观磁化电流

27

1. 磁化强度与磁化电流

为了描述磁化电流的宏观分布，定义**磁化强度**

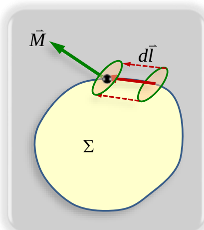
$$\vec{M} \triangleq \frac{\sum \vec{m}_{\text{分子}}}{\Delta V} = n\vec{m} = nI\vec{S}$$

- 环绕线元 $d\vec{l}$ 的分子电流对穿过曲面 Σ 的磁化电流强度的贡献为：

$$dI_M = nI\vec{S}\cdot d\vec{l} = \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \quad I_M = \int_\Sigma \vec{J}_M\cdot d\vec{\sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{J}_M = \nabla\times\vec{M}, \quad \vec{K}_M = \hat{n}\times\left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1\right)$$



28

2. H 矢量

有介质时，既存在自由（或传导）电流 $\vec{J}_f$，也会出现束缚电流 $\vec{J}' = \vec{J}_M + \vec{J}_P$。因此，Ampere–Maxwell 定律写为

$$\nabla\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \left(\vec{J}_f + \vec{J}_M + \vec{J}_P\right) + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_f + \nabla\times\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

引入辅助矢量 —— **$\vec{H}$ 矢量：**

$$\vec{H} \triangleq \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{or} \quad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

因此**介质中的 Ampere–Maxwell 定律**写为：

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

29

三、物质中的麦克斯韦方程组

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$	**EG**（电场的高斯定律）
$\nabla\cdot\vec{B} = 0$	**BG**（磁场的高斯定律）
$\nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$	**F**（法拉第定律）
$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \partial_t\vec{D}$	**AM**（安培-麦克斯韦定律）

- 辅助矢量 $\vec{D}$ 和 $\vec{H}$ 不是真正的物理实在量

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

- **位移电流密度：**

$$\vec{J}_D \triangleq \partial_t\vec{D} = \varepsilon_0\partial_t\vec{E} + \partial_t\vec{P} = \varepsilon_0\partial_t\vec{E} + \vec{J}_P$$

30

1. 电荷守恒

- 利用AM定律和EG定律，有

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J}_f + \nabla \cdot (\partial_t \vec{D}) = \nabla \cdot \vec{J}_f + \partial_t \rho_f$$

因此，自由电荷是守恒的。

- 利用 $\rho' = \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ 和 $\vec{J}' = \vec{J}_M + \vec{J}_P = \nabla \times \vec{M} + \partial_t \vec{P}$，有

$$\nabla \cdot \vec{J}' = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{M}) + \nabla \cdot (\partial_t \vec{P}) = -\partial_t \rho'$$

因此，束缚电荷也是守恒的。

31

- 若绝缘介质界面处无自由电荷和传导电流，则所有边值关系都将是齐次的

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \end{cases}$$

  - 通常，绝缘介质内部和界面上的传导电流和自由电荷或者等于零，或者给定不变。若无特别说明，本课程将假设绝缘介质内部或界面上没有传导电流和自由电荷。

32

四、本构关系

解决实际问题时，仅仅Maxwell方程组是不够的，还需要补充描述特定介质电磁性质的关系，即**本构关系**。

- 对于绝缘介质，本构关系一般可表示为：

$$\vec{D} = \vec{D}\{\vec{E}, \vec{B}\}, \quad \vec{H} = \vec{H}\{\vec{E}, \vec{B}\}$$

而对于静止的、非铁磁性绝缘介质，其本构关系可以写为：

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$$

33

1. 简单绝缘介质

本课程中，将静止的、线性的、各向同性介质称为**简单介质**。简单介质的本构关系为

稳恒场： $\begin{cases} \vec{D}(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}) \\ \vec{B}(\vec{x}) = \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}) \end{cases}$

时谐场： $\begin{cases} \vec{D}(\omega,\vec{x}) = \varepsilon(\omega,\vec{x})\vec{E}(\omega,\vec{x}) \\ \vec{B}(\omega,\vec{x}) = \mu(\omega,\vec{x})\vec{H}(\omega,\vec{x}) \end{cases}$

- 如果ε和μ与频率无关，这样的介质称为**无色散介质**。
- 除铁磁性介质外，通常介质都是**弱磁性**的，即$\mu \approx \mu_0$。

34

- 若绝缘介质界面处无自由电荷和传导电流，则所有边值关系都将是齐次的

$$\begin{cases} \hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \\ \hat{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \end{cases}$$

  - 通常，绝缘介质内部和界面上的传导电流和自由电荷或者等于零，或者给定不变。若无特别说明，本课程将假设绝缘介质内部或界面上没有传导电流和自由电荷。

35

2. 简单导电介质

对简单的导电介质，除介质的两个本构关系外，还应加上第三个本构关系——**Ohm定律**：

$$\vec{J}_f = \sigma\vec{f} \quad \longrightarrow \quad \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}), \quad \sigma\vec{E}, \quad \cdots$$

其中，$\vec{f}$是单位电荷受到的力，σ 为电导率。大多数情形下，Ohm定律写为

$$\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$$

- Ohm定律是一个经验的规律，通常将满足Ohm定律且σ有限的材料称为**Ohm型导体**。
- **绝缘介质**对应于$\sigma = 0$ 的情形；
  理想导体对应于$\sigma \longrightarrow \infty$的情形。

36

导体中的电荷

- 根据Ohm定律和EG定律，在简单的均匀导体内部有

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_f$$

电流总是使得导体内部的电荷量的绝对值减少，
均匀导体内部的自由电荷最终总会趋于零。

- 上式结合自由电荷满足的连续性方程$\nabla \cdot \vec{J}_f = -\partial_t \rho_f$，得到

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_f \quad \Longrightarrow \quad \rho_f(t, \vec{x}) = \rho_f(0, \vec{x}) e^{-t/\tau}$$

其中$\tau \triangleq \varepsilon/\sigma$为导体的**弛豫时间**。

均匀导体内部的自由电荷随时间按指数趋于零。

【注】一般导体的τ非常小，铜$\tau \sim 10^{-19}$ s，海水$\tau \sim 10^{-10}$ s；不良导体如蒸馏水，$\tau \sim 10^{-6}$ s；良绝缘体的τ可以很大，如熔融石英$\tau > 10^6$ s。

37

欧姆型导体

- 对于Ohm型导体，如果均匀导体内部初始时不带电，则此后任一时刻都有$\rho_f = 0$；如果初始时ρ_f不为零，经过很短的时间之后，ρ_f实际上也会消失。除非特别说明，否则本课程将假设均匀导体内部始终有$\rho_f(t, \vec{x}) = 0$。
- 对于均匀的Ohm型导体，每一点处的传导电流和电场由Ohm定律相联系。由于σ取有限数值，导体表面不可能有传导电流的面分布，否则界面处的电场将趋于∞。

自由电荷只是以面电荷的形式分布于导体表面。

传导电流只是以体电流的形式分布于导体内部。

38

- Maxwell方程组在Ohm型导体内部写为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \partial_t \vec{D} \end{cases}$$

- Maxwell方程组在Ohm型导体界面处写为边值关系

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \end{cases}$$

39

理想导体

- 理想导体是Ohm型导体在$\sigma=\infty$时的极限。由于$\tau\to 0$，因而理想导体内部不可能有自由电荷。
- 由Ohm定律及$\vec{J}_f$的有限性知：理想导体内部电场为零。
- Faraday定律意味着：理想导体内部的磁场不随时间变化，即内部磁场“被冻结”了。本课程假设初始时理想导体内部没有磁场，从而此后内部的磁场也将恒为零。
- 根据AM定律，若理想导体内部没有磁场，则其内部$\vec{J}_f=0$。

理想导体内没有自由电荷、传导电流和电磁场。

自由电荷和传导电流只分布于理想导体表面。

理想导体表面自动地成为电场和磁场的边界。

40

- 由于理想导体表面自动地是电磁场的边界，因而Maxwell方程组在理想导体内部写为

$$\vec{E}=0=\vec{B}$$

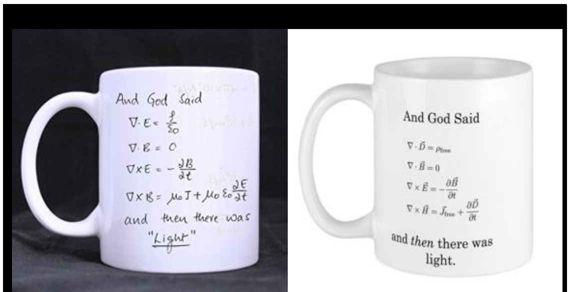
- Maxwell方程组在理想导体表面界面处写为**边界条件**：

$$\begin{cases}\hat{n}\cdot\vec{D}=\sigma_f\\ \hat{n}\cdot\vec{B}=0\\ \hat{n}\times\vec{E}=0\\ \hat{n}\times\vec{H}=\vec{K}_f\end{cases}$$

其中，$\hat{n}$指向理想导体外部。

【注】齐次边界条件用于求解电磁场，非齐次边界条件则用于求解表面上的面电荷和面电流分布。

41



谢谢同学们！