§4 电磁场的物质性

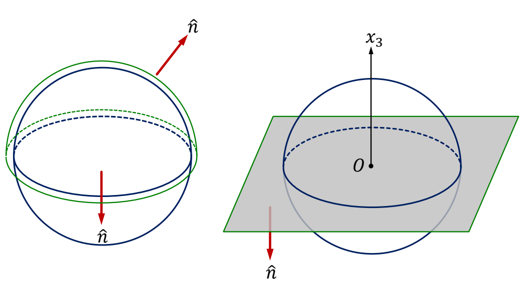
- 能量守恒定律 $\partial_t w + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{J}$
  - 电磁场的能量密度 w 和能流密度（Poynting矢量）$\vec{S}$:

$$\begin{cases} w \triangleq \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 + c^2 B^2\right) \\ \vec{S} \triangleq \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \end{cases}$$

- 动量守恒定律 $\partial_t \vec{g} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = -\vec{f} = -\left(\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}\right)$
  - 电磁场的动量密度 $\vec{g}$ 和动量流密度张量 $\overleftrightarrow{T}$:

$$\begin{cases} \vec{g} \triangleq \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \vec{S}/c^2 \\ \overleftrightarrow{T} \triangleq w\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B}\right) \end{cases}$$

【例】半径为 a、总电量为 Q 的均匀带电实心球，试计算其北半球受到的静电力（赤道面定义为 x_1x_2 平面）。



【解】

$$\vec{F} = -\int_{x_3=0} \overset{-d\sigma\,\hat{x}_3}{\boxed{d\vec{\sigma}}} \cdot \overleftrightarrow{T} = F\hat{x}_3 \quad \Rightarrow \quad F = \hat{x}_3 \cdot \vec{F} = \int_{x_3=0} \overset{2\pi r dr}{\boxed{d\sigma}} T_{33}$$

$$T_{33} = \hat{x}_3 \cdot \overleftrightarrow{T} \cdot \hat{x}_3 = \hat{x}_3 \cdot \left[w\left(\overleftrightarrow{I} - 2\hat{E}\hat{E}\right)\right] \cdot \hat{x}_3 = w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\Rightarrow \quad F = 2\pi\left[\int_0^a w_1 r dr + \int_a^\infty w_2 r dr\right]$$

$$= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\int_0^a \frac{r^3}{a^4} dr + \int_a^\infty \frac{a^2}{r^3} dr\right] = \frac{3}{16}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

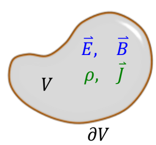
$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)^2 = \dfrac{Q^2 r^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^6}, & (r < a) \\ w_2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}, & (r > a) \end{cases}$$

4

三、电磁场的角动量

动量守恒定律

$$\vec{f} = -\partial_t \vec{g} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$$



用位置矢量 $\vec{x}$ 叉乘上式，得到

$$\vec{x} \times \vec{f} = -\vec{x} \times \partial_t \vec{g} - \vec{x} \times \left(\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}\right)$$

$$= -\partial_t(\vec{x} \times \vec{g}) + \nabla \cdot \left(\overleftrightarrow{T} \times \vec{x}\right)$$

$$= -\partial_t \vec{l}_{\text{em}} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{R}$$

5

电磁场的角动量守恒定律

（积分形式） $-\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_V dV\, \vec{l}_{\text{em}} - \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{R} = \int_V dV\, \vec{x} \times \vec{f}$

（微分形式） $-\partial_t \vec{l}_{\text{em}} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{R} = \vec{x} \times \vec{f}$

- **电磁场（相对于O点）的角动量密度**

$$\vec{l}_{\text{em}} \triangleq \vec{x} \times \vec{g}$$

- **电磁场（相对于O点）的角动量流密度**

$$\overleftrightarrow{R} \triangleq -\overleftrightarrow{T} \times \vec{x}$$

6

【例】 半径为 a、带电量为 Q 的铁磁性金属球被均匀磁化，磁化强度为 $\vec{M}$，电荷在球表面均匀分布。

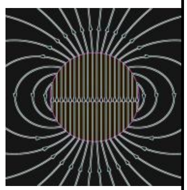
（1）试计算球的电磁角动量 $\vec{L}_{\mathrm{em}}$。

（2）试计算在去磁过程中球获得的力学角动量 $\vec{L}_{\mathrm{mech}}$。

【解】 (1) 由高斯定理得到球内电场为零，而球外电场为

$$\vec{E}_{\mathrm{out}} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (r > a)$$

可证明：均匀磁化介质球激发的磁场为



$$\begin{cases} \vec{B}_{\mathrm{in}} = \dfrac{2}{3}\mu_0\vec{M}, & (r < a) \\ \vec{B}_{\mathrm{out}} = \dfrac{\mu_0 a^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right], & (r > a) \end{cases}$$

7

电磁场仅在球外有非零的动量，动量密度 $\vec{g} = \varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{out}} \times \vec{B}_{\mathrm{out}}$ 为

$$\vec{g} = \varepsilon_0\frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times \frac{\mu_0 a^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right] = \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi r^5}\vec{M}\times\hat{r}$$

电磁场相对于球心的角动量密度为（球外）

$$\vec{l}_{\mathrm{em}} = \vec{x}\times\vec{g} = \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi r^4}\hat{r}\times\left(\vec{M}\times\hat{r}\right) = \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi r^4}\left[\vec{M} - \left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_{\mathrm{em}} = \int_{r>a} \boxed{\overset{r^2 dr d\Omega}{dV}}\,\vec{l}_{\mathrm{em}} = \frac{\mu_0 Q a^3}{12\pi}\cdot\int_a^\infty \frac{dr}{r^2}\cdot\left[\vec{M}\boxed{\overset{4\pi}{\oint d\Omega}} - \vec{M}\cdot\boxed{\overset{4\pi\overleftrightarrow{I}/3}{\oint \hat{r}\hat{r}\,d\Omega}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_{\mathrm{em}} = \frac{2}{9}\mu_0 Q a^2\vec{M}$$

8

（2）去磁过程中，感应电场对球面上的电荷施加力矩

$$\vec{\tau} = \frac{Q}{4\pi a^2}\oint_{r=a} d\sigma\,\overbrace{\left(a\hat{r}\times\vec{E}\right)}^{d\vec{\sigma}} = \frac{Q}{4\pi a}\oint_{r=a} d\vec{\sigma}\times\vec{E}$$

$$= \frac{Q}{4\pi a}\int_{r<a} dV\,\boxed{\overset{-\partial_t\vec{B}}{\nabla\times\vec{E}}} \qquad = -\frac{Q}{4\pi a}\frac{d}{dt}\int_{r<a} dV\,\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_{\mathrm{mech}} = \int_0^\infty \vec{\tau}\,dt = \frac{Q}{4\pi a}\boxed{\left[\int_{r<a} dV\,\vec{B}\right]_{t=0}} \quad \frac{4\pi a^3}{3}\vec{B}_{\mathrm{in}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_{\mathrm{mech}} = \frac{2}{9}\mu_0 Q a^2\vec{M}$$

正如角动量守恒所预期的，有 $\vec{L}_{\mathrm{mech}} = \vec{L}_{\mathrm{em}}$。

9

四、能量中心

● 利用能量、动量守恒定律

$$\begin{cases}\left(\partial_t w+\nabla\cdot\vec S\right)\vec x=-\left(\vec E\cdot\vec J\right)\vec x & \left(\nabla\cdot\vec S\right)\vec x=\nabla\cdot\left(\vec S\vec x\right)-\overset{\vec S}{\boxed{\vec S\cdot\nabla\vec x}}\\ \left(\partial_t\vec g+\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)c^2t=-\vec f c^2 t & \left(\partial_t\vec g\right)c^2t=\partial_t\left(c^2t\vec g\right)-\boxed{c^2\vec g}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad \partial_t\left(w\vec x-c^2t\vec g\right)+\nabla\cdot\left(\vec S\vec x-c^2t\overleftrightarrow{T}\right)=\vec f c^2t-\left(\vec E\cdot\vec J\right)\vec x$$

对全空间积分、并假设由散度项给出的面积分为零，得到

$$\frac{d}{dt}\int dV\left(w\vec x-c^2t\vec g\right)=c^2t\int dV\left(\rho\vec E+\vec J\times\vec B\right)-\int dV\left(\vec E\cdot\vec J\right)\vec x$$

● 下面将其应用于带电粒子系统【$\vec x_k=\vec x_k(t)$、$\vec v_k=\dot{\vec x}_k(t)$】

$$\rho(t,\vec x)=\sum\nolimits_k e_k\delta^3(\vec x-\vec x_k),\quad \vec J(t,\vec x)=\sum\nolimits_k e_k\vec v_k\delta^3(\vec x-\vec x_k)$$

10

$$\frac{d}{dt}\int dV\,w\vec x-\frac{d}{dt}\overset{\left(c^2t\vec G\right)}{\boxed{\int dV\left(c^2t\vec g\right)}}$$

$$=c^2t\underbrace{\boxed{\int dV\left(\rho\vec E+\vec J\times\vec B\right)}}_{\sum_k\vec F_k}-\underbrace{\boxed{\int dV\left(\vec E\cdot\vec J\right)\vec x}}_{\sum_k\left(\vec F_k\cdot\vec v_k\right)\vec x_k}$$

$$\Longrightarrow\quad\frac{d}{dt}\int dV\,w\vec x-c^2\vec G-c^2t\frac{d\vec G}{dt}$$

$$=c^2t\frac{d\vec P}{dt}\boxed{-\sum\nolimits_k\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}\vec x_k}$$

$$-\frac{d}{dt}\sum\nolimits_k\mathcal{E}_k\vec x_k+\overset{\sum_k c^2\vec p_k=c^2\vec P}{\boxed{\sum\nolimits_k\mathcal{E}_k\vec v_k}}$$

$$\vec F_k\cdot\vec v_k=\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}=\frac{d\left(\gamma_km_kc^2\right)}{dt},\quad \vec F_k=\frac{d\vec p_k}{dt}=\frac{d\left(\gamma_km_k\vec v_k\right)}{dt},\quad \vec v_k=\frac{c^2\vec p_k}{\mathcal{E}_k}$$

11

$$\Longrightarrow\quad\frac{d}{dt}\underbrace{\boxed{\left[\sum\nolimits_k\mathcal{E}_k\vec x_k+\int dV\,w\vec x\right]}}_{\vec R_C(\mathcal{E}+W)}=c^2\left(\vec P+\vec G\right)+c^2t\boxed{\frac{d\left(\vec P+\vec G\right)}{dt}}$$

● 利用带电粒子-电磁场系统的能量中心

$$\vec R_C\triangleq\frac{\sum_k\mathcal{E}_k\vec x_k+\int dV\,w\vec x}{\sum_k\mathcal{E}_k+\int dV\,w}$$

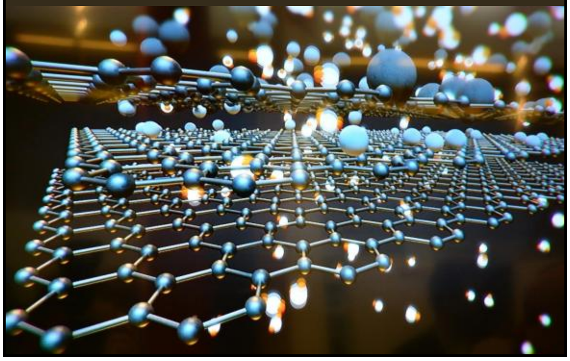
$$\Longrightarrow\quad\vec V_C=\frac{d\vec R_C}{dt}=\frac{c^2\left(\vec P+\vec G\right)}{\mathcal{E}+W}=\frac{c^2\vec P_{\text{total}}}{\mathcal{E}_{\text{total}}}$$

这就是**能量中心定理**。由于孤立体系的总能量和总动量守恒，因而其能量中心作匀速直线运动。

$$\vec F_k\cdot\vec v_k=\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}=\frac{d\left(\gamma_km_kc^2\right)}{dt},\quad \vec F_k=\frac{d\vec p_k}{dt}=\frac{d\left(\gamma_km_k\vec v_k\right)}{dt},\quad \vec v_k=\frac{c^2\vec p_k}{\mathcal{E}_k}$$

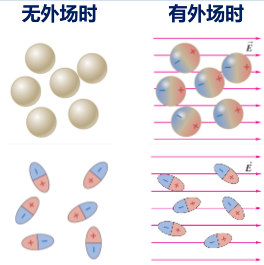
12

§ 2.5 介质中的电动力学



一、介质中的极化与磁化

1. 介质的极化



无极分子：位移极化（似弹性电偶极子）

有极分子：取向极化（似刚性电偶极子）

极化导致介质中出现宏观束缚电荷

14

电极化强度与极化电荷

为了描述极化电荷的宏观分布，定义**电极化强度**

$$\vec{P} \triangleq \frac{\sum \vec{p}_{分子}}{\Delta V} = n\vec{p} = nq\vec{l}$$

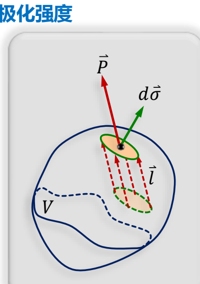
- 穿过面元 $d\vec{\sigma}$ 到区域外的电荷量为：

$$dQ = nq\vec{l} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{P} \cdot d\vec{\sigma}$$

- 任意给定区域 V 内的净**极化电荷**为

$$Q_P = \int_V \rho_P dV = -\oint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{\sigma}$$

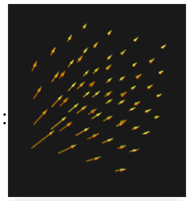
$$\Rightarrow \quad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad \sigma_P = \hat{n} \cdot \left(\vec{P}_1 - \vec{P}_2\right)$$



15

极化电流

若 $\vec{P}$ 随时间变化，则 ρ_P 也会变化，从而产生**极化电流**。



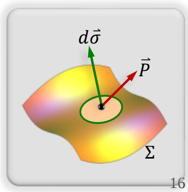
- 穿过任一给定曲面 Σ 的极化电流强度为：

$$I_P = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{P}\cdot d\vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Sigma \vec{J}_P\cdot d\vec{\sigma} = \int_\Sigma \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\cdot d\vec{\sigma}$$

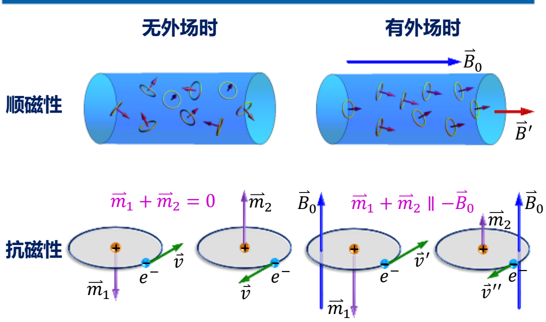
- 因此，**极化电流体密度**为

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$



16

2. 介质的磁化



磁化导致介质中出现宏观磁化电流

17

磁化强度与磁化电流

为了描述磁化电流的宏观分布，定义**磁化强度**

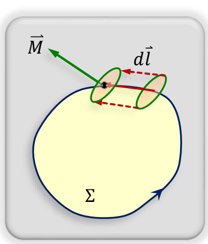
$$\vec{M} \triangleq \frac{\sum \vec{m}_{分子}}{\Delta V} = n\vec{m} = nI\vec{S}$$

- 环绕线元 $d\vec{l}$ 的分子电流对穿过曲面 Σ 的磁化电流强度的贡献为：

$$dI_M = nI\vec{S}\cdot d\vec{l} = \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \quad I_M = \int_\Sigma \vec{J}_M\cdot d\vec{\sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{J}_M = \nabla\times\vec{M}, \quad \vec{K}_M = \hat{n}\times\left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1\right)$$



18

宏观的束缚电荷和束缚电流

- 极化电荷又称为是束缚电荷

$$\rho' = \rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}$$

- 磁化电流与极化电流一起又称为是束缚电流

$$\vec{j}' = \vec{j}_M + \vec{j}_P = \nabla\times\vec{M} + \partial_t\vec{P}$$

$$\Rightarrow\quad \nabla\cdot\vec{j}' = \boxed{\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{M}\right)} + \partial_t\underbrace{\boxed{\left(\nabla\cdot\vec{P}\right)}}_{-\rho'}$$

$$\Rightarrow\quad \nabla\cdot\vec{j}' = -\partial_t\rho'$$

束缚电荷也是守恒的。

19

二、介质中的麦克斯韦方程

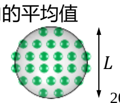
介质中的微观量与宏观量

- 存在介质时的电磁场满足真空中的麦克斯韦方程。

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B} = 0, & \nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0\partial_t\vec{E}\right)\end{cases}$$

  - ρ 和 $\vec{j}$ 是微观的电荷密度和电流密度。
  - $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 是微观的电场和磁场。
- 宏观电磁理论关心宏观的电荷、电流分布和宏观的电磁场。
  - 宏观量是微观量在宏观小、微观大尺度 L 内的平均值

$$d \ll L \ll R \qquad \begin{cases} d = \text{原子的尺度}\\ R = \text{介质的尺度}\end{cases}$$

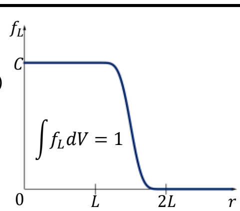


20

- 微观量 $\Psi(\vec{x})$ 的平均值定义为

$$\langle\Psi\rangle(\vec{x}) \triangleq \int dV'\,\Psi(\vec{x}')f_L(\vec{x}-\vec{x}')$$

  - 其中， $f_L(\vec{x}) = f_L(r)$ 是正的、球对称的光滑函数。



- $\langle\Psi\rangle(\vec{x})$ 的导数为

$$\nabla\langle\Psi\rangle(\vec{x}) = \int dV'\,\boxed{\Psi(\vec{x}')\nabla f_L(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$-\Psi(\vec{x}')\nabla' f_L(\vec{x}-\vec{x}')$$
$$= -\nabla'(\Psi f_L) + (\nabla'\Psi)f_L$$

$$= +\int dV'\,[\nabla'\Psi(\vec{x}')]f_L(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\Rightarrow\quad \nabla\langle\Psi\rangle(\vec{x}) = \langle\nabla\Psi\rangle(\vec{x})$$

  - 求平均与求导数运算可交换。

21

- 麦克斯韦方程取平均、并交换 ⟨ ⟩ 与 ∇ 、∂_t，由此就给出宏观场满足的麦克斯韦方程:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\langle\vec{E}\rangle = \dfrac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}, & \nabla\times\langle\vec{E}\rangle = -\partial_t\langle\vec{B}\rangle \\ \nabla\cdot\langle\vec{B}\rangle = 0, & \nabla\times\langle\vec{B}\rangle = \mu\langle\vec{J}\rangle + \mu\epsilon\partial_t\langle\vec{E}\rangle \end{cases}$$

➢ 方便起见，以后宏观量将略去平均值符号⟨ ⟩

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0, & \nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\partial_t\vec{E}\right) \end{cases}$$

➢ 宏观自由电荷、束缚电荷均对 ρ 有贡献。
宏观传导电流、束缚电流均对 $\vec{J}$ 有贡献。

22

电位移矢量与 H 矢量

- 有介质时，电场高斯定律写为

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}\right) = \rho_f + \rho_P = \rho_f - \nabla\cdot\vec{P}$$

因此，可将**介质中的高斯定律**写为:

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f, \quad \boxed{\left(\vec{D} \triangleq \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)} \quad \textbf{电位移矢量}$$

- 有介质时，安培-麦克斯韦定律写为

$$\nabla\times\left(\vec{B}/\mu_0\right) = \vec{J}_f + \vec{J}_M + \vec{J}_P + \varepsilon_0\partial_t\vec{E} = \vec{J}_f + \nabla\times\vec{M} + \partial_t\vec{P} + \varepsilon_0\partial_t\vec{E}$$

因此，可将**介质中的安培-麦克斯韦定律**写为:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \partial_t\vec{D}, \quad \boxed{\left(\vec{H} \triangleq \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}\right)} \quad \textbf{H 矢量}$$

- 由上面两个方程不难看出: **自由电荷是守恒的。**

$$0 = \nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right) = \nabla\cdot\vec{J}_f + \nabla\cdot\left(\partial_t\vec{D}\right) \;\Rightarrow\; \nabla\cdot\vec{J}_f + \partial_t\rho_f = 0$$

23

介质中的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f & \textbf{EG} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 & \textbf{BG} \\ \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} & \textbf{F} \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \partial_t\vec{D} & \textbf{AM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_f \\ \hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0 \\ \hat{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \\ \hat{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{K}_f \end{cases}$$

- $\vec{D}$ 和 $\vec{H}$ 不是真正的物理实在量

$$\vec{D} \triangleq \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} \triangleq \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$$

- **位移电流密度:**

$$\vec{J}_D \triangleq \partial_t\vec{D} = \varepsilon_0\partial_t\vec{E} + \partial_t\vec{P} = \varepsilon_0\partial_t\vec{E} + \vec{J}_P$$

24

自由和束缚

- 静电学中，$\boxed{\text{束缚电荷}}$和$\boxed{\text{非束缚电荷}}$的行为有着本质的区别。
  隶属于特定的原子　自由电荷
  - 束缚电荷最多只能移动有限距离，而自由电荷则会持续移动，直到被物体（如导体）表面阻挡。
  - 电介质中不能自由移动的额外电荷也被称为自由电荷。
- 电动力学中，若同样地根据电荷是否隶属于特定的原子，将其分别称为束缚电荷和自由电荷。
  - 自由电荷对 ρ 和 $\vec{J}$ 的贡献直接计为 ρ_f 和 $\vec{J}_f$。
  - 自由电荷对 $\vec{P}$ 和 $\vec{M}$ 没有任何贡献，其贡献完全由束缚电荷提供
    $$\rho' = -\nabla\cdot\vec{P},\quad \vec{J}' = \nabla\times\vec{M} + \partial_t\vec{P}$$
  - **这种观点在低频情况下尤为方便。束缚电荷会产生（几乎）实的介电常数，而非束缚电荷会产生（几乎）实的电导率。**

25

- 电动力学中，束缚电荷和非束缚电荷的行为并无本质的区别。
  - 若电磁场以非零频率随时间振荡，则二者都会发生振荡。
  - 可在同等地位上对待束缚电荷和非束缚电荷。
- 若将束缚电荷和非束缚电荷都不视为自由电荷。
  - 介质中的电荷对 ρ_f 或 $\vec{J}_f$ 都没有贡献，即 $\rho_f = 0 = \vec{J}_f$。
  - 介质中的电荷通过 $-\nabla\cdot\vec{P}$ 对 ρ 贡献，通过 $\partial\vec{P}/\partial t$ 对 $\vec{J}$ 贡献。
    $$\rho = -\nabla\cdot\vec{P},\quad \vec{J} = \nabla\times\vec{M} + \partial_t\vec{P}$$
  - **此观点对于在一般意义上考察介质对电磁场的响应是方便的。**

26

- 对于振荡电荷，这两种观点是等价的。
  - 两种观点下的源 ρ、$\vec{J}$ 和场 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 是相同的，且均满足
    $$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0, & \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B} = 0, & \nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\partial_t\vec{E}\right)\end{cases}$$
  - 两种观点下辅助矢量 $\vec{D}$ 和 $\vec{H}$ 的定义相同、但其数值不同
    $$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P},\quad \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$$
  - 两种观点下辅助矢量 $\vec{D}$ 和 $\vec{H}$ 满足的方程相同。第二种观点下
    $$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D} = \overbrace{\boxed{\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}}}^{\rho} + \overbrace{\boxed{\nabla\cdot\vec{P}}}^{-\rho}\\ \nabla\times\vec{H} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}}}_{\vec{J}+\varepsilon_0\partial_t\vec{E}} - \underbrace{\boxed{\nabla\times\vec{M}}}_{\vec{J}-\partial_t\vec{P}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\nabla\cdot\vec{D} = 0 & = \boxed{\rho_f}\\ \nabla\times\vec{H} = \partial_t\vec{D} & = \boxed{\vec{J}_f} + \partial_t\vec{D}\end{cases}$$

27

三、本构关系

- 对于介质中的电磁场问题，麦克斯韦方程组并不完备。
  - 介质中的束缚电荷和束缚电流是作为对外部电磁场的响应被动出现的，其分布演化只有在了解了电磁场的分布演化之后才能知悉。
  - 导电介质中的自由电流也会对电磁场作出明显的、不可忽略的响应，因此也不能事先给定。
- 除麦克斯韦方程外，还需要知道介质对电磁场的响应规律。
  - 这种响应规律称为介质的**本构关系**（或**电磁性能方程**）。
  - 除非特别指明，本课程所言介质指的都是静止的。
  - 除非特别指明，否则本课程不考虑铁电体、铁磁体。

28

1. 绝缘介质的本构关系

- 对于瞬时响应的线性、均匀、各向同性介质，本构关系写为

$$\begin{cases}\vec{D}(t,\vec{x}) = \varepsilon\vec{E}(t,\vec{x}) \\ \vec{B}(t,\vec{x}) = \mu\vec{H}(t,\vec{x})\end{cases} \xLeftrightarrow[\mu=\mu_0\mu_r]{\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r} \begin{cases}\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \chi_e\vec{E} \\ \vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \chi_m\vec{H}\end{cases}$$

均匀的简单介质

  - 这要求介质中的电偶极子、磁偶极子对电磁场瞬时响应。
  - 当电磁场随时间快速变化时，这一本构关系将不再成立。
  - 不过，这一本构关系可很好描述许多介质的低频行为。
- 对于非均匀的介质，本构参数 $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x})$、$\mu = \mu(\vec{x})$。简单介质
- 对于瞬时响应的线性介质，最一般的本构关系可写为

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \overleftrightarrow{\varepsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(t,\vec{x}), \quad \vec{B}(t,\vec{x}) = \overleftrightarrow{\mu}(\vec{x}) \cdot \vec{H}(t,\vec{x})$$

其中 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和 $\overleftrightarrow{\mu}$ 均为对称张量（参考教材例2.13和例3.7）

29

均匀简单介质中的麦克斯韦方程

利用本构关系，可将均匀的简单介质中的麦克斯韦方程写为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho_f}{\varepsilon}, & \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0, & \nabla\times\vec{B} = \mu\vec{J}_f + \mu\varepsilon\partial_t\vec{E}\end{cases}$$

- 定义**介质的折射率**为

$$n \triangleq \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$$

- 对于真空中的麦克斯韦方程以及由此给出的所有推论中，只需作如下替换即可得介质中的相应结论

$$\varepsilon_0 \longrightarrow \varepsilon, \quad \mu_0 \longrightarrow \mu, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$$

30

均匀简单介质中的电磁势

- 介质中的电磁场仍可用电磁势描述

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A}$$

- 在均匀的简单介质中
  - 修正的洛伦茨规范条件

$$\tilde{L} \triangleq \nabla \cdot \vec{A} + \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

  - 在洛伦茨规范下，用电磁势表示的麦克斯韦方程写为了

$$\tilde{\Box}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \tilde{\Box}\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

  - 其中 $\tilde{\Box}$ 是修正的达朗贝尔算子（波动算子）

$$\tilde{\Box} \triangleq \nabla^2 - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

31

均匀简单介质中的电磁波

考察无限均匀的简单介质，并假设其中 $\rho_f = 0 = \vec{J}_f$。

- 电磁场的基本方程可以写为

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

- 单色平面波是麦克斯韦方程的解

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}, \quad k = n\frac{\omega}{c}$$

  - 传播速度为 $v_p = c/n$、且 $E = v_p B$。
  - 定义介质的**固有阻抗**: $Z \triangleq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\mu c}{n}$

$$\Longrightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega\mu} \quad \text{or} \quad Z\vec{H} = \hat{k}\times\vec{E}$$

真空的固有阻抗为

$$Z_0 \triangleq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \boxed{\mu_0 c}^{\,120\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad Z_0 \approx 377\ (\Omega)$$

32

2. 简单导电介质

对简单的导电介质，除介质的两个本构关系外，还应加上第三个本构关系——**欧姆定律**:

$$\vec{J}_f = \sigma\vec{f} \quad = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right), \quad \sigma\vec{E}, \quad \cdots$$

其中，$\vec{f}$ 是单位电荷受到的力，σ 为电导率。

- 大多数情形下，欧姆定律写为

$$\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$$

- 欧姆定律是一个经验的规律。
  - **普通导体**：σ 有限。
  - **绝缘介质**：$\sigma = 0$。
  - **理想导体**：$\sigma \longrightarrow \infty$。

33

普通导体中的电荷

- 根据Ohm定律和EG定律，在均匀的普通导体内部，有

$$\nabla\cdot\vec{J}_f=\nabla\cdot\left(\sigma\vec{E}\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec{D}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_f$$

电流总是使得导体内部的电荷量的绝对值减少，
均匀导体内部的自由电荷最终总会趋于零。

- 上式结合传导电流的连续性方程 $\nabla\cdot\vec{J}_f=-\partial_t\rho_f$，得到

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_f\quad\Longrightarrow\quad\rho_f(t,\vec{x})=\rho_f(0,\vec{x})e^{-t/\tau}$$

其中 $\tau\triangleq\varepsilon/\sigma$ 为导体的**弛豫时间**。

均匀导体内部的自由电荷随时间按指数趋于零。

- 铜 $\tau\sim10^{-19}$ s，海水 $\tau\sim10^{-10}$ s；不良导体如蒸馏水，$\tau\sim10^{-6}$ s；良绝缘体的 τ 可以很大，如熔融石英 $\tau>10^{6}$ s。
- 本课程将假设均匀导体内部始终有 $\rho_f(t,\vec{x})=0$。

34

- 普通导体内部和界面处麦克斯韦方程组分别写为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\partial_t\vec{D}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_f\\ \hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0\\ \hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0\\ \hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=0\end{cases}$$

自由电荷只是以面电荷的形式分布于导体表面。

传导电流只是以体电流的形式分布于导体内部。

35

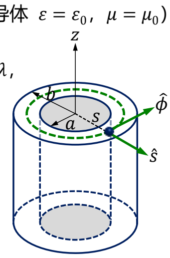
【例】同轴传输线内导体半径为 a，外导线半径为 b，两导线间为真空。 导线载有电流 I，两导线间的电压为 V。

（1）忽略导线电阻，计算导线间的能流和传输功率；

（2）计及导线电阻，计算通过内导线表面进入导线内的能流，证明它等于导线的损耗功率（设内导体 $\varepsilon=\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$）。

【解】（1）设导线上单位长度的电量为 λ，则由电场高斯定理以及安培环路定理，有

$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{s}\\ \vec{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}\end{cases},\qquad(a<s<b)$$



36

其中，λ 可由导线间的电压 V 给出：

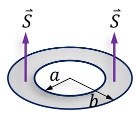
$$V = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E_s ds = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \quad\Rightarrow\quad \lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln(b/a)}$$

故能流密度矢量为

$$\vec{S} \triangleq \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0 s^2}\hat{z} = \frac{IV}{2\pi s^2\ln(b/a)}\hat{z}, \quad (a < s < b)$$

传输线的总传输功率为

$$P = \int d\vec{\sigma}\cdot\vec{S} = \int_a^b S\cdot 2\pi s ds = IV$$



（2）计及内导体的有限电导率 σ，则内导体内部一点的电场强度不再为零，利用欧姆定律以及安培环路定理，有

$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2\sigma}\hat{z}, \qquad \vec{B}_{\text{in}} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\phi}, \qquad (0 \le s \le a)$$

故内导体内的能流密度矢量为

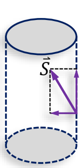
$$\vec{S}_{\text{in}} \triangleq \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{\text{in}}\times\vec{B}_{\text{in}} = -\frac{I^2 s}{2\pi^2 a^4\sigma}\hat{s}, \qquad (0 \le s \le a)$$

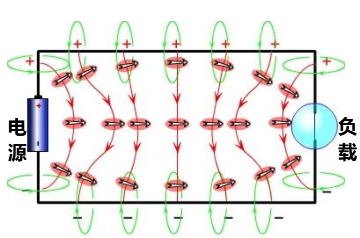
这部分流入导体内部的能量以焦耳热的形式消耗掉了，流入长度为 L 的一段导线内部的功率为

$$P_{\text{in}} = \vec{S}_{\text{in}}(s=a)\cdot(-2\pi a L\hat{s}) = I^2\underbrace{\boxed{\frac{L}{\pi a^2\sigma}}}_{R}$$

$$\Rightarrow\quad P_{\text{in}} = I^2 R, \qquad \left(R \triangleq \frac{L}{\pi a^2\sigma}\right)$$

计及内导体电阻时，导线内电场沿着电流方向。根据边值关系，在导线表面外侧附近，电场不仅有法向分量，也有切向分量。因此，能流密度矢量即有沿着导线方向的分量，也有垂直于导线指向其内部的分量。

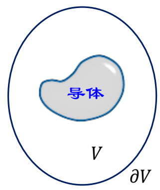




- 若区域 V 内存在普通导体，利用 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$，能量守恒定律写为

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\, w+\int_V dV\,\frac{J^2}{\sigma}=-\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}$$

由边界流进区域的电磁场能量，
一部分使得区域内电磁场的能量增加，
一部分则以焦耳热的形式损耗掉了。



$$-\frac{d}{dt}\int_V dV\, w=\int_V dV\,\frac{J^2}{\sigma}+\oint_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}$$

导致区域内电磁场能量减少的原因有二，
一是作用于实物产生焦耳热，
二是电磁场携带着能量由边界流出去了。

40

理想导体

- 对于理想导体，$\tau\to 0$，故理想导体内部不可能有自由电荷。

  自由电荷只是以面电荷的形式分布于理想导体表面。

- 由 $\vec{J}_f=\sigma\vec{E}$ 的有限性知：理想导体内部电场为零。

  理想导体表面自动地成为电场的边界。

- 由 $\partial_t\vec{B}=-\nabla\times\vec{E}=0$ 知：理想导体内部的磁场不随时间变化，即内部磁场“被冻结”了。
  - 本课程假设理想导体内部 $\vec{B}(t=0,\vec{x})=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{B}(t,\vec{x})=0$

  理想导体表面自动地成为磁场的边界。

- 由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\partial_t\vec{D}$ 知：若理想导体内无磁场，则内部 $\vec{J}_f=0$。

  传导电流只是以面电流的形式分布于理想导体表面。

41

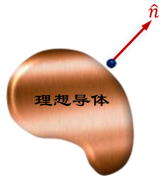
- 由于理想导体表面自动地是电磁场的边界，因而麦克斯韦方程组在理想导体内部写为

$$\vec{E}=0=\vec{B}$$

- 麦克斯韦方程组在理想导体表面界面处表现为**边界条件**：

$$\begin{cases}\hat{n}\cdot\vec{D}=\sigma_f\\ \hat{n}\cdot\vec{B}=0\\ \hat{n}\times\vec{E}=0\\ \hat{n}\times\vec{H}=\vec{K}_f\end{cases}$$

$\hat{n}$（指向理想导体外部）



  - 齐次边界条件用于求解电磁场，非齐次边界条件则用于求解表面上的面电荷和面电流分布。

42

四、电磁场-介质系统的守恒定律

束缚电荷、束缚电流是作为对场的响应以因变量的方式出现的。从实际应用角度，需要分析外界克服电磁力对自由电荷的功、冲量和冲量矩，并建立相应的能量、动量、角动量守恒定理。

- 以做功为例：由 $\vec{J}_f=\vec{J}-\vec{J}'$ 得到 $-\vec{E}\cdot\vec{J}_f=-\vec{E}\cdot\vec{J}+\vec{E}\cdot\vec{J}'$

$-\vec{E}\cdot\vec{J}_f$：外界对传导电流（搬运自由电荷）的功率密度。

$-\vec{E}\cdot\vec{J}$：外界对总电流（搬运全部电荷）的功率密度

转化为电磁能。

$+\vec{E}\cdot\vec{J}'$：电磁场对束缚电流（搬运束缚电荷）的功率密度

其中一部分电磁能转化为介质的内部能量
（极化能、磁化能、热能等）

1. 功率密度

电磁场对自由电荷的功率密度为

$$\vec{E}\cdot\vec{J}_f=\boxed{\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)}-\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}\qquad \nabla\cdot\left(\vec{H}\times\vec{E}\right)+\vec{H}\cdot\overset{\partial_t\vec{B}}{\boxed{\left(\nabla\times\vec{E}\right)}}$$

$$=-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)-\left(\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}+\vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}\right)$$

- 对于瞬时响应的线性介质：

$$\vec{D}(t,\vec{x})=\vec{\varepsilon}(\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}),\qquad \vec{B}(t,\vec{x})=\vec{\mu}(\vec{x})\cdot\vec{H}(t,\vec{x})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}=\vec{E}\cdot\partial_t\left(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\vec{\varepsilon}\cdot\partial_t\vec{E}=\vec{D}\cdot\partial_t\vec{E}\\ \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}=\vec{H}\cdot\partial_t\left(\vec{\mu}\cdot\vec{H}\right)=\vec{H}\cdot\vec{\mu}\cdot\partial_t\vec{H}=\vec{B}\cdot\partial_t\vec{H}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}=\partial_t\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right),\quad \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}=\partial_t\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\quad \nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B},\quad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\partial_t\vec{D}$$

- 定义介质中**电磁场的能量密度和能流密度（Poynting矢量）**

$$w\triangleq\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},\qquad \vec{S}\triangleq\vec{E}\times\vec{H}$$

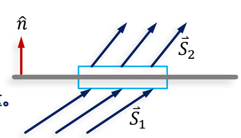
- 瞬时响应线性介质-电磁场系统的能量守恒定律为

$$\partial_t w+\nabla\cdot\vec{S}=-\vec{E}\cdot\vec{J}_f\qquad \textbf{对非均匀介质也适用}$$

  - 介质交界面处的能量守恒定律表现为边值关系

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{S}_2-\vec{S}_1\right)=0$$

能流密度的法向分量连续：
从一侧流入界面的电磁场能量，
等于从另一侧流出的电磁场能量。



2. 力密度

电磁场对自由电荷施加的力密度为 $\vec{f}=\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}$ $\quad -\nabla\times\vec{E}$

$$\vec{f}=\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E}+\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{B}\boxed{-\partial_t\vec{D}\times\vec{B}}\quad -\partial_t\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)+\vec{D}\times\boxed{\partial_t\vec{B}}$$

$$=-\partial_t\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)+\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E}+\boxed{\left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\vec{D}}\quad \vec{D}\cdot\nabla\vec{E}-\nabla\vec{E}\cdot\vec{D}$$

$$+\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{H}+\boxed{\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{B}}\quad \vec{B}\cdot\nabla\vec{H}-\nabla\vec{H}\cdot\vec{B}$$

$$=-\partial_t\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)+\nabla\cdot\left(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H}\right)-\left(\nabla\vec{E}\cdot\vec{D}+\nabla\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

- 对于瞬时响应的均匀、线性介质：$\vec{D}=\vec{\vec{\varepsilon}}\cdot\vec{E},\quad \vec{B}=\vec{\vec{\mu}}\cdot\vec{H}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla\vec{E}\cdot\vec{D}=\nabla\vec{E}\cdot\vec{\vec{\varepsilon}}\cdot\vec{E}=\nabla\left(\vec{E}\cdot\vec{\vec{\varepsilon}}\right)\cdot\vec{E}=\nabla\vec{D}\cdot\vec{E}=\nabla\left(\vec{D}\cdot\vec{E}/2\right)\\ \nabla\vec{H}\cdot\vec{B}=\nabla\vec{H}\cdot\vec{\vec{\mu}}\cdot\vec{H}=\nabla\left(\vec{H}\cdot\vec{\vec{\mu}}\right)\cdot\vec{H}=\nabla\vec{B}\cdot\vec{H}=\nabla\left(\vec{B}\cdot\vec{H}/2\right)\end{cases}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\quad \nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B},\quad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\partial_t\vec{D}$$

46

- 定义介质中**电磁场的动量密度和动量流密度**

$$\vec{g}\triangleq\vec{D}\times\vec{B},\quad \vec{\vec{T}}\triangleq w\vec{\vec{I}}-\left(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H}\right)$$

- 瞬时响应线性均匀介质-电磁场系统的动量守恒定律为

$$\partial_t\vec{g}+\nabla\cdot\vec{\vec{T}}=-\left(\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}\right)\quad \textbf{仅对均匀介质适用}$$

  - 介质交界面处的动量守恒定律表现为边值关系，但是

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{\vec{T}}_2-\vec{\vec{T}}_1\right)=0\ \times$$

  - 为了得到正确的边值关系，应回到一般的动量平衡方程

$$\vec{f}=-\partial_t\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)+\nabla\cdot\left(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H}\right)-\left(\nabla\vec{E}\cdot\vec{D}+\nabla\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

  - 下面仅讨论线性、各向同性、非均匀的介质。

47

- 对于线性、各向同性、非均匀（ε 和 μ 依赖于 $\vec{x}$）介质

$$\vec{D}(t,\vec{x})=\varepsilon(\vec{x})\vec{E}(t,\vec{x}),\quad \vec{B}(t,\vec{x})=\mu(\vec{x})\vec{H}(t,\vec{x})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla\vec{E}\cdot\vec{D}=\nabla\vec{E}\cdot\varepsilon\vec{E}=\nabla(\varepsilon E^2/2)-(E^2/2)\nabla\varepsilon\\ \nabla\vec{H}\cdot\vec{B}=\nabla\vec{H}\cdot\mu\vec{H}=\nabla(\mu H^2/2)-(H^2/2)\nabla\mu\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}-\frac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon-\frac{1}{2}H^2\nabla\mu}=-\partial_t\vec{g}-\nabla\cdot\vec{\vec{T}}$$

闵可夫斯基（Minkowski）力密度 $\vec{f}_M$

  - 介质界面处单位面积受到的力：**介质界面上的压强**

$$\frac{d\vec{F}}{d\sigma}=-\hat{n}\cdot\left(\vec{\vec{T}}_2-\vec{\vec{T}}_1\right)\Rightarrow\boxed{p=\hat{n}\cdot\frac{d\vec{F}}{d\sigma}=\hat{n}\hat{n}:\left(\vec{\vec{T}}_1-\vec{\vec{T}}_2\right)}$$

$$\vec{f}=-\partial_t\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)+\nabla\cdot\left(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H}\right)-\left(\nabla\vec{E}\cdot\vec{D}+\nabla\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

48

3. 角动量守恒定律

对于瞬时响应的线性、均匀、各向同性介质，由于动量流密度为对称张量，因而可仿照真空情形给出

$$\vec{x}\times\left(\rho_f\vec{E}+\vec{J}_f\times\vec{B}\right)=-\partial_t(\vec{x}\times\vec{g})-\nabla\cdot\left(-\overleftrightarrow{T}\times\vec{x}\right)$$

这就是电磁场—线性、均匀、各向同性介质系统的角动量守恒定律。

49