§ 5 Dirac–δ 函数

一、一维 δ–函数

（1）**一维Dirac δ–函数 $\delta(x-a)$** 定义为：

对于任意行为良好的函数 $\varphi(x)$，都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a)$$

（2）**δ–函数的 n 阶导数**定义为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x-a)\varphi(x)dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$$

- **积分区间可以是包含 $x = a$ 点的任一区间。**

- $\delta(x-a)$ 并非通常意义上的函数，数学上将其称为**分布**。分布 F 是由其对任意行为良好函数 $\varphi(x)$ 的作用 $F\{\varphi\}$ 定义的。
- **分布的导数** $\partial_x F$ 仍是一个分布，其定义为

$$(\partial_x F)\{\varphi\} \triangleq -F\{\partial_x \varphi\}$$

- 通常的函数 $f(x)$ 也可以视为是一个分布 F ：

$$F\{\varphi\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

- 两个分布 $D_1(x)$ 和 $D_2(x)$ 相等，等价于说，它们对于任意 $\varphi(x)$ 的作用所得数值是相同的：

$$D_1(x) = D_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} D_1(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} D_2(x)\varphi(x)dx$$

1. 基本性质

- 量纲：$[\delta(x)] = 1/[x]$
- $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$
- $x\delta(x) = 0,\quad x^2\delta(x) = 0,\quad x\delta'(x) = -\delta(x)$
- 若 $f(x)$ 只有简单零点 $\{x_n\}$，即 $f(x_n) = 0$ 但 $f'(x_n) \neq 0$ ，则

$$\delta\big(f(x)\big) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|}$$

4

【例】$(\boldsymbol{a \neq 0})$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \Longrightarrow \quad \delta(-x) = \delta(x)$$

【例】$(\boldsymbol{a \neq 0})$

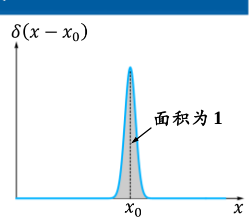
$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

5

2. δ–函数的形式定义

$$\delta(x-x_0) = 0,\quad \text{when } x \neq x_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = 1$$



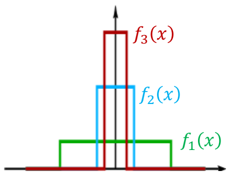
- 积分区间也可改为包含点 x_0 的任一区域。
- 作为函数，δ–函数在严格数学意义下不合法，但在物理学的理论表述中很有用。

6

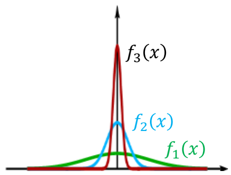
3. δ–函数的另一种定义

可以将 δ–函数视为普通函数的极限：

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{or} \quad \delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x)$$

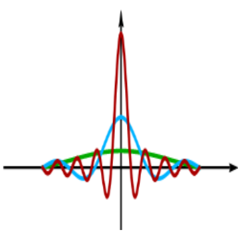


$$f_n(x) = \begin{cases} n, & |x| \le 1/2n \\ 0, & |x| > 1/2n \end{cases}$$

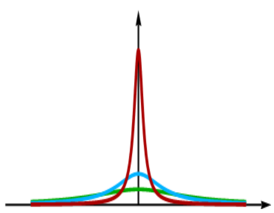


$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

7



$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

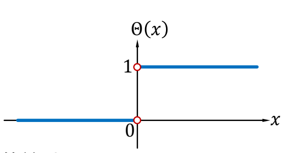


$$f_\epsilon(x) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}$$

8

4. Heaviside 阶跃函数

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



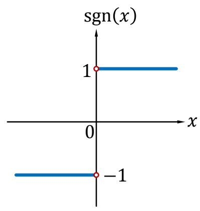
- $\Theta(x)$ 与 $\delta(x)$的关系

$$\delta(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx} \quad \text{and} \quad \Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(y)dy$$

9

5. 符号函数

$$\mathrm{sgn}(x) = \frac{d|x|}{dx} = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



- $\Theta(x)$ 与 $\mathrm{sgn}(x)$ 的关系

$$\mathrm{sgn}(x) = 2\Theta(x) - 1$$

10

二、三维 δ–函数

（1）**三维Dirac δ–函数 $\delta^3(\vec{x}-\vec{a})$** 定义为：

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{a}) = \delta(x_1 - a_1)\delta(x_2 - a_2)\delta(x_3 - a_3)$$

即对于任意行为良好的函数 $\varphi(\vec{x})$，都有

$$\int_V \varphi(\vec{x})\delta^3(\vec{x}-\vec{a})d^3x = \begin{cases} \varphi(\vec{a}), & \vec{a} \in V \\ 0, & \vec{a} \notin V \end{cases}$$

（2）**δ–函数的 n 阶导数**定义为：

$$\int \varphi(\vec{x})[\partial_i \delta^3(\vec{x}-\vec{a})]d^3x = -\frac{\partial \varphi(\vec{a})}{\partial a_i}$$

11

1. 基本性质

- 量纲：$[\delta^3(\vec{x})] = 1/L^3$
- $f(\vec{x})\delta^3(\vec{x}-\vec{a}) = f(\vec{a})\delta^3(\vec{x}-\vec{a})$
- $x_i\delta^3(\vec{x}) = 0, \quad x_i x_j \delta^3(\vec{x}) = 0, \quad x_i \partial_j \delta^3(\vec{x}) = -\delta_{ij}\delta^3(\vec{x})$
- 若 $\vec{f}(\vec{x})$ 仅有一个简单零点 $\vec{a}$，则

$$\delta^3\left(\vec{f}(\vec{x})\right) = \frac{\delta^3(\vec{x}-\vec{a})}{|\det[\partial_i f_j(\vec{a})]|}$$

12

2. 电荷分布的体密度

- **点电荷体密度**（位于原点处： $\vec{x}=0$ ）

$$\rho(\vec{x})=e\delta^3(\vec{x})=e\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

- **线电荷体密度**（位于 x_3 轴上：$x_1=x_2=0$ ）

$$\rho(\vec{x})=\lambda(x_3)\delta(x_1)\delta(x_2)$$

- **面电荷体密度**（位于 x_1x_2 平面内：$x_3=0$ ）

$$\rho(\vec{x})=\sigma(x_1,x_2)\delta(x_3)$$

13

3. 正交曲线坐标系下的Dirac δ–函数

对于任一行为良好函数 $\varphi(\vec{x})$，按照定义

$$\int\varphi(\vec{x})\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')d^3x=\varphi(\vec{x}')=\varphi(u_1',u_2',u_3')$$

$$=\int\varphi(u_1,u_2,u_3)\boxed{\delta(u_1-u_1')\delta(u_2-u_2')\delta(u_3-u_3')}du_1du_2du_3$$

但是，我们又有

$$\int\varphi(\vec{x})\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')d^3x=\int\varphi(u_1,u_2,u_3)\boxed{\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')h_1h_2h_3}du_1du_2du_3$$

由以上两个关系得到

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{h_1h_2h_3}\delta(u_1-u_1')\delta(u_2-u_2')\delta(u_3-u_3')$$

14

- 柱坐标系：

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{s}\delta(s-s')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')$$

- 球坐标系：

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

$$=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')$$

15

4. 平方反比矢量场

- **旋度。**由前面的例子知道

$$\int_V dV\, \nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}=0=\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\left(\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right),\quad \forall\Sigma,V$$

由此得到：

$$\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}=0$$

- **散度。**由前面的例子知道

$$\int_V dV\,\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}=\begin{cases}4\pi, & O\in V\\ 0, & O\notin V\end{cases}$$

由此得到：

$$\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}=4\pi\delta^3(\vec{x})$$

16

- **梯度**

（1）如果 $\vec{x}\neq 0$，则有

$$\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\nabla\frac{\vec{x}}{r^3}=\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\vec{x}+\frac{1}{r^3}(\nabla\vec{x})$$

$$=\left(\frac{-3\hat{r}}{r^4}\right)\vec{x}+\frac{1}{r^3}(\overleftrightarrow{I})$$

$$\Longrightarrow\quad \nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\frac{\overleftrightarrow{I}-3\hat{r}\hat{r}}{r^3},\quad \vec{x}\neq 0$$

17

（2）为了解 $\vec{x}=0$ 点的性质，在包含原点的小球形区域内积分：

$$\overleftrightarrow{T}\triangleq\int_{r<\epsilon} dV\,\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\oint_{r=\epsilon} d\vec{\sigma}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

其中，球面的面元

$$d\vec{\sigma}=(r^2d\Omega)\hat{r},\quad \hat{r}=n_i\hat{x}_i$$

因此，

$$\overleftrightarrow{T}=\oint\hat{r}\hat{r}\,d\Omega,\quad T_{ij}=\oint n_i n_j\,d\Omega$$

由对称性可知，$T_{ij}=C\delta_{ij}$。

18

由于 $T_{ii}=C\delta_{ii}=3C$，且

$$T_{ii}=\oint n_i n_i d\Omega=\oint d\Omega=4\pi$$

因此，$C=4\pi/3$。从而

$$\overleftrightarrow{T}\triangleq\int_{r<\epsilon}dV\,\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\frac{4\pi}{3}\overleftrightarrow{I}$$

（3）综上得到：

$$\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\frac{\overleftrightarrow{I}-3\hat{r}\hat{r}}{r^3}+\frac{4\pi\delta^3(\vec{x})}{3}\overleftrightarrow{I}$$

19

在分布意义上理解 x_j/r^3 的导数

$$\boxed{\left(\partial_i\frac{x_j}{r^3}\right)}\{\varphi\}\triangleq-\frac{x_j}{r^3}\{\partial_i\varphi\}=-\int\frac{x_j}{r^3}\partial_i\varphi d^3x$$

$$=-\lim_{\epsilon\to0}\int_{r>\epsilon}\frac{x_j}{r^3}\partial_i\varphi d^3x$$

$$\int\boxed{\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\delta(\vec{x})}\varphi d^3x$$

$$=\lim_{\epsilon\to0}\int_{r>\epsilon}\left[\left(\partial_i\frac{x_j}{r^3}\right)\varphi-\partial_i\left(\frac{x_j}{r^3}\varphi\right)\right]d^3x$$

$$=\lim_{\epsilon\to0}\left[\int_{r>\epsilon}\frac{1}{r^3}\left(\delta_{ij}-\frac{3x_ix_j}{r^2}\right)\varphi d^3x+\oint_{r=\epsilon}n_in_j\varphi d\Omega\right]$$

$$=\int\boxed{\frac{1}{r^3}\left(\delta_{ij}-\frac{3x_ix_j}{r^2}\right)}\varphi d^3x+\boxed{\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\,\varphi(0)}$$

20

因此

$$\partial_i\frac{x_j}{r^3}=\frac{1}{r^3}\left(\delta_{ij}-\frac{3x_jx_j}{r^2}\right)+\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\delta^3(\vec{x})$$

亦即

$$\nabla\frac{\hat{r}}{r^2}=\frac{\overleftrightarrow{I}-3\hat{r}\hat{r}}{r^3}+\frac{4\pi\delta^3(\vec{x})}{3}\overleftrightarrow{I}$$

由此又可给出旋度和散度：

$$\left(\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)_k=\varepsilon_{kij}\partial_i\frac{x_j}{r^3}=0,\quad\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}=\partial_i\frac{x_i}{r^3}=4\pi\delta^3(\vec{x})$$

21

在分布意义上理解 $1/r$ 的梯度

$$\left(\partial_i \frac{1}{r}\right)\{\varphi\} \triangleq -\frac{1}{r}\{\partial_i \varphi\} = -\int \frac{1}{r}\partial_i \varphi d^3x = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{r>\epsilon}\frac{1}{r}\partial_i\varphi d^3x$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{r>\epsilon}\left[\left(\partial_i\frac{1}{r}\right)\varphi - \partial_i\left(\frac{1}{r}\varphi\right)\right]d^3x$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{r>\epsilon}\left(-\frac{x_i}{r^3}\right)\varphi d^3x + \epsilon\oint_{r=\epsilon} n_i\varphi d\Omega\right]$$

$$= \int\left(-\frac{x_i}{r^3}\right)\varphi d^3x$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_i\frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

22

综上，对于平方反比矢量场，我们给出如下的结论：

$$\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2} = 0, \quad \nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi\delta^3(\vec{x})$$

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}, \quad \nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\vec{x})$$

由此易得

$$\nabla\times\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} = 0, \quad \nabla\cdot\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} = 4\pi\delta^3(\vec{\mathbb{R}})$$

$$\nabla\frac{1}{\mathbb{R}} = -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}, \quad \nabla^2\frac{1}{\mathbb{R}} = -4\pi\delta^3(\vec{\mathbb{R}})$$

23

【例】试由BSL定理证明静磁场的Ampere环路定理和Gauss定理

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}, \quad [\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x}) = 0]$$

【证明】（Gauss定理）

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\vec{J}(\vec{x}')\cdot\left(\nabla\times\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right)$$

因此

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x}) = 0, \quad \forall\vec{x}$$

24

(Ampere 环路定理)

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla\times\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left[\left(\nabla\cdot\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right)\vec{J}(\vec{x}')-\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left[4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\vec{J}(\vec{x}')+\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla'\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right]$$

右边第一个积分给出 $\mu_0\vec{J}(\vec{x})$，下面证明第二个积分等于零。

25

$$\int dV'\,\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla'\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}=\int dV'\,\nabla'\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}')\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}-\int dV'\left[\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')\right]\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

由于稳恒条件 $\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')=0$，右边第二个积分为零。因此

$$\int dV'\,\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla'\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}=\oint d\vec{\sigma}'\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}')\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

由于电流是局域的，没有电流由边界流进/出，所以

$$\int dV'\,\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla'\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}=0$$

因此

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{x})=\mu_0\vec{J}(\vec{x}),\quad\forall\vec{x}$$

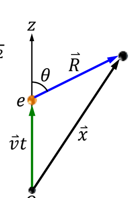
26

【思考】试计算静电场的散度和旋度：

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\frac{\rho(\vec{x}')\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

【思考】以速度 $\vec{v}=c\vec{\beta}$ 做匀速直线运动的点电荷 e 激发的电磁场可以在球坐标系中表示为：

$$\begin{cases}\vec{E}(t,\vec{x})=\dfrac{e\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0R^3}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\\[2ex]\vec{B}(t,\vec{x})=\dfrac{\vec{\beta}\times\vec{E}(t,\vec{x})}{c}\end{cases}$$



其中，$\vec{R}=\vec{x}-\vec{v}t$，而 θ 是 $\vec{R}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角。
试证明其满足Maxwell方程组。

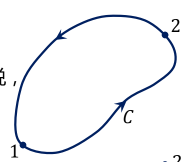
27

§6 亥姆霍兹定理

一、无旋场与标量势

- $\vec{F}(\vec{r})$ 为区域 V 内的**保守场**是指，对 V 内的任一闭曲线 C 有

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$



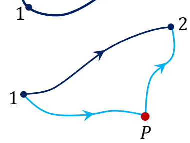
- $\vec{F}(\vec{r})$ 为区域 V 内的保守场，等价于说，对 V 内任意两个给定端点

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad \text{与路径无关}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l} = V(1,2)$$

$$= V(1,P) + V(P,2)$$

$$= V(1,P) - V(2,P)$$



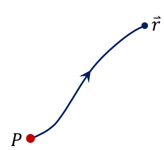
定义$\varphi(\vec{r}) = V(\vec{r},P) = -V(P,\vec{r})$，其中 P 称为**参考点**，即有

$$\varphi(\vec{r}) \triangleq -\int_P^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = -\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

其中 $d\varphi = \varphi\left(\vec{r} + d\vec{l}\right) - \varphi(\vec{r})$。注意到 $d\varphi = \nabla\varphi\cdot d\vec{l}$，有

- $\vec{F}(\vec{r})$ 为区域 V 内的保守场，等价于说

  存在标量场 $\varphi(\vec{r})$，使得 $\vec{F} = -\nabla\varphi$。



其中，$\varphi(\vec{r})$ 称为 $\vec{F}$ 的**标量势**。

- 原则上，参考点可以任意选择。
  选择不同的参考点，标量势相差一个常数。

$$\varphi'(\vec{r}) = V(\vec{r},P') = V(\vec{r},P) + V(P,P') = \varphi(\vec{r}) + const.$$

● 根据斯托克斯定理，区域 V 内的保守场必为无旋场，即

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\times\vec{F} = 0$$

● 区域 V 内的无旋场是否必为保守场？

$$\nabla\times\vec{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

若 V = 全空间，确实如此！但是，……

31

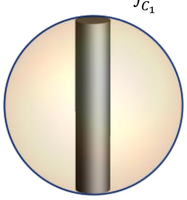
● 若 V = 挖掉无限长柱的三维空间，或挖掉圆盘的二维平面

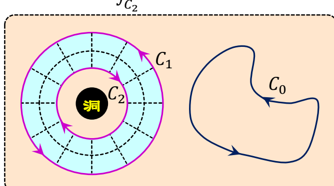
根据斯托克斯定理，由 $\nabla\times\vec{F} = 0$ 可推知

$$\oint_{C_0} d\vec{l}\cdot\vec{F} = 0 \quad \text{and} \quad \oint_{C_1+C_2} d\vec{l}\cdot\vec{F} = 0$$

但是，不能得到

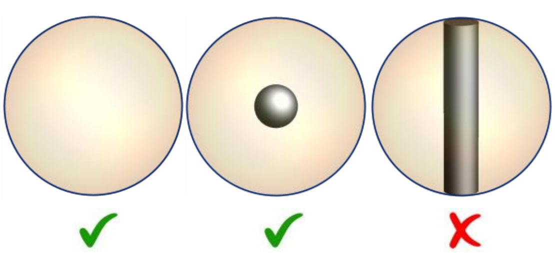
$$\oint_{C_1} d\vec{l}\cdot\vec{F} = 0 \quad \text{and} \quad \oint_{C_2} d\vec{l}\cdot\vec{F} = 0$$





32

● 若区域 V 是单连通的（即 V 内任一闭曲线都可连续地收缩为一点），则区域 V 内的无旋场必为保守场。



33

● 若区域 V 是单连通的，则以下表述等价：

（1）V 内每一点处 $\nabla \times \vec{F} = 0$

（2）对于 V 内任意闭曲线，$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$

（3）对于 V 内任意给定的两端点，$\int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{l}$ 与路径无关

（4）$\vec{F}$ 等于某个标量场 φ 的梯度，$\vec{F} = -\nabla\varphi$

注： 无论区域 V 是否是单连通的，
表述（2）、（3）、（4）总是等价的。

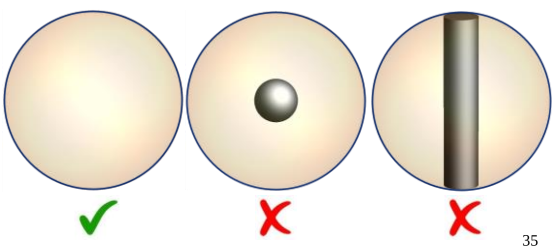
34

二、无源场与矢量势

区域 V 内散度处处为零的矢量场 $\vec{F}$ 称为**区域 V 内的无源场**。

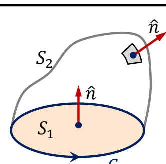
$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0, \quad (\forall \vec{r} \in V)$$

● 区域 V 可收缩系指：V 内任一闭曲面都可连续收缩为一点



35

● 若区域 V 是可收缩的，则以下表述等价：



（1）V 内每一点处 $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

（2）对于 V 内任意闭曲面，$\oiint \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$

（3）对于 V 内任意给定的闭曲线 C，$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 与曲面无关

（4）$\vec{F}$ 等于某个矢量场 $\vec{A}$ 的旋度，$\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$

注： 无论区域 V 是否是可收缩的，
表述（2）、（3）、（4）总是等价的。

● $\vec{A}$ 称为 $\vec{F}$ 的矢量势。矢量势具有不确定性：

$$\vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \nabla\psi(\vec{x})$$

36

三、矢量场的分解

任一**给定**的矢量场 $\vec{F}$ 都可分解为

一个无旋场 $\vec{F}_\parallel$ 与一个无源场 $\vec{F}_\perp$ 之和

$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp = -\nabla\varphi + \nabla\times\vec{A}$$

- 无旋场分量满足：

$$\nabla\times\vec{F}_\parallel(\vec{x}) = 0,\quad \nabla\cdot\vec{F}_\parallel(\vec{x}) = \nabla\cdot\vec{F}(\vec{x}) \triangleq D(\vec{x})$$

- 无源场分量满足：

$$\nabla\cdot\vec{F}_\perp(\vec{x}) = 0,\quad \nabla\times\vec{F}_\perp(\vec{x}) = \nabla\times\vec{F}(\vec{x}) \triangleq \vec{C}(\vec{x})$$

37

【证明】（1）

$$\left.\begin{cases}\nabla\times\vec{F}_\parallel = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{F}_\parallel = -\nabla\varphi \\ \nabla\cdot\vec{F}_\parallel = D\end{cases}\right\} \Longrightarrow \quad \nabla^2\varphi = -D$$

对于任意给定的标量函数 $D(\vec{x})$，此方程有无穷多解。

（2）

$$\left.\begin{cases}\nabla\cdot\vec{F}_\perp = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{F}_\perp = \nabla\times\vec{A} \\ \nabla\times\vec{F}_\perp = \vec{C}\end{cases}\right\} \Longrightarrow \quad \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \vec{C}$$

对于任意给定的矢量函数 $\vec{C}(\vec{x})$，此方程有无穷多解。

38

四、亥姆霍兹定理

若已知矢量场 $\vec{F}(\vec{x})$ 的散度和旋度：

$$\nabla\cdot\vec{F}(\vec{x}) = D(\vec{x}),\quad \nabla\times\vec{F}(\vec{x}) = \vec{C}(\vec{x})$$

则矢量场 $\vec{F}(\vec{x})$ 唯一确定，且可表示为

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{x}) &= -\nabla\varphi(\vec{x}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{x}) \\ &= -\nabla\left[\frac{1}{4\pi}\int dV'\frac{D(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right] + \nabla\times\left[\frac{1}{4\pi}\int dV'\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]\end{aligned}$$

设 $r\longrightarrow\infty$ 时，$r\vec{F}(\vec{x})\longrightarrow 0$，从而 $r^2D(\vec{x}), r^2\vec{C}(\vec{x})\longrightarrow 0$。

39

【证明】（唯一性）设有两个解 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 均满足

$$\nabla\cdot\vec{F}_1 = D = \nabla\cdot\vec{F}_2,\quad \nabla\times\vec{F}_1 = \vec{C} = \nabla\times\vec{F}_2$$

则 $\vec{F} \triangleq \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ 满足方程

$$\nabla\cdot\vec{F} = 0,\quad \nabla\times\vec{F} = 0$$

$$\Longrightarrow\quad \nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right) - \nabla^2\vec{F} = -\nabla^2\vec{F} = 0$$

令 $\varphi = F_k$ 为 $\vec{F}$ 的某个笛卡尔分量，由 Green III 得到

$$\int dV\,(\nabla\varphi)^2 = \int dV\,[\varphi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2] = \oint d\vec{\sigma}\cdot\varphi\nabla\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow\quad \nabla\varphi = 0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = const. \equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

40

（存在性）

$$\vec{F}(\vec{x}) = \int dV'\vec{F}(\vec{x}')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int dV'\vec{F}(\vec{x}')\nabla^2\frac{1}{\mathbb{R}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int dV'\,\nabla^2\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int dV'\,\left\{\nabla\left[\nabla\cdot\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right] - \nabla\times\left[\nabla\times\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]\right\}$$

$$\Longrightarrow\quad \vec{F}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\,\nabla\cdot\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\,\nabla\times\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

41

由于

$$\begin{cases}\nabla\cdot\dfrac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} = -\nabla'\cdot\dfrac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} + \dfrac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} = -\nabla'\cdot\dfrac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} + \dfrac{D(\vec{x}')}{\mathbb{R}} \\ \nabla\times\dfrac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} = -\nabla'\times\dfrac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} + \dfrac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} = -\nabla'\times\dfrac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} + \dfrac{\vec{C}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\end{cases}$$

所以

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\,\frac{D(\vec{x}')}{\mathbb{R}} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\,\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\nabla\oint d\vec{\sigma}'\cdot\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}} - \frac{1}{4\pi}\nabla\times\oint d\vec{\sigma}'\times\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

42

$$\vec{F}(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\,\frac{D(\vec{x}')}{\mathbb{R}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\,\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\nabla\oint d\vec{\sigma}'\cdot\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}-\frac{1}{4\pi}\nabla\times\oint d\vec{\sigma}'\times\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

由于当 $r\longrightarrow\infty$ 时，$r\vec{F}(\vec{x})\longrightarrow 0$，所以，两个面积分等于零。并且当 $r\longrightarrow\infty$ 时，$r^2D(\vec{x}),r^2\vec{C}(\vec{x})\longrightarrow 0$，所以两个体积分收敛。因此得到

$$\vec{F}(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\,\frac{D(\vec{x}')}{\mathbb{R}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\,\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\,\frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\,\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$

43

【例】 已知静磁场满足方程

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x})=0,\quad \nabla\times\vec{B}(\vec{x})=\mu_0\vec{J}(\vec{x})$$

试求静磁场的分布。设电流分布在有限区域。

【解】 由Helmholtz定理

$$\vec{B}(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int dV'\,\frac{\nabla'\cdot\vec{B}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int dV'\,\frac{\nabla'\times\vec{B}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$
$$=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla\times\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mathbb{R}}$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla\frac{1}{\mathbb{R}}\times\vec{J}(\vec{x}')=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left(-\frac{\vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}\right)\times\vec{J}(\vec{x}')$$

$$\Longrightarrow\quad \vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2}$$

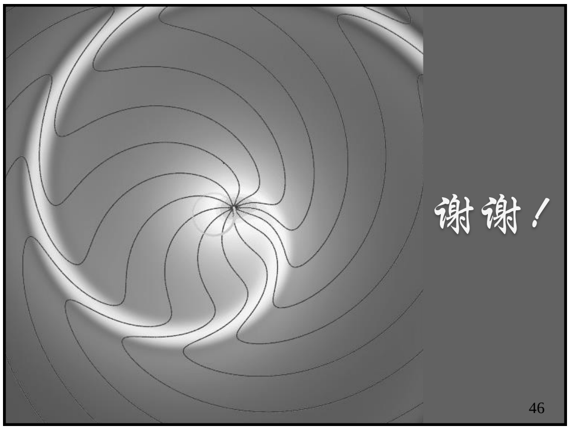
44

【思考】 已知静电场满足方程

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0},\quad \nabla\times\vec{E}(\vec{x})=0$$

试求静电场的分布。设电荷分布在有限区域。

45


谢谢！
46