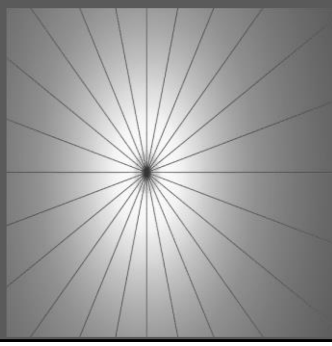
电·动力学



1

《电动力学》授课组

- **主讲**
  - 潘海俊： phj@ustc.edu.cn
- **助教**
  - 葛铠戈： gkg_pb21@mail.ustc.edu.cn
  - 何　畅： philiphe@mail.ustc.edu.cn

2

《电动力学》教材

章次	章名
一	电磁现象的基本规律
二	静电场
三	静磁场
四	电磁波的传播
五	电磁波的辐射
六	运动电荷的辐射
七	电磁波的散射、色散和吸收
八	狭义相对论

3

《电动力学》参考书

- 曹昌祺，经典电动力学，科学出版社，2021
- 王振林，现代电动力学，高等教育出版社，2022
- 费曼等，费曼物理学讲义，上海科学技术出版社，2014
- 格里菲斯，电动力学导论，机械工业出版社，2021
- 朗道，栗弗席兹，场论，高等教育出版社，2012
- 杰克逊，经典电动力学，高等教育出版社，2004
- A. Zangwill, Modern Electrodynamics, Cambridge, 2012.
- F. Scheck, Classical Field Theory, Springer, 2018.
- K.Lechner, Classical Electrodynamics, a modern perspective, Springer, 2018.

4

考核方式

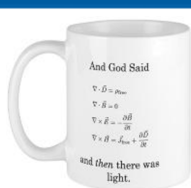
- **平时成绩：15%**
  - **不接受延迟交作业**（每周三上课前交）
  - **独立完成**（讨论多多益善）
- **平时测验 ：10%**
- **期中考试：30%（15%）**
- **期末考试 ：45%（60%）**
- **小论文 ： –2分～6分**

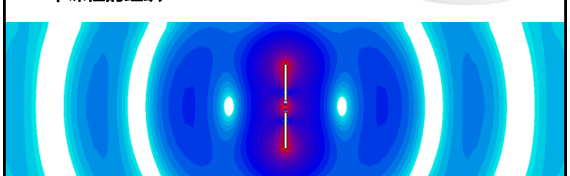
累计三次点名不到者总成绩记为不及格。

5

绪论

- **电磁学课程的内容**
- **电动力学课程的内容**
- **本课程的组织**





CH1. 场论与张量分析

7

§1 张量代数

8

一、若干符号

1. 求和约定

求和约定：若同一指标在同一单项式中重复出现，则默认对其求和。重复指标称为**哑指标**，不重复指标则称为**自由指标**。

【例】设A、B 都是矩阵 $n\times n$ 矩阵，则

$$(AB)_{ij}=\boxed{\sum_{k=1}^{n}}A_{ik}B_{kj},\quad \boxed{i,j=1,2,\cdots,n}$$

$$\Leftrightarrow\quad (AB)_{ij}=A_{ik}B_{kj}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{in}B_{nj}$$

- **默认对哑指标求和（除非特别说明）。**
- **默认算式对自由指标的所有可能取值都成立。**
- **在一个算式中，不同单项式应包含相同的自由自标。**

9

- **哑指标可以替换为未出现过的任意其他字母**

$$(AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj} = A_{im}B_{mj} \neq A_{ii}B_{ij}$$

- **自由指标可以同时替换为未出现过的任意其他字母**

$$(AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj} \quad \Leftrightarrow \quad (AB)_{mn} = A_{mk}B_{kn}$$

- **若 $A_{ij} = -A_{ji}$，而 $S_{ij} = S_{ji}$，则 $A_{ij}S_{ij} = 0$。**

$$A_{ij}S_{ij} = (-A_{ji})(S_{ji}) = -A_{ji}S_{ji}$$

$$\Longrightarrow \quad A_{ij}S_{ij} = -A_{ij}S_{ij}$$

$$\Longrightarrow \quad A_{ij}S_{ij} = 0$$

10

2. Kronecker 符号

$$\delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{ii} = 3 \\ A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik} \\ A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = A_{jj} = \mathrm{tr}\,A \end{cases}$$

11

3. Levi-Civita 符号（排列符号）

$$\varepsilon_{ijk} \triangleq \begin{cases} +1, & (ijk) = (123), (231) \text{ or } (312) \\ -1, & (ijk) = (132), (213) \text{ or } (321) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

- 完全反对称：

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}$$

- 3×3 矩阵的行列式

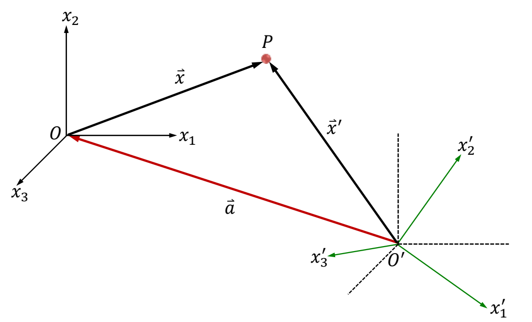
$$\varepsilon_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn} = \varepsilon_{lmn} \det A = \varepsilon_{ijk}A_{li}A_{mj}A_{nk}$$

- 值得任何一个想学好物理的学生留驻心底的数学公式

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

12

二、坐标变换



13

1. 右手直角坐标系

- 正交：$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$
- 右手：$\hat{x}_i \times \hat{x}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_k$

$\Leftrightarrow \quad (\hat{x}_i \times \hat{x}_j) \cdot \hat{x}_k = \varepsilon_{ijk}$

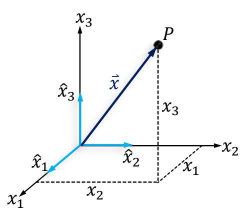
位矢：$\vec{x} = x_i\hat{x}_i = (\vec{x} \cdot \hat{x}_i)\hat{x}_i$

位移：$d\vec{x} = dx_i\hat{x}_i$

距离 $dl = |d\vec{x}|$

$$dl^2 = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j$$

度规：δ_{ij}



14

2. 直角坐标系之间的变换

在另一直角坐标系 $O'x_1'x_2'x_3'$ 中，P 点的位矢可以写为

$$\vec{x}' = x_i'\hat{x}_i' = (\vec{x}' \cdot \hat{x}_i')\hat{x}_i'$$

- 由于 $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$，因而

$$x_i' = \vec{x}' \cdot \hat{x}_i' = \vec{x} \cdot \hat{x}_i' + \vec{a} \cdot \hat{x}_i' \quad \Longrightarrow \quad x_i' = \lambda_{ij}x_j + a_i$$

即变换是线性的，其中

$$\vec{a} = \overline{O'O} = a_i\hat{x}_i', \quad \lambda_{ij} \triangleq \hat{x}_i' \cdot \hat{x}_j \quad \Longrightarrow \quad \hat{x}_i' = \lambda_{ij}\hat{x}_j$$

- 新、旧坐标系均为直角坐标系意味着

$$\delta_{ij} = \hat{x}_i' \cdot \hat{x}_j' = (\lambda_{ik}\hat{x}_k) \cdot (\lambda_{jl}\hat{x}_l) = \lambda_{ik}\lambda_{jl}\delta_{kl} = \lambda_{ik}\lambda_{jk} = (\lambda\lambda^T)_{ij}$$

即 λ 为正交矩阵，$\lambda \in O(3)$： $\lambda\lambda^T = I \quad \Longrightarrow \quad |\det\lambda| = 1$

15

- 一般地，两个直角坐标系之间的变换为

$$x_i' = \lambda_{ij}x_j + a_i,\quad \lambda \in O(3)$$

（1）**转动**：$x_i' = R_{ij}x_j,\quad R \in SO(3)$

（2）**平移**：$x_i' = x_i + a_i$

（3）**反演**：$x_i' = \mathcal{P}_{ij}x_j,\quad \mathcal{P} = \mathrm{diag}\{-1,-1,-1\} = -I$

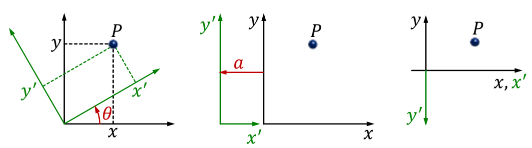
可以证明：

满足 $dl'^2 = dl^2$ 亦即 $dx_i'dx_i' = dx_idx_i$ 的变换 $x_i' = x_i'(x)$，

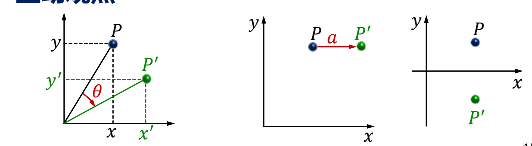
必为线性变换 $x_i' = \lambda_{ij}x_j + a_i$，且 $\lambda \in O(3)$。

3. 看待变换的主动与被动观点

被动观点



主动观点



三、三维标量与矢量

- **标量 φ**：只有一个分量，且其数值与坐标系的选取无关

$$\varphi' = \varphi$$

  - 例如：空间间隔，体积元，牛顿时间，质量，电量等。

- **矢量 $\vec{f}$**：有三个分量，且在坐标变换下如下变换

$$f_i' = \lambda_{ij}f_j$$

  - 例如：位移，速度，加速度等。
  - 任一给定坐标系决定的三个特殊的矢量（基矢）

$$(\hat{x}_i)_j = \delta_{ij}$$

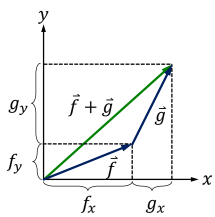
  - 矢量也可定义为：有三个分量，且在坐标变换下不变

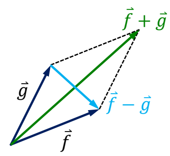
$$\vec{f} = f_i\hat{x}_i = f_i'\hat{x}_i'$$

1. 矢量的线性组合

$$\lambda\vec{f}+\mu\vec{g}\triangleq(\lambda f_x+\mu g_x)\hat{x}+\left(\lambda f_y+\mu g_y\right)\hat{y}+(\lambda f_z+\mu g_z)\hat{z}$$

- $\lambda\vec{f}+\mu\vec{g}$ 为矢量。





19

2. 点乘

$$\vec{f}\cdot\vec{g}\triangleq f_ig_i$$

- 就近点乘：

$$\vec{f}\cdot\vec{g}=(f_i\hat{x}_i)\cdot\left(g_j\hat{x}_j\right)=f_ig_j\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j=f_ig_j\delta_{ij}=f_ig_i$$

- 交换律：$\vec{g}\cdot\vec{f}=\vec{f}\cdot\vec{g}$
- 分配律：$\left(\lambda\vec{f}+\mu\vec{g}\right)\cdot\vec{h}=\lambda\vec{f}\cdot\vec{h}+\mu\vec{g}\cdot\vec{h}$
- $\vec{f}\cdot\vec{g}$ 为标量。

【思考】若对任一矢量 $\vec{g}$，f_ig_i 为标量，则 f_i 为矢量的分量。

20

标量积的几何意义

设 θ 是 $\vec{f}$ 和 $\vec{g}$ 间的夹角。

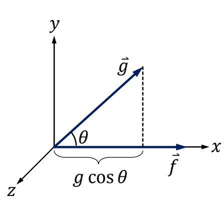
将 $\vec{f}$ 的方向定义 x 轴的方向

$$\vec{f}=f\hat{x}$$

将 $\vec{f}$ 和 $\vec{g}$ 所张平面定义为 xy 平面

$$\vec{g}=(g\cos\theta)\hat{x}\pm(g\sin\theta)\hat{y}$$

$$\Longrightarrow\quad\vec{f}\cdot\vec{g}=fg\cos\theta$$



$\vec{f}\cdot\vec{g}=\vec{g}$ 在 $\vec{f}$ 上的投影 $\times\ \vec{f}$ 的长度，

或 $\vec{f}$ 在 $\vec{g}$ 上的投影 $\times\ \vec{g}$ 的长度。

21

3. 叉乘

$$\vec{f}\times\vec{g} \triangleq (\varepsilon_{kij} f_i g_j)\hat{x}_k$$

- 就近叉乘：

$$\vec{f}\times\vec{g} = (f_i\hat{x}_i)\times(g_j\hat{x}_j) = f_i g_j \hat{x}_i\times\hat{x}_j = f_i g_j \epsilon_{ijk}\hat{x}_k$$

- 反交换律： $\vec{g}\times\vec{f} = -\vec{f}\times\vec{g}$

- 分配律： $\left(a\vec{f}+b\vec{g}\right)\times\vec{h} = a\vec{f}\times\vec{h}+b\vec{g}\times\vec{h}$

22

矢量积的几何意义

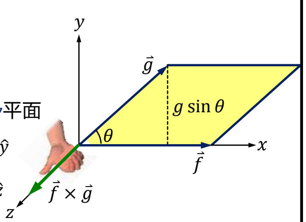
将 $\vec{f}$ 的方向定义 x 轴的方向

$$\vec{f} = f\hat{x}$$

将 $\vec{f}$ 和 $\vec{g}$ 所张平面定义为xy平面

$$\vec{g} = (g\cos\theta)\hat{x} \pm (g\sin\theta)\hat{y}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{f}\times\vec{g} = \pm(fg\sin\theta)\hat{z}$$



$\left|\vec{f}\times\vec{B}\right| = \vec{f}$ 和 $\vec{g}$ 所张平行四边形的面积 $= fg\sin\theta$

$\vec{f}\times\vec{g}\perp\vec{f},\vec{g}$，且 $\left(\vec{f},\ \vec{g},\ \vec{f}\times\vec{g}\right)$ 构成右手系

23

极矢量与轴矢量

令 $\vec{h} = \vec{f}\times\vec{g}$，则

$$h_i = \varepsilon_{ijk} f_j g_k = \varepsilon_{ijk}\lambda_{mj}\lambda_{nk} f'_m g'_n$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{li} h_i = \varepsilon_{ijk}\lambda_{li}\lambda_{mj}\lambda_{nk} f'_m g'_n$$

$$= (\det\lambda)\varepsilon_{lmn} f'_m g'_n$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{li} h_i = (\det\lambda) h'_l$$

$$\Longrightarrow \quad h'_l = (\det\lambda)\lambda_{li} h_i$$

这样的矢量称为**轴矢量**，而通常的矢量又称为**极矢量**。即

极矢量 $\vec{A}$：$A'_i = \lambda_{ij} A_i$

轴矢量 $\vec{A}$：$A'_i = (\det\lambda)\lambda_{ij} A_i$

24

- 转动变换下（$\lambda = R$），轴矢量与极矢量变换性质相同：

$$A_i' = R_{ij} A_j$$

- 反演变换下（$\lambda = -I$）：

极矢量：$A_i' = \lambda_{ij} A_j = -A_i$

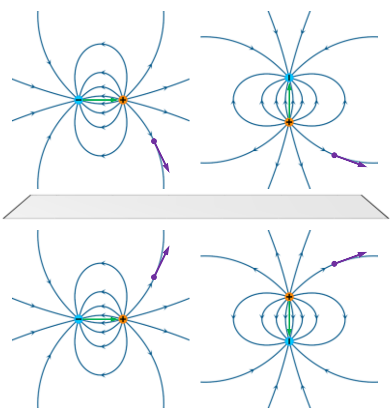
轴矢量：$A_i' = -\lambda_{ij} A_j = A_i$

- 镜面反射下（$\lambda = \mathrm{diag}\{0,0,-1\}$）：

极矢量：$(h_1', h_2', h_3') = (+h_1, +h_2, -h_3)$

轴矢量：$(h_1', h_2', h_3') = (-h_1, -h_2, +h_3)$

25



极矢量

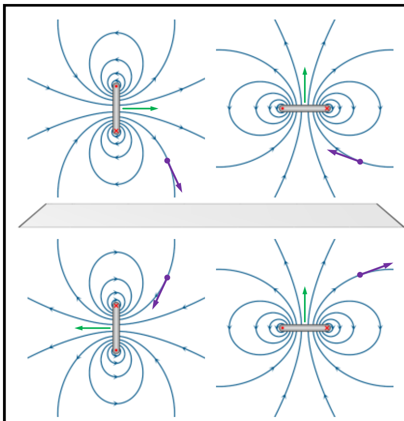
（如$\vec{r}, \vec{p}, \vec{E}, \vec{A}$等）

在镜面反射下，

平行分量不变，

垂直分量反向。

26



轴矢量

（如$\vec{\omega}, \vec{m}, \vec{B}$等）

在镜面反射下，

平行分量反向，

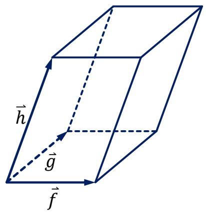
垂直分量不变。

27

【例】矢量混合积

（1）点乘与叉乘“交换”：

$$\vec{h}\cdot\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)=\left(\vec{h}\times\vec{f}\right)\cdot\vec{g}$$



（2）“舍近求远”：

$$\vec{h}\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)=\left(\vec{h}\cdot\vec{g}\right)\vec{f}-\left(\vec{h}\cdot\vec{f}\right)\vec{g}$$

$$\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)\times\vec{h}=\left(\vec{f}\cdot\vec{h}\right)\vec{g}-\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right)\vec{f}$$

28

四、张量

- **二阶张量** $\overleftrightarrow{T}$**：**有九个分量，且在坐标变换下如下变换：

$$T'_{ij}=\lambda_{ik}\lambda_{jl}T_{kl}\quad\leftrightarrow\quad T'=\lambda T\lambda^T$$

➢ 二阶张量也可定义为：有九个分量，且在坐标变换下不变

$$\overleftrightarrow{T}=T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j=T'_{ij}\hat{x}'_i\hat{x}'_j$$

- n **阶张量**有 3^n 个分量 $T_{i_1\cdots i_n}$，且在坐标变换下如下变换：

$$T'_{i_1\cdots i_n}=\lambda_{i_1j_1}\cdots\lambda_{i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}$$

➢ n 阶赝张量

$$T'_{i_1\cdots i_n}=(\det\lambda)\lambda_{i_1j_1}\cdots\lambda_{i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}$$

29

1. 并矢

两个矢量 $\vec{f}$ 和 $\vec{g}$ 的**并矢（dyad）**是二阶张量

$$\left(\vec{f}\vec{g}\right)_{ij}\triangleq f_ig_j$$

- 若两个矢量平行（$\vec{f}\times\vec{g}=0$），则有 $\vec{f}\vec{g}=\vec{g}\vec{f}$。
- 任一给定坐标系决定的九个特殊的二阶张量（基矢之并）

$$\left(\hat{x}_i\hat{x}_j\right)_{mn}=\delta_{im}\delta_{jn}$$

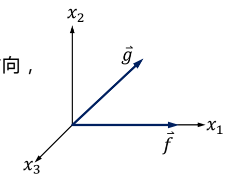
- 就近并：$\vec{f}\vec{g}=(f_i\hat{x}_i)\left(g_j\hat{x}_j\right)=f_ig_j\hat{x}_i\hat{x}_j$
- 若干矢量的并定义为：

$$\left(\vec{f}\vec{g}\cdots\vec{h}\right)_{ij\cdots k}\triangleq f_ig_j\cdots h_k$$

30

【例】证明 $\det\left(\overleftrightarrow{I}+\vec{f}\vec{g}\right)=1+\vec{f}\cdot\vec{g}$。

【证明】将 $\vec{f}$ 的方向定义 x_1 轴的方向，将 $\vec{f}$ 和 $\vec{g}$ 所张平面定义为x_1x_2平面



$$\vec{f}=f\hat{x}_1,\quad \vec{g}=g_1\hat{x}_1+g_2\hat{x}_2$$

因此

$$\det\left(\overleftrightarrow{I}+\vec{f}\vec{g}\right)=\begin{vmatrix}1+fg_1 & fg_2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+fg_1$$

$$\Rightarrow\quad \det\left(\overleftrightarrow{I}+\vec{f}\vec{g}\right)=1+\vec{f}\cdot\vec{g}$$

31

2. 对称张量与反对称张量

- **单位张量**：$\overleftrightarrow{I}=\delta_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j=\hat{x}_i\hat{x}_i$
- **对称张量** $\overleftrightarrow{S}$：$S_{ij}=S_{ji}$
- **反对称张量** $\overleftrightarrow{A}$ ：$A_{ij}=-A_{ji}$
- 任一二阶张量都可以表示为对称张量与反对称张量之和：

$$T_{ij}=\frac{T_{ij}+T_{ji}}{2}+\frac{T_{ij}-T_{ji}}{2}=T_{(ij)}+T_{[ij]}$$

32

【例】证明Levi–Civita符号是三阶赝张量。

【证明】

$$(\det\lambda)\varepsilon_{ijk}=\lambda_{il}\lambda_{jm}\lambda_{kn}\varepsilon_{lmn}$$

- 转动变换（$\lambda=R$）下

$$\varepsilon'_{ijk}=\varepsilon_{ijk}=R_{il}R_{jm}R_{kn}\varepsilon_{lmn}$$

- 反演变换（$\lambda=\mathcal{P}$）下

$$\varepsilon'_{ijk}=\varepsilon_{ijk}=-\mathcal{P}_{il}\mathcal{P}_{jm}\mathcal{P}_{kn}\varepsilon_{lmn}$$

可以证明：

δ_{ij} 和 ε_{ijk} 是三维欧几里德空间中仅有的两个独立不变张量。

33

3. 缩并

$n(\geq 2)$ 阶张量的**缩并**是 $n-2$ 阶张量

$$T_{\cdots i \cdots j \cdots} \longrightarrow T_{\cdots i \cdots i \cdots}$$

- 二阶张量缩并得到标量

$$T_{ij} \longrightarrow \varphi \triangleq T_{ii} = \operatorname{tr} T$$

- 三阶张量缩并得到矢量

$$T_{ijk} \longrightarrow X_i \triangleq T_{ikk}, \quad Y_i \triangleq T_{kik}, \quad Z_i \triangleq T_{kki}.$$

34

4. 点乘

矢量与二阶张量的点乘给出一个矢量

$$\vec{f} \cdot \overleftrightarrow{T} \triangleq (f_j T_{ji})\hat{x}_i, \quad \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{f} \triangleq (T_{ij} f_j)\hat{x}_i$$

- 就近点乘：$\vec{f} \cdot \vec{g}\vec{h} = \left(\vec{f} \cdot \vec{g}\right)\vec{h}, \quad \vec{g}\vec{h} \cdot \vec{f} = \vec{g}\left(\vec{h} \cdot \vec{f}\right)$

$$\vec{f} \cdot \overleftrightarrow{T} = (f_k \hat{x}_k) \cdot (T_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j) = (f_k T_{ij}) \overset{\delta_{ki}\hat{x}_j}{\boxed{(\hat{x}_k \cdot \hat{x}_i \hat{x}_j)}} = (f_i T_{ij})\hat{x}_j$$

- 不难看出：$\vec{h} \times \left(\vec{f} \times \vec{g}\right) = \vec{h} \cdot \left(\vec{g}\vec{f} - \vec{f}\vec{g}\right)$
- 如果 $\overleftrightarrow{T}$ 为对称张量，则 $\vec{f} \cdot \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{f}$。
  - 例如：$\vec{f} \cdot \overleftrightarrow{I} = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{f} = \vec{f}$

【思考】 若对任一矢量 $\vec{f}$，$T_{ij} f_j$ 为矢量，则 T_{ij} 为二阶张量。

35

- 两个二阶张量的点乘是一个二阶张量

$$\overleftrightarrow{T} \cdot \overleftrightarrow{S} \triangleq (T_{ik} S_{kj})\hat{x}_i \hat{x}_j$$

  - 例如：$\overleftrightarrow{T} \cdot \overleftrightarrow{I} = \overleftrightarrow{I} \cdot \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T}$

- 两个二阶张量的双点乘是一个标量

$$\overleftrightarrow{T} : \overleftrightarrow{S} \triangleq T_{ij} S_{ji} = \operatorname{tr}(TS) = \overleftrightarrow{S} : \overleftrightarrow{T}$$

  - 例如：

$$\overleftrightarrow{T} : \overleftrightarrow{I} = \operatorname{tr} T \quad \Longrightarrow \quad \vec{f}\vec{g} : \overleftrightarrow{I} = \operatorname{tr}\left(\vec{f}\vec{g}\right) = \vec{f} \cdot \vec{g}$$

$$\overleftrightarrow{I} : \overleftrightarrow{I} = 3$$

36

5. 叉乘

矢量与二阶张量的叉乘给出一个张量

$$\vec{f}\times\vec{\vec{T}} \triangleq (\varepsilon_{lki}f_kT_{ij})\hat{x}_l\hat{x}_j,\quad \vec{\vec{T}}\times\vec{f} \triangleq (\varepsilon_{jkl}T_{ij}f_k)\hat{x}_i\hat{x}_l$$

- **就近叉乘：** $\vec{f}\times\vec{g}\vec{h} = \left(\vec{f}\times\vec{g}\right)\vec{h},\quad \vec{g}\vec{h}\times\vec{f} = \vec{g}\left(\vec{h}\times\vec{f}\right)$

$$\begin{aligned}\vec{f}\times\vec{\vec{T}} &= (f_k\hat{x}_k)\times(T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j)\\ &= (f_kT_{ij})(\hat{x}_k\times\hat{x}_i\hat{x}_j)\\ &= (\varepsilon_{kil}f_kT_{ij})\hat{x}_l\hat{x}_j\\ &= (\varepsilon_{lki}f_kT_{ij})\hat{x}_i\hat{x}_l\end{aligned}$$

37

【例】 $\vec{f}\times\vec{\vec{I}}$和$\vec{\vec{I}}\times\vec{f}$ 有什么关系？

$$\vec{f}\times\vec{\vec{I}} = \vec{\vec{I}}\times\vec{f} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -f_3 & f_2 \\ f_3 & 0 & -f_1 \\ -f_2 & f_1 & 0\end{pmatrix} \triangleq -\vec{\vec{f}}$$

符号$\vec{\vec{f}}$和$\vec{f}$的对应法则是 $f_{ij}=\varepsilon_{ijk}f_k$，即

$$\vec{\vec{f}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & f_3 & -f_2 \\ -f_3 & 0 & f_1 \\ f_2 & -f_1 & 0\end{pmatrix}$$

38

【例】证明如下结合律：

$$\begin{cases}\vec{f}\cdot(\vec{\vec{T}}\cdot\vec{g}) = \left(\vec{f}\cdot\vec{\vec{T}}\right)\cdot\vec{g} \triangleq \vec{f}\cdot\vec{\vec{T}}\cdot\vec{g}\\ \vec{f}\cdot(\vec{\vec{T}}\times\vec{g}) = \left(\vec{f}\cdot\vec{\vec{T}}\right)\times\vec{g} \triangleq \vec{f}\cdot\vec{\vec{T}}\times\vec{g}\\ \vec{f}\times(\vec{\vec{T}}\times\vec{g}) = \left(\vec{f}\times\vec{\vec{T}}\right)\times\vec{g} \triangleq \vec{f}\times\vec{\vec{T}}\times\vec{g}\end{cases}$$

【证明】（以最后一式为例）由于

$$\left.\begin{aligned}\vec{f}\times(\vec{\vec{T}}\times\vec{g}) &= (f_i\hat{x}_i)\times[(T_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k)\times(g_l\hat{x}_l)]\\ \left(\vec{f}\times\vec{\vec{T}}\right)\times\vec{g} &= [(f_i\hat{x}_i)\times(T_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k)]\times(g_l\hat{x}_l)\end{aligned}\right\} = \begin{aligned}&(f_iT_{jk}g_l)\\ &(\hat{x}_i\times\hat{x}_j\hat{x}_k\times\hat{x}_l)\end{aligned}$$

所以$\vec{f}\times(\vec{\vec{T}}\times\vec{g}) = \left(\vec{f}\times\vec{\vec{T}}\right)\times\vec{g} \triangleq \vec{f}\times\vec{\vec{T}}\times\vec{g}$。

39

【思考】证明

$$\begin{cases} \vec{b}\cdot\vec{\vec{a}} = \vec{a}\times\vec{b} \\ \vec{\vec{a}}\cdot\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a} \\ \vec{\vec{a}}\cdot\vec{\vec{a}} = \vec{a}\vec{a} - a^2\vec{\vec{I}} \end{cases}$$

其中

$$\vec{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} = -\vec{a}\times\vec{\vec{I}} = -\vec{\vec{I}}\times\vec{a}$$

40

五、张量场

***n* 阶张量场** $T_{i_1\cdots i_n}(\vec{x})$ 是 n 阶张量在空间中的一个分布。

- 在坐标变换下： $T'_{i_1\cdots i_n}(x') = \lambda_{i_1j_1}\cdots\lambda_{i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}(x)$
- **在直角坐标系下，梯度算子定义为：**

$$\nabla \triangleq \hat{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{x}_i\partial_i$$

  - ∇ 是一阶线性微分算子（满足Leibnitz法则、链式法则等）
  - ∇ 是矢量算子（满足矢量的代数运算法则）

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \lambda_{kj}\frac{\partial x'_k}{\partial x'_i} = \lambda_{kj}\delta_{ki} = \lambda_{ij} \implies \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \lambda_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

- 若 $T_{i\cdots j}$ 是 n 阶张量场，则 $\partial_k T_{i\cdots j}$ 是 $n+1$ 阶张量场。

41

§2 场的导数

42

一、场的一阶导数

在直角坐标系下，定义

- 标量场的**梯度**：$\nabla\varphi \triangleq (\partial_i\varphi)\hat{x}_i$
- 矢量场的**梯度**：$\nabla\vec{f} \triangleq (\partial_i f_j)\hat{x}_i\hat{x}_j$

  矢量场的**散度**：$\nabla\cdot\vec{f} \triangleq \partial_i f_i$

  矢量场的**旋度**：$\nabla\times\vec{f} \triangleq (\varepsilon_{ijk}\partial_j f_k)\hat{x}_i$
- 张量场的**散度**：$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} \triangleq (\partial_j T_{ji})\hat{x}_i$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} \triangleq (\hat{x}_i\partial_i)\cdot(T_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k) = (\partial_i T_{jk})(\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j\hat{x}_k)$$
$$= (\partial_i T_{jk})(\delta_{ij}\hat{x}_k) = (\partial_i T_{ik})\hat{x}_k$$

43

【例】试求 $r = |\vec{x}|$ 的梯度以及 $\vec{x}$ 的梯度、散度和旋度。

【解】$r = \sqrt{x_k x_k}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{1}{2r}\dfrac{\partial(x_k x_k)}{\partial x_i} = \dfrac{2x_k\delta_{ik}}{2r} = \dfrac{2x_i}{2r}$

$\Rightarrow$ $\nabla r = \dfrac{\partial r}{\partial x_i}\hat{x}_i = \dfrac{x_i\hat{x}_i}{r} = \dfrac{\vec{x}}{r}$

$\Rightarrow$ $\nabla r = \hat{r}$

$\vec{x} = x_k\hat{x}_k$ $\Rightarrow$ $\nabla\vec{x} = (\partial_i x_k)\hat{x}_i\hat{x}_k = \delta_{ik}\hat{x}_i\hat{x}_k = \hat{x}_i\hat{x}_i$

$\Rightarrow$ $\nabla\vec{x} = \overleftrightarrow{I}$

$\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{x} = \mathrm{tr}\overleftrightarrow{I} = 3,\quad \nabla\times\vec{x} = 0$

44

1. 莱布尼兹法则

$$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi)$$

$$\nabla\left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right) = \vec{f}\cdot\nabla\vec{g} + \vec{g}\cdot\nabla\vec{f} + \vec{f}\times(\nabla\times\vec{g}) + \vec{g}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)$$

$$\begin{cases} \nabla\left(\varphi\vec{f}\right) = (\nabla\varphi)\vec{f} + \varphi\left(\nabla\vec{f}\right) \\ \nabla\cdot\left(\varphi\vec{f}\right) = (\nabla\varphi)\cdot\vec{f} + \varphi\left(\nabla\cdot\vec{f}\right) \\ \nabla\times\left(\varphi\vec{f}\right) = (\nabla\varphi)\times\vec{f} + \varphi\left(\nabla\times\vec{f}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\left(\vec{f}\times\vec{g}\right) = \left(\nabla\vec{f}\right)\times\vec{g} - (\nabla\vec{g})\times\vec{f} \\ \nabla\cdot\left(\vec{f}\times\vec{g}\right) = \left(\nabla\times\vec{f}\right)\cdot\vec{g} - (\nabla\times\vec{g})\cdot\vec{f} \\ \nabla\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right) = (\nabla\cdot\vec{g} + \vec{g}\cdot\nabla)\vec{f} - \left(\nabla\cdot\vec{f} + \vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g} \end{cases}$$

45

【例】 证明 $\nabla\cdot\left(\vec f\vec g\right)=\left(\nabla\cdot\vec f\right)\vec g+\left(\vec f\cdot\nabla\right)\vec g$。

【证明1】（下标法）：

$$\left[\nabla\cdot\left(\vec f\vec g\right)\right]_k=\partial_i(f_ig_k)\qquad\text{（定义展开）}$$

$$=(\partial_if_i)g_k+f_i(\partial_ig_k)\qquad\text{（莱布尼兹法则）}$$

$$=\left(\nabla\cdot\vec f\right)g_k+\left(\vec f\cdot\nabla\right)g_k\qquad\text{（定义还原）}$$

$$=\left[\left(\nabla\cdot\vec f\right)\vec g+\left(\vec f\cdot\nabla\right)\vec g\right]_k\qquad\text{（定义还原）}$$

46

或者

$$\nabla\cdot\left(\vec f\vec g\right)=(\hat x_i\partial_i)\cdot\left(f_jg_k\hat x_j\hat x_k\right)$$

$$=\left[\partial_i\left(f_jg_k\right)\right]\left(\hat x_i\cdot\hat x_j\hat x_k\right)$$

$$=\left[\left(\partial_if_j\right)g_k+f_j(\partial_ig_k)\right]\delta_{ij}\hat x_k$$

$$=\left[(\partial_if_i)g_k+f_i(\partial_ig_k)\right]\hat x_k$$

$$=\left(\nabla\cdot\vec f+\vec f\cdot\nabla\right)\vec g$$

47

【证明2】（符号法）：

∇_f 只作用于 $\vec f$

∇_g 只作用于 $\vec g$

$$\nabla\cdot\left(\vec f\vec g\right)=\nabla_f\cdot\left(\vec f\vec g\right)+\nabla_g\cdot\left(\vec f\vec g\right)\qquad\text{（莱布尼兹法则）}$$

$$=\nabla_f\cdot\vec f\vec g+\nabla_g\cdot\vec f\vec g\qquad\text{（就近点乘）}$$

$$=\left(\nabla_f\cdot\vec f\right)\vec g+\left(\vec f\cdot\nabla_g\right)\vec g\qquad\text{（就近点乘、交换律）}$$

$$=\left(\nabla\cdot\vec f+\vec f\cdot\nabla\right)\vec g\qquad\text{（去下标）}$$

48

【例】 证明 $\nabla\cdot\left(\vec{f}\vec{g}\vec{h}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{f}\right)\vec{g}\vec{h}+\left(\vec{f}\cdot\nabla\vec{g}\right)\vec{h}+\vec{g}\left(\vec{f}\cdot\nabla\vec{h}\right)$。

【证明】（符号法）：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\vec{f}\vec{g}\vec{h}\right) &= \nabla_f\cdot\left(\vec{f}\vec{g}\vec{h}\right)+\nabla_g\cdot\left(\vec{f}\vec{g}\vec{h}\right)+\nabla_h\cdot\left(\vec{f}\vec{g}\vec{h}\right)\\
&= \nabla_f\cdot\vec{f}\vec{g}\vec{h}+\nabla_g\cdot\vec{f}\vec{g}\vec{h}+\nabla_h\cdot\vec{f}\vec{g}\vec{h}\\
&= \left(\nabla_f\cdot\vec{f}\right)\vec{g}\vec{h}+\left(\vec{f}\cdot\nabla_g\right)\vec{g}\vec{h}+\left(\vec{f}\cdot\nabla_h\right)\vec{g}\vec{h}\\
&= \left(\nabla_f\cdot\vec{f}\right)\vec{g}\vec{h}+\left(\vec{f}\cdot\nabla_g\vec{g}\right)\vec{h}+\vec{g}\left(\vec{f}\cdot\nabla_h\vec{h}\right)\\
&= \left(\nabla\cdot\vec{f}\right)\vec{g}\vec{h}+\left(\vec{f}\cdot\nabla\vec{g}\right)\vec{h}+\vec{g}\left(\vec{f}\cdot\nabla\vec{h}\right)
\end{aligned}
$$

49

【例】 证明 $\nabla\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)=(\nabla\cdot\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-\left(\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g}$ 。

【证明】（符号法）：

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right) &= \nabla_f\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)+\nabla_g\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)\\
&= \left[(\nabla_f\cdot\vec{g})\vec{f}-\left(\nabla_f\cdot\vec{f}\right)\vec{g}\right]+\left[(\nabla_g\cdot\vec{g})\vec{f}-\left(\nabla_g\cdot\vec{f}\right)\vec{g}\right]\\
&= \left[(\vec{g}\cdot\nabla_f)\vec{f}-\left(\nabla_f\cdot\vec{f}\right)\vec{g}\right]+\left[(\nabla_g\cdot\vec{g})\vec{f}-\left(\vec{f}\cdot\nabla_g\right)\vec{g}\right]\\
&= (\nabla\cdot\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-\left(\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g}
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right) &= \nabla\cdot\left(\vec{g}\vec{f}-\vec{f}\vec{g}\right)\\
&= (\nabla\cdot\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-\left(\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g}
\end{aligned}
$$

50

【例】 证明 $\vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)=\frac{1}{2}\nabla f^2-\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}$。

【证明】 由于（习题1.2）

$$\nabla\left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)=\vec{f}\cdot\nabla\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla\vec{f}+\vec{f}\times(\nabla\times\vec{g})+\vec{g}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)$$

令 $\vec{g}=\vec{f}$ 得

$$\nabla f^2=2\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}+2\vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)=\frac{1}{2}\nabla f^2-\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}$$

或者

$$\vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)=\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{f}\cdot\vec{f}\right)-\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}$$

51

【例】与张量场有关的几个等式。

$$\begin{cases} \nabla\cdot\left(\vec{f}\vec{g}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{f}\right)\vec{g}+\left(\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g} \\ \nabla\cdot\left(\vec{f}\vec{g}\vec{h}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{f}\right)\vec{g}\vec{h}+\left(\vec{f}\cdot\nabla\vec{g}\right)\vec{h}+\vec{g}\left(\vec{f}\cdot\nabla\vec{h}\right) \\ \nabla\cdot\left(\varphi\overleftrightarrow{T}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\cdot\overleftrightarrow{T}+\varphi\left(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right) \end{cases}$$

由最后一式可得：

$$\nabla\varphi=\nabla\cdot\left(\varphi\overleftrightarrow{I}\right)$$

【例】证明 $\nabla\cdot\left(\overleftrightarrow{T}\times\vec{x}\right)=-\vec{x}\times\left(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)$，其中 $\overleftrightarrow{T}$ 为对称张量。

【证明】

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\overleftrightarrow{T}\times\vec{x}\right)&=\left(\hat{x}_i\partial_i\right)\cdot\left[\left(T_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k\right)\times\left(x_l\hat{x}_l\right)\right]\\&=\left[\partial_i\left(T_{jk}x_l\right)\right]\left(\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j\hat{x}_k\times\hat{x}_l\right)\\&=\left[\left(\partial_iT_{jk}\right)x_l+T_{jk}\delta_{il}\right]\left(\delta_{ij}\hat{x}_k\times\hat{x}_l\right)\\&=\left(\partial_iT_{ik}\right)x_l\left(\hat{x}_k\times\hat{x}_l\right)+T_{lk}\left(\hat{x}_k\times\hat{x}_l\right)\\&=\left(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)\times\vec{x}\\&=-\vec{x}\times\left(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)\end{aligned}$$

2. 链式法则

设 $t_r=t_r(\vec{x})$，而标量场 $\varphi=\varphi(t_r)$、矢量场 $\vec{A}=\vec{A}(t_r)$，则

$$\begin{cases}\nabla\varphi(t_r)=\dot{\varphi}\nabla t_r\\ \nabla\vec{A}(t_r)=(\nabla t_r)\dot{\vec{A}}\ \left[\neq\dot{\vec{A}}\nabla t_r\right]\\ \nabla\cdot\vec{A}(t_r)=(\nabla t_r)\cdot\dot{\vec{A}}=\dot{\vec{A}}\cdot\nabla t_r\\ \nabla\times\vec{A}(t_r)=(\nabla t_r)\times\dot{\vec{A}}=-\dot{\vec{A}}\times\nabla t_r\end{cases}$$

其中，$\dot{\varphi}\triangleq\partial\varphi/\partial t_r$，$\dot{\vec{A}}\triangleq\partial\vec{A}/\partial t_r$。

【例】

$$\nabla\varphi(r)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r},\quad\nabla\times[\varphi(r)\hat{r}]=0$$

三、场的二阶导数

1. 两个恒等式

$$\nabla\times\nabla\varphi\equiv 0,\quad \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv 0$$

2. 拉普拉斯算子

$$\nabla^2\triangleq\nabla\cdot\nabla=\partial_i\partial_i$$

- 标量算子：可作用于标量、矢量等

$$\nabla^2\varphi=\partial_i\partial_i\varphi,\quad \nabla^2\vec{F}=(\nabla^2F_i)\hat{x}_i=(\partial_j\partial_jF_i)\hat{x}_i.$$

3. 算子的并

$$\nabla\nabla\triangleq\hat{x}_i\hat{x}_j\partial_i\partial_j$$

- 张量算子

55

四、泰勒展开

1. 单变量函数的泰勒展开

$$\varphi(x+\epsilon)=\varphi(x)+\epsilon\frac{d\varphi(x)}{dx}+\epsilon^2\frac{1}{2!}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\cdots$$

$$=\left[1+\epsilon\frac{d}{dx}+\epsilon^2\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}+\cdots\right]\varphi(x)$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\right]\varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \varphi(x+\epsilon)=\exp\left(\epsilon\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)$$

56

2. 标量场的泰勒展开

$$\varphi(\vec{x}+\vec{\epsilon})=e^{\epsilon_1\partial_1}e^{\epsilon_2\partial_2}e^{\epsilon_3\partial_3}\varphi(\vec{x})$$

$$=e^{\vec{\epsilon}\cdot\nabla}\varphi(\vec{x})$$

$$=\left[1+\vec{\epsilon}\cdot\nabla+\frac{1}{2!}(\vec{\epsilon}\cdot\nabla)^2+\cdots\right]\varphi(\vec{x})$$

$$\Longrightarrow \varphi(\vec{x}+\vec{\epsilon})=e^{\vec{\epsilon}\cdot\nabla}\varphi(\vec{x})$$

$$=\left[1+\vec{\epsilon}\cdot\nabla+\frac{1}{2!}(\vec{\epsilon}\cdot\nabla)^2+\cdots\right]\varphi(\vec{x})$$

$$=\left[1+\vec{\epsilon}\cdot\nabla+\frac{1}{2!}(\vec{\epsilon}\vec{\epsilon}:\nabla\nabla)+\cdots\right]\varphi(\vec{x})$$

57

五、相对位矢

$$\begin{cases} \textbf{场点：}\vec{x} = x_i\hat{x}_i \quad \longrightarrow \quad \nabla = \hat{x}_i(\partial/\partial x_i) \\ \textbf{源点：}\vec{x}' = x_i'\hat{x}_i \quad \longrightarrow \quad \nabla' = \hat{x}_i(\partial/\partial x_i') \\ \textbf{场点相对于源点的位矢：}\vec{\mathbb{R}} \triangleq \vec{x} - \vec{x}' \end{cases}$$

- 相对位矢满足的基本关系：

$$\begin{cases} \nabla\mathbb{R} = \hat{\mathbb{R}} = -\nabla'\mathbb{R} \\ \nabla\vec{\mathbb{R}} = \vec{I} = -\nabla'\vec{\mathbb{R}} \\ \nabla\cdot\vec{\mathbb{R}} = 3 = -\nabla'\cdot\vec{\mathbb{R}} \\ \nabla\times\vec{\mathbb{R}} = 0 = \nabla'\times\vec{\mathbb{R}} \end{cases}$$

58

- 与相对位矢有关的几个常用关系：

（1） $\nabla\varphi(\vec{\mathbb{R}}) = -\nabla'\varphi(\vec{\mathbb{R}}),\quad \nabla\varphi(\mathbb{R}) = \varphi'(\mathbb{R})\hat{\mathbb{R}}.$

（2） $\begin{cases} \nabla\vec{A}(\mathbb{R}) = (\nabla\mathbb{R})\vec{A}' = \hat{\mathbb{R}}\vec{A}' \\ \nabla\cdot\vec{A}(\mathbb{R}) = (\nabla\mathbb{R})\cdot\vec{A}' = \hat{\mathbb{R}}\cdot\vec{A}' \\ \nabla\times\vec{A}(\mathbb{R}) = (\nabla\mathbb{R})\times\vec{A}' = \hat{\mathbb{R}}\times\vec{A}' \end{cases}$

（3） $\dfrac{1}{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = e^{-\vec{x}'\cdot\nabla}\dfrac{1}{r}$

$$= \left[1 - \vec{x}'\cdot\nabla + \frac{1}{2!}(\vec{x}'\vec{x}':\nabla\nabla) + \cdots\right]\frac{1}{r}$$

59

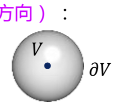
六、与坐标系无关的定义

与坐标系无关的梯度定义：

$$d\varphi(\vec{r}) = \nabla\varphi\cdot d\vec{l}$$

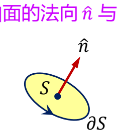
与坐标系无关的散度定义（闭曲面以外法向为正方向）：

$$\nabla\cdot\vec{F} \triangleq \lim_{V\to 0}\left[\frac{1}{V}\oiint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}\right]$$



与坐标系无关的旋度定义（$\hat{n}$ 为 S 的法向，开曲面的法向 $\hat{n}$ 与其边界绕行方向满足右手法则）：

$$\hat{n}\cdot(\nabla\times\vec{F}) \triangleq \lim_{S\to 0}\left[\frac{1}{S}\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{l}\right]$$



60